CAPVT IV.

De linearum ratione, seu de lineis proportionalibus.

THEOREMA I.

21. IN TRIANGVLIS SIMILIBVS acb, ACB LATERA HOMOLOGA SVNT PROPORTIONALIA.

Ponatur ab pars dimidia rectae AB; nempe sit Ab aequalis rectae ab, agaturque cb parallela CB, et cg parallela rectae AB; erit $cg = bA$. Quod evidens est ex linearum parallelismo. Ducta enim linea bg, erit ob angulos inter parallelas aequales, et ob latus communi bg, triangulum bcg aequale triangulo bgB et latus $cg = bB$ (*cor. I. theor. III. cap. praec.*). Ergo $cg = bB = Ab$. Praeterea triangulum Ccg aequale est triangulo cAb (*loc. cit.*). Ergo $Cc = Ac$, et $Cg = cb = gB$. Quare Ac, vel Cc erit pars dimidia rectae AC, sicut cb est pars dimidia rectae CB. *Erit igitur* $ac : AC = ab : AB$.

22. Si ab sit tertia vel quarta, aut quaelibet alia pars rectae AB, simili modo evidens est, rectas ac et cb esse tertiam, quartam cet. partem rectarum AC, CB. Etenim ex divisionum punctis b, f in recta AB ducantur bc, fh cet. rectae BC parallelae, et eadem ratiocinatione patet, triangula Acb, chg, hCi cet. aequalia esse *inter se, adeoque et aequalia triangulo* acb. *Igitur latus*

$Ac = ch = hC$, *atque etiam latus* $Ab = bf = fB$: *si igitur in triangulo* abc *latus* ab *sit tertia vel quarta, vel quaelibet pars lateris* AB, *etiam* ac *erit tertia vel quarta cet. pars lateris* AC. *Proindeque erit* $ab : AB = ac : AC$.

Si recta ab accurate non contineatur in AB, sed cum fractione aliqua, e. g. bis cum dimidio; simili ratione ac bis cum dimidio continebitur in AC, et bc in BC. Etenim factis duobus triangulis Acb, chg aequalibus triangulo acb, inter parallelas hf et CB construi poterit triangulum hCi, cuius latera erunt dimidia pars laterum trianguli cAb; quod est evidens, quum sit fB pars dimidia rectae Ab (*per hyp.*), et recta ih aequalis rectae fB ob parallelas hf et CB. *Et generatim triangula quaelibet similia habent latera homologa proportionalia.*

Corol. Si in triangulo ACB *ducantur parallelae ad basim* hi, em; *numerus partium interceptarum a linea* hi *in lateribus* AC, CB, *erit, ut quilibet alius numerus partium inter duas parallelas* hi, em *interceptarum, atque numerus partium erit etiam, ut latera trianguli. Hoc est*: $Ch : Ci = hc : im = CA : CB$. *Etenim* (ex demonstr.) $Ch : Ci = hc : im = cA : mB$. *Ergo* (§. v. cap. vi. arith. et alg.) $Ch + hc + cA : Ch = Ci + im + mB : Ci = hc : im$. *Sed quod idem est* $CA : CB = Ch : Ci = hc : im$. *Quare* CA *est ad* CB, *ut numerus quilibet partium interceptarum in* CA *ad numerum interceptarum partium in* CB.

THEOREMA II.

DVO TRIANGVLA, IN QVIBVS LATERA SVNT PROPORTIONALIA, AEQVIANGVLA SVNT.

18. Si ponatur AC : CB = EF : FD, et AC : AB = EF : ED, aequiangula erunt triangula ABC et EDF. Nam super EF construatur triangulum FGE triangulo ABC aequiangulum; facto scilicet angulo GEF = BAC, et angulo GFE = ACB, erit etiam tertius EGF aequalis ABC; indeque erit AC : BC = FE : FG: sed (*per hypoth.*) AC : BC = FE : FD; ac proinde FD = FG. Similiter ob triangula ABC, FGE similia, erit AC : AB = FE : EG: sed (*ex hyp.*) AC : AB = FE : ED; ergo FE : EG = FE : ED; ac proinde EG = ED. Quare triangula duo FED et FEG aequiangula sunt et aequalia, ob latus commune FE, et latera FD, FG, et EG, ED aequalia (*theor. III. cap. praeced.*). Sed (*per constr.*) triangulum FGE triangulo ABC est aequiangulum; ergo triangulum FED ipsi quoque est aequiangulum.

Corol. I. Si in triangulis ABC et EDF sit angulus D = B, et praeterea DE : DF = BA : BC; erit triangulum EDF triangulo ABC aequiangulum. Nam super AB capiatur B*e* = DE, ducaturque *ec* parallela rectae AC; triangula ABC et *e*B*c* sunt aequiangula, quum ob parallelam *ec* angulus *ce*B = A, *ec*B = C, et ob angulum B communem. Ergo B*e* : B*c* = BA : BC. Sed (*ex hyp.*) DE : DF = BA : BC, ergo B*e* : B*c* = DE : DF;

at B*e* = DE; ergo B*c* = DF. Ac proinde duo triangula B*ec*, DEF sunt aequalia et similia. Sed B*ec* est triangulo BAC aequiangulum, ergo triangulum EDF est aequiangulum triangulo ABC, ac proinde generatim triangula, quorum latera duo circa aequalem angulum sunt proportionalia, sunt aequiangula.

Corol. II. Si recta AD angulum BAC bifariam et aequaliter dividat in triangulo BAC; eadem recta latus oppositum BC dividit quoque in duas partes BD et DC lateribus AB et AC proportionales. Etenim producta recta CA in E, per punctum B agatur BE rectae AD parallela: triangula ECB, DAC erunt similia (*def. ad theor. IV. cap. III.*) ac proinde BD : DC = AE : AC (*corolar. ad theor. I.*); sed ob parallelas angulus BEA = DAC = DAB = ABE; ergo triangulum BAE est isosceles (*cor. II. theor. II. cap. praec.*): quare AE = AB: ideoque BD : DC = AB : AC. 23.

Corol. III. Si ex angulo recto A trianguli rectanguli BAC demittatur perpendicularis AD in basim BC, quae angulo recto imminet, et *hypothenusa* dicitur, haec dividet triangulum in duo alia triangula BAD, DAC inter se, et triangulo BAC similia. Et quidem triangula BDA, DAC praeter angulum rectum habent quoque cum triangulo BAC angulum communem, *scilicet triangulum* ABD *et angulum* B, *triangulum* ADC *angulum* C. Ac proinde similia sunt inter se, et toti triangulo (*def. ad theor. IV. cap. III.*). Hinc BD : DA = DA : DC et BD : BA = BA : BC, ac tandem DC : CA = CA : CB.

Corol. IV. Dum fit BD : BA = BA : BC, erit $BA^2 = BD \times BC$ (ob productum mediorum aequale producto extremorum). Similiter quum sit DC : AC = AC : CB, erit $AC^2 = DC \times BC$. Ergo $BA^2 + AC^2 = BD \times BC + DC \times BC = \overline{BD + DC} \times BC = BC \times BC = BC^2$. Quare quadratum hypothenusae in triangulo rectangulo aequale est quadratis laterum, seu cathetorum.

Corol. V. Diagonalis quadrati est lateri *incommensurabilis*. Quum enim diagonalis sit hypothenusa trianguli rectanguli, cuius latera sunt aequalia, quadratum diagonalis aequale est duplo quadrato lateris. Sed numeris exprimi non potest radix quadrati dupli, seu radix 2 *ex demonstratis in arithmetica*). Ergo si latus quadrati numeris exprimatur, exprimi non poterit diagonalis, et contra *.

24. *Corol. VI.* Perpendicularis EO ex circumferentiae circuli puncto quolibet in diametrum demissa, est media proportionalis inter duo segmenta CO et OL. Nam si ex puncto E ad diametri extremitates agantur rectae EC, EL; triangulum CEL est rectangulum in E, ac proinde (*corol. II.*) CO : EO = EO : OL; et $EO^2 = CO \times OL$. Recta perpendicularis EO, dici solet *ordinata*; *abscissa* autem vocatur pars CO diametri inter perpendicularem et circumferentiam comprehensa.

* *Conferantur, quae in arithmetica de incommensurabilibus dicta sunt, et observabitur auxilium, quod geometria praestat arithmeticae in exhibendis veris quantitatibus, quas, utpote surdas seu irrationales, haec numquam exprimere valet.*

THEOREMA III.

Si ducantur in circulo chordae duae BC et DA, se mutuo secantes in E, chordarum segmenta erunt reciproce proportionalia. 26.

Si enim ducantur BA et CD, triangula BEA et DEC sunt similia, ob angulos in E aequales, atque ob angulos C, A, et B, D iisdem arcubus subtensos. Quare AE : BE = CE : DE (*theor. I.*).

Cor. I. Si duae lineae EB, EC ex eodem puncto extra circulum ductae, ad superficiem concavam terminentur, partes externae EA, ED rectis integris EB, EC sunt reciproce proportionales. Ductis enim chordis AC, DB, triangula EBD, EAC similia sunt ob angulum E communem, et angulos B, C eodem arcu AD subtensos; ergo EA : ED = EC : EB (*theor. I.*). 25.

Corol. II. Si recta EB sit secans, altera autem E*d* tangens; erit EB : E*d* = E*d* : EA. Nam ductis *d*B, *d*A, similia erunt triangula E*d*B, E*d*A ob angulum E communem, et angulos EB*d*, A*d*E aequales, quorum communis mensura est dimidius arcus A*d* (*theor. IV. cap. II.*). Ergo angulus *d*AE = E*d*B, ac proinde EB : E*d* = E*d* : EA, hoc est, tangens est media proportionalis inter

Fig. rectam totam EB, et partem externam EA.

Corol. III. Hinc facile dividitur recta data bifariam, ea conditione, ut maior pars sit media proportionalis inter totam rectam, et eiusdem
27. rectae partem alteram. Nam super datae rectae AB extremitatem erigatur perpendicularis AE dimidiae AB aequalis, et centro E, radio AE describatur circulus DAF. Deinde per B et E agatur recta BF, et centro B, radio BD describatur arcus DC; hic occurret rectae AC in puncto quaesito. Etenim ob tangentem BA erit BF : BA = BA : BD; ac proinde BF — BA : BA = BA — BD : BD (§. *v. cap. VI. alg.*) Sed BF—BA=BD=BC; quum sit FD=BA, utpote duplae ipsius EA, quae est dimidia rectae AB. Simili modo BA—BD=AC; ergo substitutione facta, BC : BA =AC : BC, vel BA : BC=BC : AC. In hoc corollario continetur problema, quod his verbis proponere solent geometrae: *rectam dividere in media et extrema ratione.*

Alia etiam problemata proponi solent, qualia sunt: *tribus datis rectis, quartam proportionalem invenire. Inter duas rectas, invenire mediam proportionalem.* Sed haec manifesta sunt ex praecedentibus.

THEOREMA IV.

SI DVAE FIGVRAE SIMILES IN TRIANGVLA VTCVMQVE DIVIDANTVR PER DIAGONALES EX VERTICE ANGVLORVM AEQVALIVM DVCTAS, TRIANGVLA HOMOLOGA ERVNT SIMILIA.

Etenim sint duo polygona ABCDE et FGHIK, Fig.
in quibus angulus A = F, B=G, C = H, 30.
D = I, E = K, sitque praeterea AB : FG = BC : GH = CD : HI = DE : IK = EA : KF. Ductis diagonalibus AC, AD, FH, FI; similia erunt triangula ABC, FGH, et ACD, FHI, atque ADE, FIK. Nam quum anguli B et G, E et K aequales sint, et lateribus proportionalibus comprehensi, similia erunt triangula ABC, FGH, et ADE, FIK (*corol. I. theor. II. cap. IV.*). Itaque angulus BAC =GFH, DAE=IFK. Ergo BAE—BAC—DAE =CAD = GFK — GFH — IFK = HFI. Igitur angulus CAD = angulo HFI. Simili modo ostenditur, angulus ACD, FHI, et ADC, FIH aequales esse. Quare triangula ACD et FHI sunt aequiangula.

Versa vice duae figurae quaelibet similes sunt, si in triangula aequiangulae resolvi possint. Nam ob angulos aequales in triangulis aequiangulis aequales sunt anguli in unaquaque figura. Quare quum latera figurarum sint triangulorum aequiangulorum latera proportionalia, figurae similes sunt.

Corol. IV. Si dividatur BC in L, latusque homologum GH in M in eadem ratione; ita ut sit BC : GH = LC : MH; deinde si ducantur rectae duae ad arbitrium LN et MO, quae angulos CLN HMO aequales efficiant, vel quae dividant latera homologa ED et KI in eadem ratione; ita ut sit ED : KI = DN : IO; erit LN : MO = CD : HI = BC : GH cet. Nam ductis NC et OH, triangula NCD, OHI similia sunt ob angulos D, I aequales, lateribus proportionalibus ND, DC, et

OI, IH comprehensos. Quare CD : HI = CN : HO, et angulus DCN = IHO. Si ergo anguli illi auferantur ex angulis aequalibus DCL, IHM, remanebunt aequales anguli NCL, OHM; ac proinde triangula NCL; OHM similia sunt: ideoque LN : MO = LC : MH = BC : GH = CD : HI cet. Quare generatim si in duobus polygonis similibus ducantur lineae, quae dividant latera homologa vel angulos aequales in eadem ratione, lineae illae erunt proportionales inter se, atque etiam eorumdem polygonorum lateribus quibuscumque homologis.

Schol. Linearum rationem iam consideravimus in quantitatibus finitis. Superest, ut pauca, quantum nobis necesse est, explicemus de ratione quantitatum, quas *infinite magnas* et *infinite parvas* appellant. Et in primis quidem observandum est, nullam quantitatem in se spectatam, et sine nostro cogitandi modo aut infinite parvam esse, aut infinite magnam, sed magnitudo quaelibet in se determinata est. Et quidem data quavis magnitudine, utcumque parva vel utcumque magna, alia semper minor in primo casu, et alia semper maior in casu altero haberi potest. Nobis enim licet quantitatem exiguam vel ingentem considerare, primamque minuere, alteram augere, abstrahendo animum a quovis limite determinato. Priorem quantitatem dicimus *infinitesimam* vel *infinite parvam;* quantitatem alteram appellamus *infinitam* vel *infinite magnam.* Rationem, quam duae quantitates finitae habent ad se invicem *rationem finitam* vocamus. Patet autem, diversos esse infinitorum et infinitesimorum ordines. Licet

enim magnitudo aliqua concipiatur infinita vel infinitesima; semper tamen quantitas manet, ac proinde ultra quoscumque limites augeri potest et minui. Si quantitatem aliquam finitam ultra quoscumque limites minui concipiamus, hanc dicimus infinitesimam *ordinis primi.* Si autem quantitas alia ad hanc infinitesimam habeat rationem, quam ipsa infinitesima habet ad quantitatem finitam, dicimus infinitesimam *secundi ordinis*, et ita deinceps. Vice versa, si quaedam quantitas sit ad infinitam quantitatem, ut quantitas finita ad infinitesimam ordinis primi, eam dicimus infinitam *ordinis primi;* et ita deinceps superiores infinitorum ordines intelligere licet. Exemplum sit in circulo, cuius diameter est ad chordam, ut est chorda ipsa ad abscissam, ac proinde si fingatur chorda infinite parva primi ordinis, erit abscissa infinitesima ordinis secundi.

Ex his patet, calculo subiici posse quantitates infinitas et infinitesimas. Infinitum hac nota exprimi solet ∞. Quare numerorum series infinita hoc modo repraesentari potest $0, 1, 2, 3, 4, 5 \ldots . \infty$. Pari modo quantitas quaelibet finita concipi potest divisa in partes perpetuo decrescentes, donec perveniatur ad quantitatem infinitesimam. Talis est series, $\frac{1}{1} . \frac{1}{2} . \frac{1}{3} . \frac{1}{4} . \frac{1}{5} \ldots . \frac{1}{\infty}$.
Evidens autem est, quantitatem infinitam finitae quantitates additione vel subtractione maiorem vel minorem non fieri; quum infinita quantitas ad quantitatem infinitam rationem habeat qualibet data minorem. Simili ratione quantitas infiniti parva

quantitatem finitam augere vel minuere non potest. Itaque $\infty = \infty \pm 1$, et $1 = 1 \pm \frac{1}{\infty}$. Eodem modo si diversi infinitorum ordines per diversos exponentes designantur, erit $\infty^2 \pm a = \infty^2$, et $\frac{1}{\infty} + \frac{1}{\infty^2} = \frac{1}{\infty}$. Verum si quantitates eiusdem generis considerentur sive infinitae sive infinitesimae, ex notione quantitatum illarum manifestum est, eas non secus ac quantitates finitas tractari debere. Probe enim recordandum est, quantitates illas non absolute, sed relative dumtaxat et secundum nostrum concipiendi modum esse infinitas vel infinitesimas. Quare $\infty + \infty = 2\infty$; $\frac{1}{\infty} \times 3\infty = \frac{3\infty}{\infty} = 3$; $\frac{2\infty^2}{\infty} : \frac{2}{\infty} = \infty \times \infty = \infty^2$; $\frac{\infty^3}{\infty^2} = \infty$; $\frac{\infty^2}{\infty^3} = \frac{1}{\infty}$; $\frac{1}{\infty} \times \frac{1}{\infty} = \frac{1}{\infty^2}$; $\frac{1}{\infty} : \frac{1}{\infty^2} = \frac{\infty^2}{\infty} = \infty$.

Ex his multa colligere licet.

Quantitates infinitae vel infinitesimae eiusdem ordinis adduntur vel subtrahuntur non secus, ac vulgares quantitates. Quantitas infinita primi ordinis per quantitatem infinitam eiusdem ordinis multiplicata producit quantitatem infinitam ordi-

nis secundi. At quantitas infinita ordinis cuiuscumque per quantitatem finitam multiplicata producit quantitatem infinitam eiusdem ordinis. Et generatim quantitas infinita cuiusvis ordinis per aliam quantitatem ordinis cuiuscumque multiplicata evehitur ad illum infiniti gradum, cuius exponens est ipsa exponentium summa. Contraria autem ratione, si quantitas infinita ordinis cuiuscumque per quantitatem infinitam ordinis cuiuslibet dividatur, habetur quantitas, cuius gradus designatur per ipsam exponentium differentiam. At si quantitas infinitessima cuiuslibet gradus per quantitatem infinitessimam ordinis cuiuscumque multiplicetur aut dividatur; in primo casu quantitas infinitessima ad eum deprimetur gradum, qui per exponentium summam exhibetur: in casu autem altero quantitas infinitessima ad eum gradum evehitur, qui per ipsam exponentium differentiam repraesentatur ita, ut quantitas infinitessima per divisionem fieri possit finita, atque etiam infinita. Haec pauca dicta sint *de primarum et ultimarum rationum* methodo, quam quidem ad methodum *exhaustionem* revocari posse intelligitur.

APPENDIX.

De proportionum usu in triangulorum resolutione, sive de Trigonometria.

Ex linearum proportione tota pendet *trigonometria*, quae est ars resolvendi triangula. In trian-