Fig. tet; quum singula puncta rectae *gh* aequaliter distent a punctis *c* et *f*, ac proinde $Ec = Ef$.

THEOREMA II.

3. Si lineae AB, DC sint parallelae, erit: I.° Angvlvs OFD, qvi externvs dicitvr, aeqvalis angvlo OGB, qvi internvs et oppositvs vocatvr: II.° AEqvales ervnt angvli BGF, GFC, qvi dicvntvr alterni: III.° Angvli interni, et ad eamdem partem positi DFG, FGB aeqvales ervnt dvobvs rectis.

Quum lineae parallelae eodem inter se ubique distent intervallo (*ex def. x.*), evidens est, eamdem fore parallelae utriusque BA, DC inclinationem ad rectam EO, ac proinde angulus OFD aequalis est angulo OGB: quod erat primum. Praeterea quum angulus GFC aequetur angulo DFO ad verticem opposito (*corol. II. theor. I.*); erunt etiam aequales anguli BGF, GFC: quod erat secundum. Tandem quum anguli OFD, GFD aequentur duobus rectis (*theor. I.*) aequales itidem erunt duobus rectis DFG, FGB; quod erat tertium.

Versa vice si angulus externus OFD aequalis sit interno et opposito FGB, erit eadem inclinatio rectarum CD, AB ad rectam EO; ac proinde rectae illae parallelae sunt inter se. Rursus si aequales sint anguli alterni BGF, GFC; vel si duobus rectis simul aequales sint interni ad eam-

dem partem positi BGF, GFD; angulus externus DFO semper aequalis erit angulo interno et opposito BGF; ac proinde rectae AB, CD erunt parallelae. Itaque ex ipsa parallelismi notione facile colliguntur tres primariae parallelarum adfectiones, necessario nexu inter se coniunctae ita, ut ex una qualibet inferre liceat, rectas illas esse parallelas. Porro in demonstrandis proprietatibus illis nimis laborare videntur quidam geometrae. Fig.

Corol. I. Si duae rectae AB, HK parallelae sint eidem rectae CD, erunt etiam inter se parallelae. Etenim inclinatio rectarum KH, BA ad rectam EO eadem erit, ac inclinatio rectae CD ad eamdem.

Corol. II. Si per datum punctum F ducere oporteat rectam CD parallelam rectae KH; ex quolibet huius puncto O ducatur recta GFO, et fiat angulus GFD aequalis angulo KOF, descriptis nempe ex punctis O, F, tamquam centris, et eodem radio arcubus aequalibus FM, GN; erit recta FD parallela ipsi KO.

CAPVT II.

De linearum rectarum respectu circuli positione.

THEOREMA I.

Dvcta recta FM, ad circvmferentiam vtriqve terminata, qvae chorda dicitvr, recta EP ex centro circvli ad 4.

CHORDAM PERPENDICVLARITER DVCTA, EAMDEM SECAT IN DVAS PARTES AEQVALES.

Quum enim recta EP e centro ducatur; punctum E aequaliter distat a punctis extremis chordae F et M (*ex def. VII. proem.*). Praeterea quum recta EP sit perpendicularis ad chordam, singula alia puncta aequalem habent ab iisdem extremis distantiam (*corol. III. theor. I. cap. I.*). Quare punctum P aequaliter etiam distat a punctis F et M; *adeoque in eo puncto chorda* FM *in duas aequales partes secatur.*

Et versa vice recta quaelibet EP per centrum transiens, et chordam FM aequaliter dividens, eam quoque perpendicularis secat. Etenim quum recta EP chordam dividat aequaliter, punctum P aequaliter distat ab extremis F et M. Quia vero recta EP transit etiam per centrum; punctum E aequaliter distat ab extremis F et M. Quare puncta P et E aequaliter distat a punctis F et M; ac proinde EP perpendicularis est ad FM (*corol. III. theor. I. cap. I.*).

Rursus si recta EP perpendicularis sit ad chordam, eamque aequaliter dividat, recta illa transit per centrum. Quum enim chordam dividat aequaliter; punctum P aequaliter distat ab extremis F et M. Praeterea quum sit perpendicularis, singula illius puncta aequaliter etiam distant a punctis F et M. Erit ergo centrum E huius perpendicularis punctum aliquod.

THEOREMA II.

SI RECTA EH TRANSIENS PER CENTRVM DIVIDAT AEQVALITER CHORDAM FM, AEQVALITER QVOQVE DIVIDET ARCVM FHM.

Etenim quum singula puncta rectae EH aequaliter distent a punctis F et M; aequalis erit puncti H ac extremis F et M distantia. Iam si semicirculus GMH semicirculo GFH imponatur, congruent *duo semicirculi*, *adeoque et semiperipheria* GMH *congruet cum semiperipheria* GFH, et punctum M cum puncto F, *igitur arcus* MH *aequalis erit arcui* FH. *Deinde* ob punctum H commune congruent et chordae HM, FH, *quae sunt punctorum F et M a puncto H distantiae.*

Corol. I. In eodem circulo vel in circulis aequalibus, chordae aequales aequalibus arcubus respondent; inaequales autem, arcubus inaequalibus. Praeterea chordae aequales aequaliter distant a centro, chordae autem inaequales distant inaequaliter. Quod evidens est, ex *superimpositionis* principio. Nam chorda aequalis cum aequali chorda semper congruet, nec cum chorda inaequali congruere umquam poterit.

Corol. II. In eodem semicirculo vel in semicirculis aequalibus, quo maiores sunt vel minores arcus, eo maiores vel minores sunt chordae, et centro magis vel minus proximae. Vice versa quo maiores sunt vel minores chordae, et centro magis vel minus proximae, eo etiam maiores sunt vel minores arcus subtensi.

Fig. *Corol. III.* Ducta chorda FM diametro AB parallela intercipit aequales arcus AF et BM. Etenim, ceteris manentibus ut antea, arcus AH = arcui BH, et arcus FH = arcui HM: quare demtis arcubus aequalibus, remanet AF = BM. Evidens est eamdem esse demonstrationem, si parallela NQ ad oppositas diametri partes iaceat; erit nempe arcus FN arcui MQ.

Defin. Si ponatur, rectam NQ motu sibi semper parallelo a centro recedere, donec puncta duo N et Q coëant in G; chorda NQ abit in *tangentem*, quae nempe circulum in unico puncto tangit; evidens autem est, in hoc etiam casu esse GN=GQ. *Hoc est, chorda tangenti parallela intercipit arcus hinc et inde aequales.*

PROBLEMA I.

Ex corollariis praecedentibus patet, qua
10. ratione per tria data puncta circulus describi possit.

Dummodo tamen puncta illa in eadem recta non iaceant. Agantur rectae duae AB, BC, quae iungant tria puncta data A, B, C, hae erunt chordae circuli quaesiti. Quare ductis perpendicularibus DE, FG, quae chordas dividant aequaliter, utraque perpendicularis transit per centrum H; quod proinde erit in communi utriusque perpendicularis intersectione. *Itaque ex H tamquam centro et distantia ex eo ad quodlibet datum punctum, tamquam radio, describatur circulus, qui per tria data puncta transibit.* Simili ratione, dato circuli arcu, centrum invenitur, totaque circumferentia describitur.

Corol. Hinc arcus circuli datus in duos aequales arcus dividi potest. Ducatur enim chorda, arcum datum subtendens, haecque aequaliter per rectam perpendicularem dividatur; eadem perpendicularis etiam angulum, quem arcus metitur, aequaliter in duas partes dividet.

Schol. Ex hoc corollario patet, facile dividi posse angulum quemlibet in partes 2, 4, 8, 16, 32, et ita deinceps, secundum terminos progressionis geometriae duplae. Sed per geometriam elementarem angulos in tres partes aequales dividi non potest. Atque haec est anguli *trisectio* a geometris per *circinum* et *regulam*, ut dicunt, hoc est, per lineae rectae et circuli constructionem frustra quaesita. Demonstrant enim geometrae, problema illud ad tertii gradus aequationem necessario pertinere, quae quidem aequationes per solum circulum construi non possunt. Neque ob eamdem rationem per sola geometriae elementa angulus dividi potest in partes 5, 6, 7, 9, cet. Talis enim divisio pro diverso partium aequalium numero ad alteriores aequationem gradus adsurgit. Id autem, quamvis ad elementa non pertineat, breviter monuisse voluimus.

THEOREMA III.

Radius EG in puncto contactus G ad tangentem RT perpendicularis est.

Etenim quoniam tangens circulum in unico

Fig. 4. puncto tangit (*ex def. ad theor. II.*), radius EG minima est tangentis a centro distantia, *quodlibet enim aliud tangentis punctum extra circulum cadit, unde eius a centro* E *distantia maior erit quam radius, adeoque maior quam* EG. Proinde radius EG ad tangentem RT in puncto contactus G perpendicularis est (*corol. IV. theorema I cap. I.*)

Versa vice recta RT perpendicularis ad extremitatem radii G circulum tangit in unico puncto G. Etenim quum sit EG minima rectae RT a centro E distantia, alia quaelibet puncta rectae RT magis distant a centro, quam punctum G, ergo singula puncta praeter G extra circumferentiam iacent, ac proinde recta RT tangens est.

Corol. I. Recta RT circumferentiam tangit in unico puncto, quum ex centro E ad rectam datam unica perpendicularis duci possit (*corol. IV. theor. I. cap. I.*)

Corol. II. Hinc facile ducitur tangens ad punctum datum G. Ducto scilicet radio EG, erectaque in G perpendiculari RT.

Corol. III. Ad punctum datum in circumferentia unica tangens duci potest (*loc. cit.*); ac proinde si per punctum contactus agatur recta quaelibet, haec coincidit cum tangente, vel circumferentiam secat.

Corol. IV Si duo circuli GNA, GOQ eamdem habeant tangentem; recta HG eidem perpendicularis per utriusque centrum, puta E et P, transibit. Iam vero si ducatur ES, iungaturque PS, quae producta secabit in O circulum GOQ, et

in R tangentem RT; erit semper in triangulo ESP latus SP minus duobus reliquis ES, EP (*ex def. lineae rectae*). Quare quum radii ES, EG aequales sint, erit recta PS minor quam PG, sive PO. Ergo quodlibet punctum S circuli GSF erit intra circulum GOQ; ac propterea illi circuli se mutuo contingent in unico puncto G, in quo scilicet rectam RT tangunt.

Schol. Quum inter tangentem et circulum nulla duci possit linea recta, angulus, quem arcus circuli efficit cum tangente, minor est quolibet rectilineo, licet hic in infinitum minuatur. Huius propositionis utilitas est in physica, ubi agitur de divisibilitate in infinitum. Id vero maximam admirationem concertationesque maximas excitavit: nempe angulus contactus, quem fecit arcus cum tangente, ab infinita circulorum serie in infinitas partes dividitur, licet ipse quovis angulo rectilineo minor sit. Huius autem paradoxi geometrici causam inde repetunt nonnulli, quod nempe anguli rectilinei natura diversa omnino sit a natura anguli curvilinei in puncto contactus. Etenim quemadmodum infinitae lineae numquam superficiem efficiunt, nec ulla inter has quantitates ratio potest adsignari, licet in partes infinitas dividi possint; ita etiam infiniti anguli contactus quovis rectilineo minores sunt, licet sint divisibiles in infinitum. Verum in hac lite geometrica *logomachia* aliqua latere videtur. Si anguli nomine intelligatur portio finita spatii curva et tangente comprehensi; nullum dubium est, quin spatium illud comparari possit cum portio-ne finita spatii rectarum duarum concursu intercepti. At si anguli rectilinei notio vulgaris adhibeatur, evidens est, notionem illam absolute consideratam angulo contactus convenire non posse, quum in hoc angulo latus unum sit curvilineum. Itaque huius anguli adferri debet propria definitio, atque hac definitione, quae arbitraria omnino est, semel constituta et explicata, iam nihil difficultatis superesse potest. Et re quidem ipsa de solo nomine heic litigari, demonstrat summa geometrarum consensio circa anguli huius proprietates. Sed quidquid sit, quicumque geometricarum demonstrationum vim percipiet, pro evidenti habebit, angulum contactus, et minorem esse quovis rectilineo, et in infinitos curvilineos dividi posse *.

* *Quaestionem de natura anguli contactus, quam innuimus adnotatione in prooemio geom. fusiori calamo persequitur heic Auctor. Sed ne adolescentes in re, quae magni momenti est in physicae studio, logomachia laborent; amabo, sequentia perpendant. Circulus est linea curva, cuius proinde partes infinitesimae sunt rectae. Est proinde in circulo recta quaedam infinite parva cum tangente omni ex parte congruens: huic circuli lineolae proxima est alia cum priori ad angulum iuncta quae proinde etiam angulum faciet cum tangente. Hic est igitur proprie angulus contactus, nempe, qui efformatur ab hac secunda lineola cum tangente: idem profecto exstitutus, si lineola isthae protenderetur, usque dum foret finita. Quapropter angulus contactus proprie rectilineus est, non vero a rectilineo natura diversus, ut aliqui contendunt. Porro angulus ille est infinitesimus, seu quod idem est, habet pro mensura arcum infinitesimum secundi ordinis divisum per radiolum seu lineolam infinitesimam primi ordinis. Si crus anguli infinitesimum in infinitum protendatur, angulus non variabit. Tunc autem erit illius mensura arcus infinitesimus primi ordinis, divisus per lineam seu radium finitum, atque ita deinceps eo pacto, ut arcus uno infinitorum ordine inferior sit radio suo. Ex his autem nullo negotio intelligitur, angulum contactus, quum minor sit quolibet finito, posse esse maiorem minoremve; quantitas enim infinitessima intra ordinem suum augmenti et decrementi capax est; etsi ipsa nulla sit, si cum finita comparetur.*

THEOREMA IV.

ANGVLVS BAD TANGENTE BA, ET CHORDA AD COMPREHENSVS HABET PRO MENSVRA DIMIDIVM ARCVM AFD.

Etenim ducta per centum C diametro EG chordae AD parallela, ductaque alia diametro fF eidem chordae perpendiculari; rectus erit angulus BAC tangente et radio comprehensus (*theor. prae.*), itemque rectus est angulus FCG, ac proinde utriusque anguli mensura est arcus FG. Sed angulus $BAD = ABC - DAC$, *ergo quum angulus* DAC

Fig. *aequalis sit angulo* ACG *ob parallelas* AD, GE (theor. I. cap. I.) *erit etiam angulus* $BAD = FCG - ACG = FCA$. *Quare habebit pro mensura arcum* FA, *qui dimidius est integri arcus* AD (theor. II. cap. II.).

THEOREMA V.

6. (Angulus CAD ad circumferentiam habet pro mensura dimidium arcum CD lateribus AC et AD interceptum.)

Etenim ex anguli vertice A ducatur tangens EB. Summa trium angulorum $BAC + CAD + DAE = 180°$ (*theor. I. cap. I.*) $= \frac{1}{2}AC + \frac{1}{2}CD + \frac{1}{2}DA$. Sed angulum BAC metitur $\frac{1}{2}AC$, et angulum EAD metitur $\frac{1}{2}AD$ (*ex theor. praeced.*) ergo angu-
A lus CBD metietur etiam $\frac{1}{2}CD$.

Corol. I. Angulus DFC ad centrum duplus est anguli DAC ad circumferentiam eodem arcu CD subtensi. *Etenim illius mensura dupla est, seu integer arcus* CD.

Corol. II. Angulus rectus, *cuius vertex est* in circumferentia circuli, semicircumferentiam lateribus suis comprehendit, totaque diametro subtenditur. Angulus acutus arcum semicircumferentia minorem, obtusus autem maiorem intercipit: uterque chorda subtenditur. *Atque versa vice: angulus, cuius vertix est in circumferentia circuli rectus est, si eius crura semicircumferentiam comprehendant, seu diametro subtendantur: acutus, si arcum semiperipheria minorem, et obtusus, si*

semicircumferentia maiorem comprehendant. Fig.

Corol. III. Angulus BAD vel intra vel extra 7.
circulum pro mensura habet $\frac{1}{2}BD + \frac{1}{2}CE$ pro an- 19.
gulo intra circulum, vel $\frac{1}{2}BD - \frac{1}{2}EC$ pro angulo extra illum. Per E agatur chorda EF rectae AD parallela; erit angulus $BEF = BAD$ (ob parallelas). Sed mensura anguli BEF est $\frac{1}{2}BF$, et $\frac{1}{2}BF = \frac{1}{2}BD + \frac{1}{2}DF$. (*In angulo intra circulum* (fig. 7.) B *et* $\frac{1}{2}BF = \frac{1}{2}BD - \frac{1}{2}DF$, *in angulo extra circulum* (fig. 19.) et $DF = CE$ (*cor. III. theor. II.*). Ergo $\frac{1}{2}BF = \frac{1}{2}BD + \frac{1}{2}CE$. (*In angulo intra circulum, et* $\frac{1}{2}BF = \frac{1}{2}BD - \frac{1}{2}CE$ *in angulo, cuius vertex extra circulum cadat*).

Corol. IV. Angulus *b*AD tangente A*b* et se- 19.
cante AD interceptus $= \frac{1}{2}Db - \frac{1}{2}bC$. Si enim circa punctum A revolvi intelligatur recta AB, donec tangens evadat in *b*, puncta *b* et B convenient in *b*. Simili ratione angulus *d*A*b* inter duas tangentes A*d* et A*b* comprehensus pro mensura habet $\frac{1}{2}dFb - \frac{1}{2}dCb$. *Itaque eadem omnino demonstratio in his casibus locum tenet, quae in corollario praecedenti.*

CAPUT III.

De lineis rectis, quae spatium claudunt, seu de figurarum rectilinearum proprietatibus.

THEOREMA I.

(In triangulo quolibet summa trium angulorum aequalis est duobus rectis.)