Sed $\frac{\text{sin.}}{\text{cos.}} = \text{tang.}$ Ergo $AB - BC \times \text{tang.}\, P = -$ - $AB + BC \times \text{tang.}\, Q$. Quare $AB + BC : AB - BC = \text{tang.}\, P : \text{tang.}\, Q = \text{tang.}\, \frac{A+C}{2} : \text{tang.}\, \frac{A-C}{2}$.

His principiis universa innititur trigonometria. Et quidem in triangulorum resolutione vel dantur tria latera, vel duo tantum et angulus, vel duo anguli et latus unum. Porro datis in triangulo tribus, quae iam diximus, reliqua inveniuntur per hactenus demonstrata. At monendum est, datis tribus angulis dumtaxat, inveniri tantum rationem laterum, quae sunt, ut sinus angulorum oppositorum; minime autem invenitur eorum valor, quum infinita possint construi triangula similia inaequalia. Neque etiam sine observatione praetermittendus est casus, in quo dantur duo latera, et angulus alterutri lateri oppositus. Casus ille est ambiguus, et duas solutiones potest admittere; quum (*ex dem.*) sinus anguli acuti sit quoque sinus complementi ad duos rectos. Quare, ut tollatur ambiguitas, nota sit, oportet, anguli species, hoc est, notum esse debet, an angulus sit acutus vel obtusus.

In omnibus trigonometriae libris reperiuntur sinuum et tangentium tabulae. Quamvis autem ex hactenus demonstratis manifestum sit, quo artificio construantur; id tamen breviter declarabimus. Dato sinu 30° per antea demonstrata, inveniri possunt sinus 15°, deinde $7^\circ \frac{1}{7}$, postea $2^\circ \frac{1}{4}$, 3

et ita sinuum semisses, progrediendo usque ad Fig.
duodecimam operationem, nempe usque ad $52''$ $44'''$ $3''''\frac{3}{4}$; qui quidem sinus sine errore sensibili cum arcu confunditur. Quia vero sinus illi minime sunt arcubus proportionales, dici potest: ut arcus ille minimus est ad suum sinum; ita arcus $1'$ est ad suum sinum. Dato autem sinu $1'$, invenietur sinus arcuum $2'$, $3'$, $4'$, cet. et ita deinceps usque ad 30° Tandem a 30° usque ad 60°, et 60° usque ad 90° progredi licebit. Quo facto tangentes ad calculum revocare iam facile erit.

SECTIO II.

De geometria superficierum.

CAPVT I.

De praecipuis planarum superficierum proprietatibus.

THEOREMA I.

TRIA PVNCTA, QVAE IN EADEM RECTA NON IACENT, PLANI POSITIONEM DETERMINANT.

Id patet ex definitione ipsius plani, *quae sic se habet: si concipiatur triangulum rectangulum* ABF *circa perpendicularem im-* 35

Fig. *mobilem* AB *ita in gyrum agi, ut revolutione sua transitus vestigia relinquat; ea exsistent in plano circulari* CDGFLH. *Non ita vestigia lineae obliquae* AF, *quae superficiem concavam designabunt.* Illud vero planum unicum esse, manifestum est.
36. *Fingantur enim infinita numero plana, uti* HD, CG *cet. Possunt utique ea plana habere duo puncta* A, B *inter se communia. Sed illud etiam manifestum est, unicum dumtaxat inter ea esse, quod quum transeat per duo praedicta puncta, possit simul transire per aliud determinatum punctum* G. *Igitur tria puncta, quum non possint esse nisi eidem plano communia, ipsius positionem determinant.*

36. *Corol. I.* Duae rectae CA, AD se invicem secantes sunt in eodem plano PQ. Nam punctum intersectionis A, et punctum quodlibet aliud in binis lineis pro arbitrio sumtum C, D, tria sunt puncta in directum non posita, quae proinde determinant positionem plani CAD, in quo iacent duo utriusque lineae puncta, ac proinde et totae binae lineae (*ex def.*).

Corol. II. Si duae rectae iacentes in eodem plano tertia recta secentur, recta secans in eodem quoque iacebit plano. Nam duo eiusdem lineae secantis puncta, duae scilicet intersectiones, sunt in eodem plano, *quum sint communia aliis duobus lineis.* Si autem ponamus, duas rectas se mutuo secare, patet, in hoc casu demonstrationem non valere, nisi tertia linea secans extra punctum intersectionis transeat, alioquin unicum haberetur,

punctum, quod rectae positionem non determinat. Fig.

Corol. III. Duorum planorum CG, DH intersectio est linea AB, cuius singula puncta iacent in utroque plano. *Quum enim plana nullam crassitudinem habere censeantur; apertum est, eorum intersectionem* AB *unicam dumtaxat dimensionem habere posse, scilicet longitudinem, adeoque lineam rectam.* Quare planorum duorum CG, DH, intersectio est linea recta AB. 36.

Corol. IV. Recta AB ad planum perpendicularis, insistit quoque perpendiculariter ad rectas singulas in eodem plano iacentes, et per extremitatem perpendicularis transeuntes FB, GB, DB, CB, HB, LB. Etenim ponamus, rectam illam ad planum perpendicularem, non insistere perpendiculariter ad aliquam ex praedictis lineis; iam linea illa infra planum deprimitur vel attollitur supra idem planum; ac proinde non iaceret in eodem plano (*quod est contra hypoth.*) 35.

Corol. V. Duae rectae AB, MN ad idem planum perpendiculares vel aequaliter inclinatae, sunt inter se parallelae, et contra. Etenim rectarum illarum extremitates communi recta BN in plano iungantur; duae illae lineae ad planum perpendiculares, vel aequaliter inclinatae, erunt quoque perpendiculares, vel aequaliter inclinatae ad eamdem lineam iungentem BN; est enim in eodem plano. Quare (*ex parallelarum def.*) rectae illae erunt parallelae, et vice versa. 35.

Fig.

THEOREMA II.

DVO PLANA SIBI MVTVO INCLINATA EASDEM HABENT PROPRIETATES, QVAS DE RECTIS AD SE INVICEM INCLINATIS DEMONSTRAVIMVS.

36. *Ponamus, duo plana* DH *et* CG *se invicem intersecare iuxta rectam* AB. *Ducatur in plano* CG *linea* CA *perpendicularis ad* AB, *atque in plano* DH *ducatur etiam* AD *perpendicularis ad* AB; *tunc angulus* CAD *erit mensura inclinationis planorum* CG, HD. *Vnde constat, eodem pacto haberi mensuram planorum ad se invicem inclinatorum, atque linearum rectarum. Vnde prono alveo fluunt sequentia.*

Corol. I. Planum plano occurrens vel duos angulos rectos facit, vel duobus rectis aequales (*theor. I. cap. I. sect. I.*).

Corol. II. In planorum intersectione aequales sunt anguli ad verticem oppositi (*corol. II. theorem. I. cap. I. sect. I.*).

Corol. III. Si plana quodlibet eamdem habeant communem intersectionem, summa angulorum omnium est 360° (*corol. I. theor. I. cap. I. sect. I.*)

Corol. IV. Ex puncto dato extra planum vel intra planum, unica perpendicularis ad planum duci potest (*corol. IV. theor. I. cap. I. sect. I.*)

Corol. V. Distantia puncti alicuius a plano dato, est perpendicularis ex puncto dato ad planum ducta (*ex def.*).

Corol. VI. Planum secans duo vel plura plana parallela efficit angulos alternos externos aequales, item aequales angulos alternos internos. Praeterea angulus internus alterius interni supplementum est, atque etiam angulus externus est supplementum alterius (*theor. II. cap. I. sec. I*)

Fig.

Corol. VII. Si duo aut plura plana parallela alio plano secentur, communes intersectiones erunt parellelae. Si enim non sint parallelae, sibi occurrere possunt, ac proinde et plana ipsa, in quibus hae lineae iacent; ideoque plana non forent parallela, quod est contra hypoth.

CAPVT II.

De superficierum mensura.

THEOREMA I.

SVPERFICIES PARALLELOGRAMMI RECTANGVLI AEQVALIS EST PRODVCTO EX BASI IN ALTITVDINEM.

Sit parallelogrammum rectangulum ABCD: 37 cuius altitudo AD certum contineat pedum numerum: e. g. 7; basis autem AB contineat 8. Divisum intelligi poterit parallelogrammum in 7 superficies, ut DM, quae singulae continent octo minores superficies quadratas, sive octo pedes *quadratos*, ut vocant. Quare habebitur parallelogrammi totius superficies, si octo pedes quadrati, qui prima superficie continentur, toties sumantur, quot sunt aequales superficies, ut DM,