$x = \frac{a}{3} \times (-1 \pm 2)$. Quare duplex valor radicis x erit $+\frac{1}{3}a$ et $-a$, qui quidem duo valores determinant puncta duo, quae problemati aeque satisfaciunt. Punctum unum locatur inter duo luminaria, illiusque distantia a lumine vividiori duplo maior erit, quam a debiliori. Punctum alterum constituetur in linea producta, illiusque a lumine debiliori distantia aequalis erit ipsi luminarium distantiae. Facile autem sine ullo algebrae auxilio intelligitur, utrumque punctum problemati satisfacere; quum duo illa puncta lumini debiliori duplo proximiora sint, quam vividiori, quae vim habent quadruplo maiorem. Hoc exemplo illustrantur, quae de quantitatibus negativis breviter antea attigimus. Haec sunt arithmeticae et algebrae elementa brevissima quidem, sed tamen rerum varietate copiosa, quantum ad nostras institutiones physicas satis esse iudicavimus.

FINIS ALGEBRAE.

ELEMENTA GEOMETRIAE.

PROOEMIVM.

De definitione et divisione geometriae.

DEFINITIO I.

Geometria est: scientia magnitudinum; *solidorum* nempe, *superficierum* et *linearum*.

Def. II. Solidum est magnitudo in longum, latum et profundum extensa.

Schol. Quamvis autem nihil sit in rerum natura continuum, quod tres illas dimensiones simul non habeat, illae tamen seorsum considerari possunt, vel etiam duas tantum concipere possumus, de tertia minime cogitantes; atque hinc intelligitur notio superficiei et lineae.

Def. III. Superficies est: magnitudo tantum in longum et latum extensa. Linea autem est: magnitudo extensa tantum in longum.

Schol. Et re quidem ipsa itineris longitudinem nobis repraesentamus, non attenta eius latitudine; et planitiei latitudinem intelligimus, terrarum profunditatem nequaquam considerantes.

Def. IV. Denique si concipiamus lineae terminum, cuius nulla pars sit, nulla extensio, iam terminus ille *punctum* dicitur.

Schol. I. Itaque ad explicandum tironibus geometriae definitionem, id primum ostendi debet, quomodo per varios abstractionum gradus ex corporis *physici*, et prout est in se, consideratione ad corporis *geometrici* et simpliciter extensi contemplationem perveniamus, ac deinde ad superficiei et lineae notionem progrediamur, atque tandem notionem puncti formemus. Neque methodo satis philosophica utuntur, qui statim superficiem definiunt terminum solidi, lineam terminum superficiei, et punctum terminum lineae.

Schol. II. Ex praecedenti definitione nascitur divisio geometriae in geometriam linearum, superficierum et solidorum. Quare tres erunt geometriae sectiones. I.ª De lineis. II.ª De superficiebus. III.ª De solidis. In prima sectione linearum positionem illarumque mutuam relationem expendemus. Porro linearum nomine non solum intelligimus lineam rectam, sed etiam lineam circularem, cuius utilitas est maxima in consideranda linearum rectarum mutua positione. Quare ad geometriae elementa pertinent quoque circuli proprietates. In secunda autem sectione superficierum proprietates et mensuram considerabimus. In tertia tandem sectione proprietates solidorum illorumque mensuram demonstrabimus. Ad recta methodus postulat, ut rerum demonstrandarum varietatem in unaquaque sectione variis capitibus distinguamus.

Def. V. Lineam repraesentare solent geometrae tamquam genitam motu puncti. Si punctum directionem non mutat, linea hoc motu descripta *recta* dicitur, uti AB; *curva* autem appellatur, si punctum perpetuo mutet directionem, uti OGQ. Fig. I.

Schol. At fatendum est, ita simplicem esse lineae rectae et curvae notionem, ut ad clariorem ideam magisque *elementarem* reduci vix possit. Rectam definiunt alii, lineam omnium inter duos terminos ductarum brevissimam.

Corol. I. Ceterum inde evidens est, datis in linea recta punctis duobus, datam esse huius lineae positionem ita, ut unica dumtaxat recta per haec duo puncta transire possit.

Corol. II. Ex his etiam intelligitur, quid sit superficies plana, scilicet omnium superficierum eosdem terminos habentium brevissima, vel cui linea recta undequaque adaptari potest.

Def. VI. *Circulus* definitur: figura plana CEGFOH, unica curva linea comprehensa, quae 2.
peripheria dicitur sive *circumferentia* CGFOH, ad quam omnes rectae lineae a puncto medio E, quod *centrum* dicitur, ductae aequales sunt inter se.

Def. VII. Circumferentiae pars quaelibet CG *arcus* vocatur. Linea recta per centrum ducta, et utrinque in peripheria terminata RO *diameter* dicitur; rectae autem a centro ad circumferentiam ductae EF, EG *semidiametri* vel *radii* appellantur.

Def. VIII. Anguli notio ope circuli facillime concipitur. Duae lineae CE, RE in aliquo puncto E concurrentes, angulum efficere dicuntur. Angulorum mensura est arcus, quem ipsorum latera comprehendunt, in peripheria circuli ex anguli vertice, tamquam centro, descripti. Sic arcus CR est mensura anguli CER.

Schol. I. Porro dum dicitur, anguli mensuram esse arcum circuli, nihil aliud significatur, nisi aequales esse angulos, si aequales sint arcus ex angulorum vertice et eodem ratio descripti. Ita dum dicitur, angulum esse alterius duplum, nihil aliud intelligitur, nisi arcum unum altero esse duplo maiorem. Itaque anguli natura in maiori aut minori inclinatione unius lineae ad aliam consistit. Igitur angulus quum sit mera linearum inclinatio et apertura; extensio vel quantitas proprie loquendo dici non potest; ac proinde, abstractione facta ab omni extensionis consideratione, angulum alterius duplum dicere non possumus, quum id dici possit dumtaxat de quantitate, comparata cum alia quantitate homogenea. Quia vero mera linearum apertura partes non habet, angulus non est quantitas proprie dicta *.

* *Celeberrimae quaestioni sese interponit Auctor, quae inter magni nominis mathematicos Clavium et Peletarium exagitata est, ut aliam de natura anguli contactus resolverent. Sed Jacquierius Tacqueto adsentiri videtur, aiecti in sua adversum illos disquisitione, angulum non esse quantitatem; sed quantitatis modum. Nos vero, qui adolescentes ab omni cavillandi studio in physica alienos esse volumus, eos sedulo mone-*

Atque hinc factum est, ut anguli mensura cum circuli arcu comparaverint geometrae.

Schol. II. Circulus dividi solet in partes aequales 360, quae *gradus* dicuntur; singuli gradus dividuntur in 60 minuta prima, quodlibet minutum primum dividitur in 60 secunda; et sic in infinitum. Gradus per o designari solent, minuta autem per lineolas numeris superimpositas. Ita si forte occurrant 45°; $25'$, $36''$, $42'''$, lege

re debemus, ne in mathesim elementarem, quae non cavillationes modo, sed et quaestionum pruritum aversatur, praesentem quaestionem intrudant, quae, nondum satis eliquato calculo infinitesimali, scholaticisque nimio adhuc disputationum aestu ferventibus, mathematicos in varia traxit. Hoc unum, velim, animadvertant, angulum, ut veram accuratamque quantitatem a mathematicis tractari, idque satis superque esse, ut vera et genuina sit quantitas in geometria, qua talis scientia est. Quod si ideo quantitatem esse negandum est, quod non sit, nisi quantitatum seu linearum relatio aut inclinatio; pariter spatium quantitatem esse, negandum erit, quum nihil aliud illud sit, quam punctorum, linearum, superficierumve coëxsistentium mutua relatio. Ex eo autem, quod mensura anguli sit heterogenea, seu arcus ad radium suum relatus, concludi nequit, angulum non esse quantum, quemadmodum non infertur, celeritatem non esse veram quantitatem, etsi celeritatis mensura sit heterogenea, spatium nempe ad tempus relatum.

Fig. 45 gradus, 25 minuta prima, 36 secunda 42 tertia.

Corol. Ex angulorum notione pendet linearum mutua positio.

8. *Def. IX.* Linea DA dicitur alteri lineae EB *perpendicularis*, quando in ipsam incidens facit angulos hinc et inde aequales DAE, DAB. Angulus eiusmodi dicitur *rectus*. At si recta una CA super alteram EB cadens duos angulus efficiat CAB, CAE, ita ut unus CAE sit recto maior, alter autem CAB minor: primus dicitur *obtusus*, alius autem *acutus*.

3. *Def. X.* Si talis sit rectarum BA, CD positio, ut eamdem semper a se invicem servent distantiam, evidens est, nullam esse linearum illarum mutuam inclinationem; ac proinde in infinitum etiam protractae non concurrent, seu angulum non efficient. Tales lineae dicuntur *parallelae*.

Corol. Ex lineae rectae definitione evidens est, duas lineas rectas in unico dumtaxat puncto concurrere posse. Quum enim omni careant latitudine: communis intersectio in unico tantum puncto fieri potest. Neque ad aliam deinde intersectionem transire possunt; alterutra enim linea directionem mutaret, ac proinde non forent ambae rectae, quod est contra hyp. Id pro axiomate habent geometrae, et ita exprimi solet. *Duae rectae nec segmentum commune habere, nec spatium claudere possunt.* Itaque tres saltem lineae requiruntur, ut spatium undique claudatur.

Def. XI. Spatium undique clausum *figura* dici-
9. tur. *Triangulum* est, figura ABC terminata tribus

lineis AB, BC, CA, quae eiusdem *latera* vocantur. Fig.

Def. XII. Haec autem latera si fuerint aequalia, uti AB, BC, CA, triangulum dicitur *aequi-* 17.
laterum. Si duo tantum latera sint aequalia, uti AB, BC, triangulum vocatur *aequicrurum* seu 18.
isosceles. Demum si latera omnia fuerint inaequalia, uti AB, BC, CA, triangulum *scalenum* dicitur. 9.

Def. XIII. Rursus autem triangulum ratione angulorum considerari potest. Si unum habeat angulum rectum, uti ACB, *rectangulum* dicitur. 15.
Acutangulum si omnes habeat angulos acutos, uti ACB. Tandem *obtusangulum* vocatur, si angu- 17.
lum unum habuerit obtusum, uti ACB. 9.

Def. XIV. Figura quattuor lateribus terminata, *quadrilaterum* generatim appellatur. Appellatur autem in specie *parallelogrammum*, cuius bina opposita latera sunt mutuo parallela, etiamsi anguli lateribus comprehensi non sint recti.

Def. XV. Si parallelogrammum aequalia habuerit latera AB, BC, CD, DA, et ad angulos 11.
rectos iuncta, *quadratum* dicitur. At simpliciter *parallelogrammum rectangulum* vocatur, si latera duo opposita et aequalia AD, BC, duobus reliquis aequalibus item et oppositis BA, CD maiora 12.
sint, manentibus tamen angulis rectis.

Def. XVI. Si parallelogrammum sit aequilaterum, 13.
anguli tamen lateribus comprehensi non sint recti; *rhombus* dicitur. At *rhomboides* vocatur, si latera opposita AC, BD, atque AB, DC, aequalia 14
habuerit. Tandem quodlibet quadrilaterum ab iis quae iam enumeravimus, diversum ABCD, *tra-* 16
pezium appellatur.

Fig. *Def. XVII.* Figura *polygona* dicitur, quae pluribus quam quattuor angulis constat, adeoque pluribus quam quattuor lateribus terminatur. Si latera fuerint quinque, dicitur *pentagonum*, uti
29. ADGIL.

Schol. Axiomata et postulata plurima praemittere solent geometrae, quae quidem nos omittimus. ¿Quae enim est axiomatum de toto et parte utilitas, ut intelligamus, dimidiam lineam tota minorem esse? ¿Ecquis statim non videt, rectam lineam produci posse: circulum dato intervallo posse describi, et reliqua huiusmodi? Verum inter axiomata unum de figurarum *superimpositione* legitur, simplicissimum quidem et in universa geometria utilissimum, quod sine aliqua explicatione praetermittere nolumus. Dicunt nempe *ea esse aequalia, quae sibi mutuo superimposita, perfecte congruunt.* Principium illud *superimpositionis* non ita crasse intelligendum est, quasi in mutua figurarum applicatione consisteret, non secus ac artifex mensuram aliquam datae longitudini applicat, ut inde veram longitudinem concludat: talis demonstrandi ratio minime foret geometrica. In eo positum est praedictum principium, ut figuram alteri impositam imaginemur, et deinde concludamus. I.° Ex partium datarum aequalitate ipsum earumdem partium convenientiam sive *coincidentiam.* . . . II.° Ex hac coincidentia ipsam reliquarum partium coincidentiam, ac proinde et perfectam duarum figurarum aequalitatem et similitudinem. Itaque *superimpositionis* principio intelligenda non est dumtaxat mu-

tua figurarum applicatio, sed partis unius alteri Fig.
parti impositio, ut deinde figuras illas inter se comparemus. Vnde evidens est, idem valere principium ad demonstrandam figurarum inaequalitatem. Ceterum hoc unico principio cum angulorum mensura per arcus circulares coniuncto, demonstrari possunt propositiones omnes, quae ad elementarem linearum geometriam pertinent.

SECTIO I.

De geometria linearum.

CAPVT I.

De lineis rectis, quod ad mutuam positionem consideratis, nullum tamen spatium, seu nullam figuram terminantibus.

THEOREMA I.

RECTA QVAELIBET IN RECTAM CADENS, VEL DVOS ANGVLOS EFFICIT RECTOS, VEL DVOBVS RECTIS AEQVALES.

Etenim recta insistat perpendiculariter ut GE 2.
vel oblique ut RE. In primo casu patet (*ex def. IX.*) angulos GEF, GEC esse rectos; in casu altero anguli duo CER, REF simul sumti aequales sunt duobus angulis CEF, GEF, hoc est duobus rectis.

Corol. I. Producta linea RE in O, simili ratione patet, angulos FEO, OEC duobus rectis aequales esse, ac proinde duae rectae sese invicem secantes, efficiunt angulos hinc et inde quattuor rectis aquales. Iam ex centro E describatur circulus: mensura angulorum quattuor erit integra circuli circumferentia, hoc est 360°. Igitur angulus rectus erit quarta pars circumferentiae, nempe 90°.

Corol. II. Rectae GH, RO efficiunt angulos GER, HEO, qui dicuntur *ad verticem oppositi.* Illos autem angulos aequales esse, manifestum est. Quum enim sit dimidium peripheriae RFO aequale dimidio peripheriae GFH; sublata communi parte GO, erunt arcus reliqui GR, HO aequales inter se. *Adeoque et aequales erunt anguli* GER, HEO, *quos praedicti arcus metiuntur.*

Corol. III. Recta GE ad alteram CF perpendicularis est, si puncta duo quaelibet G, E a punctis duobus quibuslibet, ut C, F aequaliter distent, hoc est, si GC = GF et CE = EF. Etenim puncta duo E et G non magis inclinant versus C, quam versus F; ac proinde, quum duo puncta lineae rectae positionem determinent (*cor. I. def. V.*) aequalis est rectae totius GE hinc et inde ad rectam CF inclinatio; ideoque ob angulos utrinque aequales recta GE perpendicularis est ad CF. (*def. IX.*) Patet autem, puncta *c* et *f* sumi posse pro arbitrio inter E et F.

Corol. IV. Ex puncto quolibet E in recta CF dato erigi potest ad eamdem rectam perpendicularis EG. Etenim centro E, et dato quolibet aequali intervallo E*c*, E*f* describantur eodem radio arcus circuli sese invicem secantes in *g*: recta per *g* et E ducta, erit perpendicularis quaesita ob distantias *gc*, *gf* et E*c*, E*f* aequales.

Si punctum *h* extra rectam CF datum sit, simili ratione ducitur *ex puncto* h *ad rectam* CF perpendicularis *h*E. Etenim ex puncto *h tamquam centro, et ope intersectionum, seu arcuum aequali ratio factorum* sumantur aequalia intervalla *hc*, *hf*, deinde ex punctis *c* et *f*, tamquam centris; et eodem intervallo describantur arcus circuli se mutuo secantes in *g*, ducaturque *hg*, haec erit perpendicularis ob aequales *hc*, *hf* et *gc*, *gf* distantias. Evidens autem est, in utroque casu unicam perpendicularem duci posse. Vnica enim est recta transiens per punctum E vel *h*, quae cum recta CF aequales hinc et inde efficiat angulos. Patet autem, lineam perpendicularem esse omnium, quae ex puncto dato ad lineam datam duci possunt, brevissimam; quum recta perpendicularis non magis propendat in unam partem quam in aliam: ac proinde neque ad dexteram declinet, neque ad sinistram, ideoque brevissima est via a puncto dato ad lineam datam. Item evidens est, ex puncto dato ad lineam datam unicam perpendicularem duci posse.

Eadem omnino est operatio, si recta *cf* in duas partes aequales dividenda proponatur. Ex punctis *c* et *f* tamquam centris, et eodem radio describantur arcus circuli, sese secantes in *g*. Deinde ex iisdem punctis, et sumto quolibet eodem intervallo describantur arcus se invicem secantes in *h*, recta *hg* dividet *cf* aequaliter in E, ut pa-

Fig. tet; quum singula puncta rectae *gh* aequaliter distent a punctis *c* et *f*, ac proinde $Ec = Ef$.

THEOREMA II.

3. Si lineae AB, DC sint parallelae, erit: I.° Angulus OFD, qui externus dicitur, aequalis angulo OGB, qui internus et oppositus vocatur: II.° Aequales erunt anguli BGF, GFC, qui dicuntur alterni: III.° Anguli interni, et ad eamdem partem positi DFG, FGB aequales erunt duobus rectis.

Quum lineae parallelae eodem inter se ubique distent intervallo (*ex def. x.*), evidens est, eamdem fore parallelae utriusque BA, DC inclinationem ad rectam EO, ac proinde angulus OFD aequalis est angulo OGB: quod erat primum. Praeterea quum angulus GFC aequetur angulo DFO ad verticem opposito (*corol. II. theor. I.*); erunt etiam aequales anguli BGF, GFC: quod erat secundum. Tandem quum anguli OFD, GFD aequentur duobus rectis (*theor. I.*) aequales itidem erunt duobus rectis DFG, FGB; quod erat tertium.

Versa vice si angulus externus OFD aequalis sit interno et opposito FGB, erit eadem inclinatio rectarum CD, AB ad rectam EO; ac proinde rectae illae parallelae sunt inter se. Rursus si aequales sint anguli alterni BGF, GFC; vel si duobus rectis simul aequales sint interni ad eam-

dem partem positi BGF, GFD; angulus externus DFO semper aequalis erit angulo interno et opposito BGF; ac proinde rectae AB, CD erunt parallelae. Itaque ex ipsa parallelismi notione facile colliguntur tres primariae parallelarum adfectiones, necessario nexu inter se coniunctae ita, ut ex una qualibet inferre liceat, rectas illas esse parallelas. Porro in demonstrandis proprietatibus illis nimis laborare videntur quidam geometrae. Fig.

Corol. I. Si duae rectae AB, HK parallelae sint eidem rectae CD, erunt etiam inter se parallelae. Etenim inclinatio rectarum KH, BA ad rectam EO eadem erit, ac inclinatio rectae CD ad eamdem.

Corol. II. Si per datum punctum F ducere oporteat rectam CD parallelam rectae KH; ex quolibet huius puncto O ducatur recta GFO, et fiat angulus GFD aequalis angulo KOF, descriptis nempe ex punctis O, F, tamquam centris, et eodem radio arcubus aequalibus FM, GN; erit recta FD parallela ipsi KO.

CAPUT II.

De linearum rectarum respectu circuli positione.

THEOREMA I.

Ducta recta FM, ad circumferentiam utrique terminata, quae chorda dicitur, recta EP ex centro circuli ad 4.