quantitatem finitam augere vel minuere non potest. Itaque $\infty = \infty \pm 1$, et $1 = 1 \pm \frac{1}{\infty}$. Eodem modo si diversi infinitorum ordines per diversos exponentes designantur, erit $\infty^2 \pm a = \infty^2$, et

$\frac{1}{\infty} + \frac{1}{\infty^2} = \frac{1}{\infty}$. Verum si quantitates eiusdem

generis considerentur sive infinitae sive infinitesimae, ex notione quantitatum illarum manifestum est, eas non secus ac quantitates finitas tractari debere. Probe enim recordandum est, quantitates illas non absolute, sed relative dumtaxat et secundum nostrum concipiendi modum esse infinitas vel infinitesimas. Quare $\infty + \infty = 2\infty$; $\frac{1}{\infty}$

$$\times 3\infty = \frac{3\infty}{\infty} = 3; \quad \frac{2\infty^2}{\infty} : \frac{2}{\infty} = \infty \times \infty = \infty^2$$

$$\frac{\infty^3}{\infty^2} = \infty; \quad \frac{\infty^2}{\infty^3} = \frac{1}{\infty}; \quad \frac{1}{\infty} \times \frac{1}{\infty} = \frac{1}{\infty^2};$$

$$\frac{1}{\infty} : \frac{1}{\infty^2} = \frac{\infty^2}{\infty} = \infty.$$

Ex his multa colligere licet.

(Quantitates infinitae vel infinitesimae eiusdem ordinis adduntur vel subtrahuntur non secus, ac vulgares quantitates. Quantitas infinita primi ordinis per quantitatem infinitam eiusdem ordinis multiplicata producit quantitatem infinitam ordinis secundi. At quantitas infinita ordinis cuiuscumque per quantitatem finitam multiplicata producit quantitatem infinitam eiusdem ordinis. Et generatim quantitas infinita cuiusvis ordinis per aliam quantitatem ordinis cuiuscumque multiplicata evehitur ad illum infiniti gradum, cuius exponens est ipsa exponentium summa. Contraria autem ratione, si quantitas infinita ordinis cuiuscumque per quantitatem infinitam ordinis cuiuslibet dividatur, habetur quantitas, cuius gradus designatur per ipsam exponentium differentiam. At si quantitas infinitessima cuiuslibet gradus per quantitatem infinitessimam ordinis cuiuscumque multiplicetur aut dividatur; in primo casu quantitas infinitessima ad eum deprimetur gradum, qui per exponentium summam exhibetur: in casu autem altero quantitas infinitessima ad eum gradum evehitur, qui per ipsam exponentium differentiam repraesentatur ita, ut quantitas infinitessima per divisionem fieri possit finita, atque etiam infinita. Haec pauca dicta sint *de primarum et ultimarum rationum* methodo, quam quidem ad methodum *exhaustionem* revocari posse intelligitur.)

APPENDIX.

De proportionum usu in triangulorum resolutione, sive de Trigonometria.

Ex linearum proportione tota pendet *trigonometria*, quae est ars resolvendi triangula. In trian-

Fig. gulo autem sex partes considerari possunt, nempe tres anguli, et tria latera. Huc autem refertur trigonometriae praxis, ut datis tribus ex sex partibus trianguli, *quarum saltem una latus sit*, partes reliquae inveniantur: ac proinde tres partes datae constituere debent tres primos proportionis terminos, et terminus quartus erit pars quaesita. Verum quia latera trianguli expressam rationem non habent cum angulis, quorum mensura sunt arcus circuli; angulis vel arcubus circuli substituuntur lineae rectae, quae arcus illos exhibeant, et trianguli lateribus proportionales sint. Harum linearum definitiones adferemus, et proprietates demonstrabimus.

31. *Def. I.* Sit angulus quibus ACB, ex cuius vertice C, tamquam centro: et radio ad arbitrium sumto describatur circulus AHaG Producatur AC in a, erigaturque in C perpendicularis CH. Evidens est, angulum BCH vel arcum HB esse *complementum* anguli ACB vel arcus AB. Angulus BCa vel arcus BHa est *supplementum* anguli ACB vel arcus AB, et vice versa BA est *complementum* ipsius HB, et *supplementum* ipsius aHB.

Def. II. Recta BD ex radii extremitate B ad radium CA perpendiculariter ducta dicitur *sinus* arcus AB vel anguli ACB.

Def. III. Recta AE ex radii extremitate A perpendiculariter ducta, et radio alteri producto occurrens in E, vocatur *tangens* arcus AB; recta autem CE eiusdem arcus *secans* appellatur.

Def. IV. Pars AD radii inter arcum et sinum comprehensa, dicitur *sinus versus* arcus AB. Perpendicularis BI dicitur *sinus complementi* arcus AB. Perpendicularis HK *tangens complementi*, et HI *sinus versus complementi* arcus AB.

Schol. Compendii ergo sinus complementi, tangens complementi cet. dicuntur *cosinus*, *cotangens*, *cosecans*, *cosinus versus*. Brevitatis causa scribuntur R pro radio: sin. pro sinu: tang. pro tangente: sin. v. pro sinu verso.

Corol. I. Ex his definitionibus multa colliguntur. Nempe sinus, cosinus, tangens, cotangens cet. anguli obtusi BCa sunt etiam sinus, cosinus cet. anguli acuti ACB, qui est anguli obtusi supplementum. Nam ex radii alterutrius extremitatibus B vel a demitti non potest perpendicularis, quae non cadat in radium alterum productum. Tales sunt perpendiculares DB, ad. Similiter tangens alia esse non potest quam ae; sed ob triangula aCd, BCD, et Cae, CAE aequalia habetur $ad =$ BD, et $ae =$ AE. *Ergo sinus et tangentes sunt aequales in angulis acutis atque in obtusis, qui sint illorum supplementa.* Quum autem sit arcus BH complementum arcus AB, evidens est BI esse cosinum arcus AB, et HK illius cotangentem.

Corol. II. Sinus BD arcus AB est dimidium chordae BG, arcum duplum BAG subtendentis (*theorem. I. cap. II.*). Sinus crescunt crescentibus angulis a $0°$ usque ad $90°$, et eodem modo decrescunt a $90°$ usque ad $180°$.

Cor. III. Sinus arcus $30°$ dimidio radio aequalis est. Est enim radius aequalis chordae arcus $60°$ (*corol. IV. theor. V. cap. III.*) et eiusdem arcus sinus est dimidia chorda arcus dupli. Itaque in triangulo rectangulo latus oppositum angulo 30° est dimidia hypothenusa huius trianguli. Nam si $ACB = 30^\circ$, erit $BG = BC$, et $BD = \frac{1}{2} BC$.

Corol. IV. Tangentes crescunt, crescentibus angulis a 0° usque ad 90° ita, ut tangens arcus 90° sit infinita. Nam radius CH in angulo recto HCA non potest concurrere cum tangente, *quum tangens et radius* CH *sint eidem radio* CA *perpendiculares, adeoque inter se parallelae.*

Corol. V. Tangens arcus 45° aequalis est radio. Nam si angulus ACB sit 45°, triangulum rectangulum CAE erit isosceles, et $AE = AC$.

Cor. VI. Sinus versus AD arcus AB, qui minor est 90°, aequalis est differentiae inter radium CA et cosinum $CD = BI$. Praeterea cosinus versus HI est differentia inter radium CH et sinum $CI = BD$; at sinus versus supplementi, nempe D*a* aequalis est summae radii et cosinus.

Corol. VII. Ob triangula rectangula similia CDB, CAE, CIB, CHK, erit $CA : CD$ vel $BI = AE : BD$, nempe radius est ad cosinum, ut tangens ad sinum, hoc est, $R : \text{cos.} = \text{tang.} : \text{sin.}$ Deinde haec alia habetur analogia $CH : CI$, vel $BD = HK : IB$, hoc est, radius ad sinum, ut cotangens ad cosinum, seu $R : \text{sin.} = \text{cot.} : \text{cos.}$ Tandem $AE : CA = CH$, vel $CA : HK$; hoc est tangens ad radium, ut radius ad cotangentem, seu $\text{tang.} : R = R : \text{cot.}$

Corol. VIII. Ex praecedentibus analogiis derivant formulae, quarum ope sinus substituuntur

tangentibus, et vice versa. Sit $R = 1$; erit

$$\text{sin.} = \text{cos.} \times \text{tang.} = \frac{\text{cos.}}{\text{cot.}}\,;\ \text{cos.} = \text{sin.} \times \text{cot.}$$

$$= \frac{\text{sin.}}{\text{tang.}}\,;\ \text{tang.} = \frac{\text{sin.}}{\text{cos.}} = \frac{1}{\text{cot.}}\,;\ \text{cot.} = \frac{\text{cos.}}{\text{sin.}}$$

$$= \frac{1}{\text{tang.}}\,;\ \text{cot. } A \times \text{tang. } A = 1 = \text{cot. } B \times \text{tang. } B.$$

THEOREMA I.

In omni triangvlo sinvs angvlorvm svnt vt latera angvlis opposita.

Etenim triangulum circulo inscribatur: singula latera sunt chordae arcus dupli, qui est mensura anguli oppositi. Quare dimidium latus est sinus anguli oppositi. Sed semisses sunt inter se, ut tota; ergo latera sunt, ut sinus angulorum oppositorum.

Corol. I. Hinc quum sinus anguli recti sit radius, et latus oppositum sit hypothenusa, erit in triangulo rectangulo radius ad hypothenusam, ut sinus anguli unius acuti ad latus eidem angulo oppositum.

Corol. II. In triangulo rectangulo cosinus anguli unius acuti est sinus anguli alterius; ergo sinus anguli unius acuti est ad suum cosinum, et latus huic angulo oppositum est ad latus alterum; sed sinus est ad cosinum, ut tangens ad

Fig radium; ergo in triangulo rectangulo tangens anguli unius acuti est ad radium, ut latus huic angulo acuto oppositum est ad latus alterum.

THEOREMA II.

32. In triangulo quolibet ABC haec semper habetur analogia: maius latus AC est ad summam duorum aliorum laterum $AB + BC$, ut eorumdem laterum differentia $AB - BC$ ad differentiam segmentorum AE et CE, quae fiunt ducta ex angulo maiori B in maius latus AC perpendiculari BE.

Nam si ex anguli vertice B tamquam centro, et radio BC, qui sit minori lateri aequalis, describatur circulus GCO, producto latere AB in G; erit $AG = AB + BC$, et $AP = AB - BC$; atque ob $CE = EO$, erit $EA - CE = AD$. *Iam triangula* ACG *et* AOP *sunt similia. Habent nempe communem angulum* A: *praeterea angulus* GCO *aequalis est angulo* OPA; *nam angulus* $GPO + OPA = 180° = \frac{1}{2} CPGC$; *sed angulus* $GPO = \frac{1}{2} GDE$; *ergo angulus* $OPA = \frac{1}{2} GPD$. *At vero haec eadem est mensura anguli* GCO (theor. v. cap. II.); *proinde erunt anguli* OPA, GCO *aequales. Igitur triangula* ACG, AOP *sunt similia, et latera homologa proportionalia:* $AC : AG = AP : AD$, *seu* $AC : AB + BC = AB - BC : EA - CE$.

Fig.

PROBLEMA I.

Dato sinu et cosinu arcus, invenire sinus et cosinus arcus dimidii, atque etiam arcus dupli.

Sit AM arcus datus, cuius sinus MP, et co- 33.
sinus CP dati sint: ducta chorda AM, et ad eam demissa perpendicularis CQN, erit AQ vel MQ sinus, et CQ cosinus dimidii arcus. Praeterea agatur chorda MB, quae erit dupla CQ ob triangula ACQ, AMB similia, atque ob AB duplam ipsius AC. Sed $AP : AM = AM : AB$. Quare $AM^2 = AB \times AP$, et $AM \sqrt{AB \times AP}$. Ideoque MQ sinus dimidii arcus $= \frac{1}{2}\sqrt{AB \times AP} = \sqrt{\frac{1}{2} AB \times AP} = \sqrt{\frac{1}{2} AC \times AP}$. Simili modo quum sit $AB : BM = BM : BP$, erit $BM = AB \times BP$, et $BM = \sqrt{AB \times BP}$, ergo CQ vel cosinus dimidii arcus $= \frac{1}{2}\sqrt{AB \times BP} = \sqrt{\frac{1}{4} AB \times BP} = \sqrt{\frac{1}{2} AC \times BP}$.

Iam vero si invenire oporteat sinum et cosinum arcus dupli, sit AN arcus simplex, cuius sinus AQ vel MQ, et cosinus CQ; erit MP sinus, et CP cosinus arcus dupli. Sed ob triangula rectangula AQC, AMP similia, erit $CA : CQ = AM : MP$. Quare si radius dicatur R, et arcus AN dicatur A, erit $R : \cos. A = 2 \sin. A : \sin. 2A$. Tandem ob eorumdem triangulorum similitudinem erit $CA : AQ = AM : AP$, vel

Fig. $R : \sin. A = 2 \sin. A : R - \cos. 2A$: ideoque $RR - R \times \cos. 2A = 2 \sin. A \times \sin. A$. Ac proinde

$$\cos. 2A = \frac{RR - 2 \sin A \times \sin. A}{R}.$$

PROBLEMA II.

DATO SINV ET COSINV DVORVM ARCVVM, INVENIRE SINVS ET COSINVS EORVMDEM SVMMAE VEL EORVM DIFFERENTIAE.

Sint arcus AM, DM, quorum sinus et cosinus
34. dati. Agatur chorda FD ad radium CM perpendicularis, et ex punctis D, F demittantur perpendiculares DQ, FP ad radium CA, quarum linearum una erit sinus summae, altera autem sinus differentiae arcuum AM, DM, ideoque recta CQ erit cosinus summae, et CP cosinus differentiae. Iam vero ducantur rectae GK, FL perpendiculares ad DQ, itemque rectae MN, GI perpendiculares ad radium CA, fiatque arcus AM=A, et arcus DM, vel FM=B. His positis, patet, sinum DQ summae arcuum esse=QK +DK=GI+DK, et sinum FP differentiae eorumdem arcuum esse=GI-KL=GI-DK, quum sit DK=KL. Quare inveniendae sunt duae illae rectae. Sed ob triangula CMN, CGI similia, erit CM:CG=MN:GI,

vel $R : \cos. B = \sin. A : GI = \frac{\sin. A \times \cos. B}{R}$.

Item ob triangula CMN, DGK similia, erit CM : CN = DG : DK, vel $R : \cos. A = \sin. B : DK$

$= \frac{\sin. B \times \cos. A}{R}$, factaque summa, erit DQ, vel

$$\sin. (A + B) = \frac{\sin. A \times \cos. B + \sin. B \times \cos. A}{R}.$$ Factaque subtractione, erit GI—DH, vel FP =

$$\sin. (A - B) = \frac{\sin. A \times \cos. B - \sin. B \times \cos. A}{R}.$$

PROBLEMA III.

SIMILI MODO INVENIRE COSINVM CQ SVMMAE, 34.
ET COSINVM CP DIFFERENTIAE ARCVVM.

Inveniantur nempe rectae CI, et GK=PI, subtrahanturque ex CI, vel huic addantur. Iam vero ob triangula CMN, CGI similia, erit CM : CG = CN : CI, vel $R : \cos. B = \cos. A : CI$

$= \frac{\cos. A \times \cos. B}{R}$. Itemque ob triangula DGK, CMN similia, erit $CM : MN = DG : GK$

$= \frac{\sin. A \times \sin. B}{R}$. Ideoque CQ, vel $\cos. (A + B)$

$= \frac{\cos. A \times \cos. B - \sin. A \times \sin. B}{R}$, et CP, vel

$$\cos. (A - B) = \frac{\cos. A \times \cos. B + \sin. A \times \sin. B}{R}.$$

Fig. 34. Sit arcus $AM=30°$, et $FM=MD$. Ob triangula rectangula similia DGO, LSO, erit angulus $GDO = LSO = ACM = 30°$. Ergo angulus $GDO=30°$. Quare $FL=\frac{1}{2}FD$ (*cor. III.*) $=FG=GD$. Sed $DF^2=FL^2,+DL^2$ vel $DF^2-FL^2=DL^2$, vel $4FG^2-FG^2=DL^2$. Ergo $3FG^2=DL^2$, vel $FG^2\times 3=DL^2$. Quare $FG\times\sqrt{3}=DL$, et $FG\times\sqrt{3}+FP=DQ$, hoc est, sinus FP arcus FA minoris scilicet quam $30°$, et sinus FG, differentiae scilicet inter hunc arcum et $30°$ per $\sqrt{3}$ multiplicatus, simul sunt aequales sinui DQ arcus DA, qui tanto maior est arcu $30°$, quanto arcus FA minor est. Ob arcum $DG=FL$, erit $DT+DG=FH$. Nempe sinus DT arcus DB minoris quam $60°$, et sinus DG, differentiae scilicet inter hunc arcum et $60°$, simul aequantur sinui FH arcus BF, qui tanto maior est arcu $60°$, quanto FD minor est. Itaque demonstravimus principia, quorum ope formari possunt sinuum et tangentium tabulae. Illae autem tabulae commoditatis ergo per logarithmos construuntur, cuius quidem constructionis ratio ex logarithmorum doctrina iam explicata intelligitur.

LEMMA.

SI AD SEMISVMMAM DVARVM QVANTITATVM ADDATVR SEMIDIFFERENTIA, PRODIT NVMERVS MAIOR; SI VERO HAEC AB ILLA SVBTRAHATVR, RELINQVITVR NVMERVS MINOR.

Etenim numerus maior componitur ex minore

Fig. *et differentia; ergo summa componitur ex minore bis sumto et differentia. Quare quum semisumma componatur ex minore et semidifferentia, prodit numerus maior, si ad semisummam semidifferentia addatur; contra relinquitur minor, si haec ab illa subtrahatur.*

THEOREMA III.

IN OMNI TRIANGVLO ABC SVMMA DVORVM LATERVM QVORVMCVMQVE $AB+BC$ EST AD ILLORVM DIFFERENTIAM $AB-BC$, VT TANGENS SEMISVMMAE DVORVM ANGVLORVM A, ET C, QVI HIS LATERIBVS OPPONVNTVR, AD TANGENTEM SEMIDIFFERENTIAE EORVMDEM ANGVLORVM. 32.

Etenim sit P semisumma angulorum A et C, et Q illorum semidifferentia. Erit angulus maior $C=P+Q$, et minor $A=P-Q$. (*lemmate praeced.*). Iam (*ex demonst.*) $AB : BC = \sin. C : \sin. A = \sin. (C+Q) : \sin. (C-Q) = \sin. P \times \cos. Q + \cos. P \times \sin. Q : \sin. P \times \cos. Q - \cos. P \times \sin. Q$ (*probl. II.*) Radius ponitur $=1$. Ergo $AB \times \sin. P \times \cos. Q - AB \times \cos. P \times \sin. Q = BC \times \sin. P \times \cos. Q + BC \times \cos. P \times \sin. Q$. Et (*per transpositionem*) - - -

$$\overline{AB-BC}\times\sin.P\times\cos.Q = \overline{AB+BC}\times\cos.P\times\sin.Q.$$

Quare dividendo per $\cos.P\times\cos.Q$, factaque reductione, habebitur: $\dfrac{\overline{AB-BC}\times\sin.P}{\cos.P} = \dfrac{\overline{AB+BC}\times\sin.Q}{\cos.Q}$.

Sed $\frac{\text{sin.}}{\text{cos.}} = \text{tang.}$ Ergo $AB - BC \times \text{tang.}\, P = -$ - $AB + BC \times \text{tang.}\, Q$. Quare $AB + BC : AB - BC = \text{tang.}\, P : \text{tang.}\, Q = \text{tang.}\, \frac{A+C}{2} : \text{tang.}\, \frac{A-C}{2}$.

His principiis universa innititur trigonometria. Et quidem in triangulorum resolutione vel dantur tria latera, vel duo tantum et angulus, vel duo anguli et latus unum. Porro datis in triangulo tribus, quae iam diximus, reliqua inveniuntur per hactenus demonstrata. At monendum est, datis tribus angulis dumtaxat, inveniri tantum rationem laterum, quae sunt, ut sinus angulorum oppositorum; minime autem invenitur eorum valor, quum infinita possint construi triangula similia inaequalia. Neque etiam sine observatione praetermittendus est casus, in quo dantur duo latera, et angulus alterutri lateri oppositus. Casus ille est ambiguus, et duas solutiones potest admittere; quum (*ex dem.*) sinus anguli acuti sit quoque sinus complementi ad duos rectos. Quare, ut tollatur ambiguitas, nota sit, oportet, anguli species, hoc est, notum esse debet, an angulus sit acutus vel obtusus.

In omnibus trigonometriae libris reperiuntur sinuum et tangentium tabulae. Quamvis autem ex hactenus demonstratis manifestum sit, quo artificio construantur; id tamen breviter declarabimus. Dato sinu 30° per antea demonstrata, inveniri possunt sinus 15°, deinde $7^\circ \frac{1}{2}$, postea $2^\circ \frac{3}{4}$, 3

et ita sinuum semisses, progrediendo usque ad Fig.
duodecimam operationem, nempe usque ad $52''$ $44'''$ $3''''$ $\frac{3}{4}$; qui quidem sinus sine errore sensibili cum arcu confunditur. Quia vero sinus illi minime sunt arcubus proportionales, dici potest: ut arcus ille minimus est ad suum sinum; ita arcus $1'$ est ad suum sinum. Dato autem sinu $1'$, invenietur sinus arcuum $2'$, $3'$, $4'$, cet. et ita deinceps usque ad 30° Tandem a 30° usque ad 60°, et 60° usque ad 90° progredi licebit. Quo facto tangentes ad calculum revocare iam facile erit.

SECTIO II.

De geometria superficierum.

CAPVT I.

De praecipuis planarum superficierum proprietatibus.

THEOREMA I.

TRIA PVNCTA, QVAE IN EADEM RECTA NON IACENT, PLANI POSITIONEM DETERMINANT.

Id patet ex definitione ipsius plani, *quae sic se habet: si concipiatur triangulum rectangulum* ABF *circa perpendicularem im-* 35