Fig. *aequalis sit angulo* ACG *ob parallelas* AD, GE (theor. I. cap. I.) *erit etiam angulus* BAD=FCG—ACG=FCA. *Quare habebit pro mensura arcum* FA, *qui dimidius est integri arcus* AD (theor. II. cap. II.).

THEOREMA V.

6. (ANGVLVS CAD AD CIRCVMFERENTIAM HABET PRO MENSVRA DIMIDIVM ARCVM CD LATERIBVS AC ET AD INTERCEPTVM.)

Etenim ex anguli vertice A ducatur tangens EB. Summa trium angulorum BAC+CAD+DAE=180° (*theor. I. cap. I.*) $=\frac{1}{2}$AC$+\frac{1}{2}$CD$+\frac{1}{2}$DA. Sed angulum BAC metitur $\frac{1}{2}$ AC, et angulum EAD metitur $\frac{1}{2}$ AD (*ex theor. praeced.*) ergo angulus CBD metietur etiam $\frac{1}{2}$ CD.

A

Corol. I. Angulus DFC ad centrum duplus est anguli DAC ad circumferentiam eodem arcu CD subtensi. *Etenim illius mensura dupla est, seu integer arcus* CD.

Corol. II. Angulus rectus, *cuius vertex est* in circumferentia circuli, semicircumferentiam lateribus suis comprehendit, totaque diametro subtenditur. Angulus acutus arcum semicircumferentia minorem, obtusus autem maiorem intercipit: uterque chorda subtenditur. *Atque versa vice: angulus, cuius vertix est in circumferentia circuli rectus est, si eius crura semicircumferentiam comprehendant, seu diametro subtendantur: acutus, si arcum semiperipheria minorem, et obtúsus, si semicircumferentia maiorem comprehendant.* Fig.

Corol. III. Angulus BAD vel intra vel extra circulum pro mensura habet $\frac{1}{2}$BD$+\frac{1}{2}$CE pro angulo intra circulum, vel $\frac{1}{2}$BD$-\frac{1}{2}$EC pro angulo extra illum. Per E agatur chorda EF rectae AD parallela; erit angulus BEF=BAD (ob parallelas). Sed mensura anguli BEF est $\frac{1}{2}$BF, et $\frac{1}{2}$BF$=\frac{1}{2}$BD$+\frac{1}{2}$DF. (*In angulo intra circulum* (fig. 7.) *et* $\frac{1}{2}$BF$=\frac{1}{2}$BD$-\frac{1}{2}$DF, *in angulo extra circulum* (fig. 19.) et DF=CE (*cor. III. theor. II.*). Ergo $\frac{1}{2}$BF$=\frac{1}{2}$BD$+\frac{1}{2}$CE. (*In angulo intra circulum, et* $\frac{1}{2}$BF$=\frac{1}{2}$BD$-\frac{1}{2}$CE *in angulo, cuius vertex extra circulum cadat*). 7. 19.

B

Corol. IV. Angulus bAD tangente Ab et secante AD interceptus $=\frac{1}{2}$D$b-\frac{1}{2}b$C. Si enim circa punctum A revolvi intelligatur recta AB, donec tangens evadat in b, puncta b et B convenient in b. Simili ratione angulus dAb inter duas tangentes Ad et Ab comprehensus pro mensura habet $\frac{1}{2}d$F$b-\frac{1}{2}d$Cb. *Itaque eadem omnino demonstratio in his casibus locum tenet, quae in corollario praecedenti.* 19.

CAPVT III.

De lineis rectis, quae spatium claudunt, seu de figurarum rectilinearum proprietatibus.

THEOREMA I.

(IN TRIANGVLO QVOLIBET SVMMA TRIVM ANGVLORVM AEQVALIS EST DVOBVS RECTIS.)

Fig. Etenim per tres angulorum vertices describa-
10. tur circulus ABC (*probl. I. cap. II.*), triangulum erit inscriptum circulo, cuius chordae erunt tria latera AB, BC, CA. Anguli autem habent pro mensura dimidium arcum lateribus oppositis subtensum (*theor. V. cap. II.*). Quare trium angulorum summa aequalis est dimidiae trium arcuum summae, hoc est, dimidiae circumferentiae, seu 180°.

Corol. I. In triangulo unicus esse potest angulus rectus vel obtusus, reliqui duo sunt acuti. Quare in triangulo rectangulo angulus acutus est *complementum* alterius *acuti* ad rectum.

Corol. II. Datis duobus angulis in triangulo, datur et tertius, qui est differentia inter datam duorum angulorum summam, et 180°. Si autem unicus datus sit angulus, data est reliquorum duorum summa, quae est *complementum* ad duos rectos, et *supplementum* simpliciter appellari solet. *Complementum enim proprie dicitur ad unum rectum.*

15. *Corol. III.* In triangulo quolibet ABC producto latere CB in I, angulus externus ABI aequalis est duobus angulis internis oppositis ACB, CAB. Etenim summa anguli externi ABI, et interni contigui ABC aequalis est duobus rectis (*theor. I. cap. I.*); sed summa trium angulorum ACB, CAB, ABC aequalis etiam est duobus rectis; ergo angulus externus ABI aequalis est duobus internis oppositis ACB, et CAB, demto scilicet communi angulo ABC.

Fig.

THEOREMA II.

(IN OMNI TRIANGVLO MAIVS LATVS OPPONITVR MAIORI ANGVLO, MINVS AVTEM MINORI: ET VICE VERSA ANGVLVS MAIOR MAIORI LATERI, ET MINOR MINORI OPPONITVR.)

Triangulum circulo inscribatur, maiorem angulum metitur arcus maior, et maiorem arcum subtendit maior chorda, et contra (*probl. I. cap. I.*).

Corol. I. In triangulo aequilatero singuli anguli aequales sunt inter se, et vice versa si tres anguli sunt aequales inter se, triangulum est aequilaterum. Inscripto enim, ut antea, triangulo in circulo, tria latera aequalia AB, BC, CA sunt 10.
tres aequales circuli chordae, quae proinde tres arcus aequales subtendent, ideoque et tres anguli aequales sunt (*theor. V. cap. II.*). Evidens autem est, unumquemque angulum esse tertiam partem 180°, hoc est, 60°.

Corol. II. In triangulo isoscele aequales sunt anguli lateribus aequalibus oppositi *seu anguli ad basim;* et contra si duo anguli *ad basim* in triangulo aequales sunt, triangulum est isosceles. Patet, ut in corol. praec.

THEOREMA III.

(SI IN DVOBVS TRIANGVLIS TRIA LATERA AEQVALIA SINT, TOTA TRIANGVLA ERVNT AEQVALIA.)

Sit AB = *ab*, AC = *ac*, BC = *bc*. Ex 17.

punctis A et B tamquam centris, describantur arcus FCG, DCE se invicem secantes in C. Triangulum *abc* ita imponatur triangulo ABC, ut punctum A conveniat cum *a*, punctum *b* cadet etiam in B, ob $AB = ab$, et ob $ac = AC$, recta *ac* terminabitur in aliquo puncto arcus FCG. Similiter ob $bc = BC$ recta *bc* terminabitur in aliquo puncto arcus DCE Quia vero rectae *ac*, *bc in unico puncto coniungi debent; punctum istud necessario esse debet illud*, *quod sit utrique arcui commune*, *ac proinde* utraque terminabitur in puncto intersectionis C. Ergo *ac* congruet cum AC, *bc* cum BC totumque triangulum *abc* cum triangulo ABC.

Corol. I. Si sit angulus $A = a$, $B = b$, et latus $AB = ab$; erit triangulum $ABC =$ triangulo *abc*. Latus *ab* imponatur lateri AB; ob angulum $a = A$, et $b = B$, cadet latus *ac* in latus AC, et latus *bc* in latus *bc* in BC; quare latera duo *ac* et AC, *bc* et BC in eodem puncto iungentur, hoc est, *c* cadet in C, totumque triangulum *abc* congruet cum triangulo ABC, *ac proinde aequalia erunt.* (Latera duo *ac* et AC, *atque etiam bc et* BC, quae *opponuntur* angulis aequalibus *b* et B, *c* et C dicuntur *homologa.*) Quare aequalia sunt triangula duo, si anguli unius aequales sint angulis alterius; et praeterea si triangula latus unum aequale habeant.

Corol. II. Si duo triangula latera duo habuerint aequalia, et angulum his lateribus interceptum aequalem, tota triangula erunt aequalia. Sit $AC = ac$, $AB = ab$, et angulus $A = a$. Imponatur latus AB lateri *ab*, et latus AC lateri *ac*: ob angulum A et *a* aequalem, latera illa congruent. Praeterea quum sit $AC = ac$, et $AB = ab$, punctum *c* cadet in C, et *b* in B; ac proinde *bc* congruet cum BC; *quum inter duo puncta aequaliter distantia non nisi unica et eadem linea cadere possit.*

Fig.

THEOREMA IV.

SI DVO TRIANGVLA INAEQVALIA AEQVALES HABENT ANGVLOS, PONATVRQVE ANGVLVS VNVS SVPRA ALTERVM AEQVALEM ANGVLVM, ITEMQVE SIBI MVTVO IMPONANVR DVO LATERA HOMOLOGA *, ERIT TERTIVM LATVS TERTIO LATERI PARALLELVM.

Ponatur angulus D supra angulum aequalem B, 18.
latus DF supra latus homologum BC, et latus DE supra latus BA itidem homologum; erit latus FE, vel *fe* parallelum lateri AC. Quum enim angulus *fe*B aequalis sit angulo CAB, erit recta *fe* rectae AC parallela (*theor. II. cap. I.*). Si angu-

* *Latera homologa in triangulis dicuntur, quae aequalibus angulis ad se invicem opponuntur, sive ea fuerit aequalia sive inaequalia. Et universim dimensiones homologae in figuris appellantur eae, que sunt eiusdem denominationis, seu quae in cunctis eodem modo generantur. E. g. in circulo radii, diametri, circumferentiae, arcus eorumdem graduum, eorumque chordae.*

Fig. lus F poneretur supra angulum aequalem C; simili modo demonstratur, rectam DE esse rectae AB parallelam. Idem dicendum de rectis FD et BC.

Vice versa si per punctum *f* pro arbitrio sumtum in latere trianguli agatur recta *fe* parallela rectae AC, aequales sunt anguli B*fe*, BCA, et B*ef*, BAC (*loc. cit.*).

Definit. Triangula illa, quae angulos habent respective aequales, dicuntur *similia.*

THEOREMA V.

28. QVODLIBET POLYGONVM ABDEFGA RESOLVI POTEST IN TOT TRIANGVLA, QVOT SVNT POLYGONI LATERA.

Etenim ex puncto C intra polygonum ad singulos angulos duci possunt rectae. Evidens autem est, tot esse triangula ABC, BCD, DCE, ECF, FCG, GCA, quod polygoni latera AB, BD, DE, EF, GF, GA.

30. Alia ratione in triangula dividi possunt polygona: si nempe ex polygoni angulis A, C, D, atque F, H, I, ducantur tot rectae AC, AD vel FH, FI, quot duci possunt, quae tamen se mutuo non secent. Illae autem rectae, quae ab angulo polygoni ad alium ducuntur, *diagonales* vocantur. Patet, in hoc casu tot esse triangula quot latera polygoni, demtis duobus.

Corol. I. Summa angulorun polygoni aequalis est producto ex 180°. In numerum laterum,

demtis 360°. Etenim anguli polygoni simul sumti Fig.
aequales sunt angulis omnibus triangulorum, in
quae reductum est polygonum, demtis angu-
lis, quorum vertex est in C. Sed tot sunt 28.
triangula, quot latera; quare summa omnium 29.
angulorum polygoni aequalis est producto ex 180° in numerum laterum. *Ad vero anguli effformati circa centrum ad polygonum non pertinent. Est autem illorum summa* 360°. (theorem. I. cap. V.) *Quare ex priori summa haec subtrahi debet.* Ita si polygonum habuerit septem latera, summa angulorum est $= 180° \times 7 - 360° = 900°$.

Idem omnino valor angulorum polygoni eruitur, si polygonum per diagonales in triangula 30.
dividatur. Erit nempe praedicta summa aequalis producto 180° *in numerum laterum, demtis duobus. Etenim polygonum per diagonales in tot triangula resolvitur, quot sunt latera, demtis duobus. Quare summa illa aequalis erit producto ex* 180° *in numerum triangulorum, hoc est, in numerum laterum polygoni, demtis duobus. Ita summa angulorum heptagoni erit*

$$= 180° \times \overline{7 - 2} = 180° \times 5 = 900°.$$

Corol. II. Polygonum quodlibet regulare circulo inscribi potest. Dividantur in duas partes
aequales anguli polygoni per rectas AC, BC, DC, 28.
EC cet. rectae illae se mutuo secabunt in C, et erunt inter se aequales. Etenim rectae AC et BC sibi occurrentes in puncto aliquo C, efficiunt triangulum ACB; itemque rectae BC et DC aliud

Fig. efformant triangulum BCD. Sed triangula illa sunt aequalia: nam quum anguli polygoni regularis aequales sint, et bifariam aequaliter dividantur, aequales sunt anguli CAB, CBA inter se, et angulis CBD, CDB. Praeterea aequalia sunt latera AB, BD; ergo isoscelia sunt et aequalia triangula ACB, BCD (*corol. II. theor. III.*). Quare AC = DC = BC; et propter latus commune BC punctum intersectionis C rectarum AC, BC cadet in punctum intersectionis C rectarum BC, DC. Idem valet de aliis rectis EC, FC. *Quare punctum commune intersectionis omnium linearum aequaliter distat a punctis* A, B, D, E, F, G; *adeoque ex eo puncto describi potest circulus, qui per alia omnia pertranseat. Punctum illud dicitur centrum polygoni.*

Corol. III. Radii e centro polygoni regularis ad angulos ducti, polygonum dividunt in tot
28. triangula isoscelia et aequalia, quot sunt polygoni latera; et quodlibet polygoni latus fit chorda arcus, qui aequalis est quotu ex 360 per nu-
29. merum laterum divisis. Ita latus decagoni est arcus $\frac{360^\circ}{10} = 36^\circ$.

28. *Corol. IV.* Latus hexagoni regularis ABDEFG circulo inscripti aequale est circuli radio. Nam si ex centro C in sex triangula dividatur hexagonum *erit angulus* ACB = 60°, *adeoque summa duorum reliquorum* ABC, CAB = 120° (theor. I. cap. III.) *At vero triangula illa sunt isoscelia* (cor. praec.) *ac proinde anguli* ABC, CAB *aequales sunt* (corol. II. theor. II. cap. III.) *Igitur* Fig.
quilibet angulus $= \frac{120^\circ}{2} = 60^\circ$. *Quare singuli anguli sunt* 60°, *et triangula sunt aequilatera* (corol. I. theor. II. cap. III.) *ac proinde* CA = AB.

Corol. V. Quodlibet polygonum regulare circulo circumscribi potest, hoc est, intra polygonum regulare describi potest circulus, qui singula tangat polygoni latera. Etenim quum latera polygoni regularis circulo inscripti totidem sint chordae aequales, chordae illae a centro aequaliter distant (*cor. I. theor. II. cap. II.*). Quare si ex centro C agantur perpendiculares CI, CK, 28.
hae chordas aequaliter divident, atque aequales erunt. Ergo per singulas perpendicularium extremitates describi poterit circulus, qui singula polygoni latera in puncto medio tanget (*corol. I. theor. III. cap. II.*).

Corol. VI. Hinc polygono regulari dato circulus circumscribi potest. Quaeratur polygoni centrum (*corol. II.*): quo invento, circulus facile ciscumscribitur. Item polygono regulari circulus facile inscribitur invento polygoni centro: ad latus aliquod demittatur perpendicularis, haec erit circuli radius.

Versa vice polygonum regulare circulo dato circumscribi potest. Dividantur 360° per duplum numerum laterum polygoni, sumtoque arcu *i*K, 28.
qui sit quoto aequalis, per extremitates K et *i* ducantur radii CK et C*i*, agaturque recta indeterminata CB: ad punctum K erigatur perpen-

dicularis DKB, occurrens CB in puncto B: transferatur KB in KD; erit BD latus polygoni quaesiti. Simili modo inveniuntur alia latera. Vel etiam ratio CB describatur circulus, et per totam circumferentiam transferatur chorda DB, atque inscribatur polygonum DBAGFE, quod erit circulo dato circumscriptum, ut patet; quum per constructionem tot habeantur tangentes aequales, et aequaliter divisae in puncto contactus, quot sunt latera in polygoni quaesito.

Simili constructione, circulo dato polygonum regulare inscribitur. Dividatur numerus 360° per numerum laterum polygoni quaesiti: sumatur in circulo dato arcus huic quoto aequalis; chorda huius arcus erit latus polygoni: transferatur chorda illa per totam circumferentiam, habebitur polygonum quaesitum.

Heic autem diligenter observandum est, per geometriam elementarem circulo inscribi posse dumtaxat triangulum aequilaterum, quadratum, pentagonum, pentedecagonum, hoc est, figuram quindecim laterum, et polygona regularia, in quibus numerus laterum se habet ad praedicta in progressione geometrica dupla. Ita triangulum aequilaterum praebet polygona regularia laterum 6, 12, 24, 48 cet. quadratum praebet polygona laterum 8, 16, 32, 64 cet. Ex pentagono oriuntur polygona laterum 10, 20, 40, 80 cet. Tandem ex pentedecagono oriuntur polygona laterum 30, 60, 120, 240 cet. Alia polygona, ut heptagonum, enneagonum, endecagonum cet. describi non possunt geometrice, nisi per constructionem aequationem, quae ad sublimiorem gradum adsurgunt.

Schol. Quum polygonum regulare circulo inscribi et circumscribi possit, quo maior est in polygono inscripto vel circumscripto laterum numerus, eo magis polygonum ad circulum accedit. Itaque augeatur numerus laterum polygoni in infinitum ita, ut differentia inter polygonum et circulum sit data quavis differentia minor; iam circulus considerari potest tamquam polygonum regulare, ex lateribus numero infinitis et infinite parvis compositum. Haec circuli consideratio pendet ex principio omnino evidenti. Si nempe duarum quantitatum A et B differentia sit qualibet adsignabili minor, quantitates illae velut aequales haberi debent. Etenim ponatur inter illas quantitates differentia aliqua data, iam quantitatum illarum differentia non est qualibet adsignabili minor, quod est contra hyp. Quantitas autem, quae ad aliam accedit pro differentia qualibet data minori, huius alterius quantitatis limes appellatur. Methodus autem illa vocatur methodus *exhaustionum*, seu *primarium* et *ultimarum* rationum. Hanc methodum, quam fusius explicabimus in prima parte physices, ubi sermo erit de extensionis divisibilitate, in proximo capite, quantum hactenus nobis satis est, breviter exponemus.

CAPVT IV.

De linearum ratione, seu de lineis proportionalibus.

THEOREMA I.

21. IN TRIANGVLIS SIMILIBVS acb, ACB LATERA HOMOLOGA SVNT PROPORTIONALIA.

Ponatur ab pars dimidia rectae AB; nempe sit Ab aequalis rectae ab, agaturque cb parallela CB, et cg parallela rectae AB; erit $cg=bA$. Quod evidens est ex linearum parallelismo. Ducta enim linea bg, erit ob angulos inter parallelas aequales, et ob latus communi bg, triangulum bcg aequale triangulo bgB et latus $cg=bB$ (*cor. I. theor. III. cap. praec.*). Ergo $cg=bB=Ab$. Praeterea triangulum Ccg aequale est triangulo cAb (*loc. cit.*). Ergo $Cc=Ac$, et $Cg=cb=gB$. Quare Ac, vel Cc erit pars dimidia rectae AC, sicut cb est pars dimidia rectae CB. *Erit igitur* $ac : AC=ab : AB$.

22. Si ab sit tertia vel quarta, aut quaelibet alia pars rectae AB, simili modo evidens est, rectas ac et cb esse tertiam, quartam cet. partem rectarum AC, CB. Etenim ex divisionum punctis b, f in recta AB ducantur bc, fh cet. rectae BC parallelae, et eadem ratiocinatione patet, triangula Acb, chg, hCi cet. aequalia esse *inter se, adeoque et aequalia triangulo acb. Igitur latus*

$Ac=ch=hC$, *atque etiam latus* $Ab=bf=fB$: *si igitur in triangulo abc latus ab sit tertia vel quarta, vel quaelibet pars lateris* AB, *etiam ac erit tertia vel quarta cet. pars lateris* AC. *Proindeque erit* $ab : AB=ac : AC$.

Si recta ab accurate non contineatur in AB, sed cum fractione aliqua, e. g. bis cum dimidio; simili ratione ac bis cum dimidio continebitur in AC, et bc in BC. Etenim factis duobus triangulis Acb, chg aequalibus triangulo acb, inter parallelas hf et CB construi poterit triangulum hCi, cuius latera erunt dimidia pars laterum trianguli cAb; quod est evidens, quum sit fB pars dimidia rectae Ab (*per hyp.*), et recta ih aequalis rectae fB ob parallelas hf et CB. *Et generatim triangula quaelibet similia habent latera homologa proportionalia.*

Corol. Si in triangulo ACB *ducantur parallelae ad basim hi, cm; numerus partium interceptarum a linea hi in lateribus* AC, CB, *erit, ut quilibet alius numerus partium inter duas parallelas hi, cm interceptarum, atque numerus partium erit etiam, ut latera trianguli. Hoc est*: $Ch : Ci = hc : im = CA : CB$. *Etenim* (ex demonstr.) $Ch : Ci = hc : im = cA : mB$. *Ergo* (§. V. cap. VI. arith. et alg.) $Ch + hc + cA : Ch = Ci + im + mB : Ci = hc : im$. *Sed quod idem est* $CA : CB = Ch : Ci = hc : im$. *Quare* CA *est ad* CB, *ut numerus quilibet partium interceptarum in* CA *ad numerum interceptarum partium in* CB.