THEOREMA II.

DVO PLANA SIBI MVTVO INCLINATA EASDEM HABENT PROPRIETATES, QVAS DE RECTIS AD SE INVICEM INCLINATIS DEMONSTRAVIMVS.

36. *Ponamus, duo plana* DH *et* CG *se invicem intersecare iuxta rectam* AB. *Ducatur in plano* CG *linea* CA *perpendicularis ad* AB, *atque in plano* DH *ducatur etiam* AD *perpendicularis ad* AB; *tunc angulus* CAD *erit mensura inclinationis planorum* CG, HD. *Vnde constat, eodem pacto haberi mensuram planorum ad se invicem inclinatorum, atque linearum rectarum. Vnde prono alveo fluunt sequentia.*

Corol. I. Planum plano occurrens vel duos angulos rectos facit, vel duobus rectis aequales (*theor. I. cap. I. sect. I.*).

Corol. II. In planorum intersectione aequales sunt anguli ad verticem oppositi (*corol. II. theorem. I. cap. I. sect. I.*).

Corol. III. Si plana quodlibet eamdem habeant communem intersectionem, summa angulorum omnium est 360° (*corol. I. theor. I. cap. I. sect. I.*)

Corol. IV. Ex puncto dato extra planum vel intra planum, unica perpendicularis ad planum duci potest (*corol. IV. theor. I. cap. I. sect. I.*)

Corol. V. Distantia puncti alicuius a plano dato, est perpendicularis ex puncto dato ad planum ducta (*ex def.*).

Corol. VI. Planum secans duo vel plura plana parallela efficit angulos alternos externos aequales, item aequales angulos alternos internos. Praeterea angulus internus alterius interni supplementum est, atque etiam angulus externus est supplementum alterius (*theor. II. cap. I. sec. I*)

Corol. VII. Si duo aut plura plana parallela alio plano secentur, communes intersectiones erunt parellelae. Si enim non sint parallelae, sibi occurrere possunt, ac proinde et plana ipsa, in quibus hae lineae iacent; ideoque plana non forent parallela, quod est contra hypoth.

CAPVT II.

De superficierum mensura.

THEOREMA I.

SVPERFICIES PARALLELOGRAMMI RECTANGVLI AEQVALIS EST PRODVCTO EX BASI IN ALTITVDINEM.

Sit parallelogrammum rectangulum ABCD: 37
cuius altitudo AD certum contineat pedum numerum: e. g. 7; basis autem AB contineat 8. Divisum intelligi poterit parallelogrammum in 7 superficies, ut DM, quae singulae continent octo minores superficies quadratas, sive octo pedes *quadratos*, ut vocant. Quare habebitur parallelogrammi totius superficies, si octo pedes quadrati, qui prima superficie continentur, toties sumantur, quot sunt aequales superficies, ut DM,

Fig. *at vero* DM *continet* 7 *pedes;* ac proinde superficies tota parallelogrammi erit 7×8, nempe 56 pedum quadratorum. Evidens est, in hac demonstratione fingi posse alium quemlibet partium numerum, atque eadem valet demonstratio, etiamsi altitudo et basis parallelogrammi ponantur *mixtae ex integro et fractione*, ut patet ex *theor. I. cap. IV.*

Corol. I. Si parallelogrammum BD per diagonalem DB dividatur, habebuntur triangula duo rectangula aequalia ABD, BDC, quorum proinde superficies, utpote dimidia parallelogrammi, erit dimidium productum ex basi in altitudinem.

Eadem est demonstratio pro triangulo quolibet, etiam non rectangulo. Sit enim triangulum
38. CAB, non rectangulum. Ex puncto A demittatur perpendicularis AD, compleaturque rectangulum FCBE: erit triangulum CAD dimidium rectanguli FACD, et triangulum DAB dimidium rectanguli DABE; ac proinde $CAB = CDA + ADB = \frac{1}{2} CFAD + \frac{1}{2} AEBD = \frac{1}{2} FCBE = \frac{1}{2} CB \times AD$. Quare, ut antea, superficies trianguli est dimidium productum ex basi in altitudinem.

Idem patet, etiamsi perpendicularis EB trianguli CED cadat extra basim. Nam triangulum DEB est dimidium rectanguli DAEB, et triangulum CEB est dimidium rectanguli CFEB; ergo triangulum CED, seu $CEB - DEB = \frac{1}{2} CBEF - \frac{1}{2} DAEB$

$$= \frac{1}{2} CB \times AD - \frac{1}{2} DB \times AD = \frac{CB - DB}{2} \times AD$$

$= \frac{1}{2} CD \times AD$; ac proinde trianguli cuiuslibet

superficies aequalis est dimidio producto ex basi in altitudinem.

Corol. II. Quum parallelogrammum quodlibet dividi possit in duo triangula aequalia, quae ipsam habeant parallelogrammi basim eamdemque altitudinem; patet generatim, superficiem parallelogrammi cuiuscumque esse productum ex basi in altitudinem.

Corol. III. Quotlibet triangula, ideoque etiam quotlibet parallelogramma inter easdem parallelas, et super eadem vel aequali basi constituta, sunt aequalia. Ergo etiam triangula inter easdem parallelas cum parallelogrammis, et super eadem basi constituta, sunt parallelogrammorum dimidia; ac proinde etiam inter se aequalia. Ex hac propositione pendet vulgaris demonstratio theorematis, quod alio modo iam demonstravimus; nempe *quadratum hypothenusae in triangulo rectangulo aequale esse quadratis laterum seu cathetorum.* Hanc vero geometriae fecunditatem totiusque doctrinae geometricae coniunctionem variis exemplis tironibus saepe ostendere debet peritus magister. Vid. Wolf. *geom. theor. 89. part. I.*

Corol. IV. Quum triangula sint, ut dimidium productum ex basi in altitudinem, erunt etiam, ut productum totum; hoc est, triangulorum superficies sunt in ratione composita basium et altitudinum; ac proinde si bases fuerint aequales, triangula erunt inter se, ut altitudines; si autem altitudines fuerint aequales, erunt inter se, ut bases.

Corol. V. Si altitudo trianguli unius sit ad

Fig. trianguli alterius altitudinem, ut basis secundi trianguli ad basim primi, hoc est, si bases sint in ratione inversa altitudinum, triangula sunt aequalia. In hoc enim casu habetur proportio, in qua productum extremorum aequale est producto mediorum, hoc est productum ex altitudine primi trianguli in basim aequale est producto ex altitudine secundi trianguli in suam basim, ideoque triangula sunt aequalia; et versa vice si triangula sunt aequalia, erunt bases in ratione inversa altitudinum.

Corol. VI. In triangulis similibus superficies sunt in ratione duplicata laterum homologorum. Etenim quum triangula sint in ratione composita basium et altitudinum, atque (*ex hip.*) sint similia, loco basis substitui poterit altitudo, et contra. Quare triangula similia sunt, ut quadrata laterum homologorum.

THEOREMA II.

SVPERFICIES POLYGONI REGVLARIS AEQVALIS EST DIMIDIO PRODVCTO EX PERPENDICVLARI PER CENTRVM POLYGONI AD LATVS VNVM DEMISSA IN POLYGONI CIRCVMFERENTIAM.

Etenim triangula omnia, in quae resolvitur polygonum regulare, sunt aequalia (*theorem.* V. *cap.* III.) ideoque eamdem habent altitudinem
28. CI; ergo superficies polygoni regularis $= CI \times \frac{1}{2} AB + CI \times \frac{1}{2} BD + CI \times \frac{1}{2} DE$ cet. Quare quum $AB + BD + DE$ cet. sit tota polygoni periphe-

ria; patet, superficiem totam polygoni aequalem esse producto ex altitudine CI in dimidiam polygoni peripheriam, vel dimidio producto ex peripheria polygoni in altitudinem.

Corol. I. Superficies circuli aequalis est dimidio producto ex radio in circumferentiam, *quum circulus nihil aliud sit quam polygonum infinitilaterum.*

Corol. II. Si ex centro circuli ad circumferentiam ducantur radii duo, pars circuli duobus radiis et arcu comprehensa, *sector* dicitur. Evidens autem est, huius sectoris superficiem aequalem esse dimidio producto ex arcu in radium.

THEOREMA III.

FIGVRARVM SIMILIVM SVPERFICIES SVNT IN RATIONE DVPLICATA LATERVM HOMOLOGORVM.

Etenim triangula homologa, in quae reducuntur figurae similes, sunt earumdem figurarum partes similes (*theor.* IV. *cap.* IV.), ac proinde triangula homologa erunt, ut polygona tota; sed triangula similia sunt in ratione duplicata laterum homologorum (*corolar.* VI. *theorem.* I.); ergo in eadem etiam ratione sunt figurae similes quaelibet.

Corol. I. Superficies circulorum sunt, ut quadrata radiorum vel diametrorum; *quum omnes circuli sint inter se similes.*

Schol. Ex propositionibus praecedentibus nota quidem est ratio, quam habent variae circu-

Fig. lorum superficies ad illorum peripherias et suos radios. At ratio accurata inter circuli circumferentiam illiusque diametrum nondum definiri potuit ita, ut magnitudine diametri numeris expressa, numeris accurate exprimi non possit circuli circumferentia, ac proinde nec ipsa circuli superficies. In hoc sensu intelligi debet, quod vulgo dicitur, nondum scilicet inventam esse circuli *quadraturam*, quod quidem *quadraturae* nomen adhiberi solet, eo quod *quadratum* sit cuiuslibet superficiei communis mensura, ut iam demonstravimus. Eo igitur reducti sunt geometrarum conatus, ut ad illam quadraturam proxime, et quantum voluerint, accedant; hanc tamen accurate non attingant. Qua ratione autem hanc *approximationem* tentare soleant geometrae, ex ipsis elementis licebit intelligere. Divisus concipiatur circulus primo in quattuor partes aequales, deinde in 8, in 16, in 32, in 64, in 128 cet. prout cuique libuerit; et concipiamus per ea divisionum puncta tangentes et chordas respective ductas; habebuntur polygona duo, quo-
28. rum unum *inscriptum* circulo, alterum autem *circumscriptum*. Quae quidem ambo constant triangulis aequalibus. Porro per methodos explicatas, in his triangulis haberi semper poterunt bases, quae in primo casu sunt circulorum chordae, in altero autem tangentes; ac proinde omnium quoque chordarum et tangentium summa innotescet, hoc est, perimeter polygoni inscripti, quae circuli circumferentia proxime minor est, et polygoni circumscripti perimeter, quae proxime maior est, ita ut defectus vel excessus, quantum cuique placuerit, tenuis sit, et intra angustissimos limites contrahatur. Hac methodo Archimedes invenit, diametrum ad peripheriam esse in ratione 7 ad 22 ita, ut exiguus omnino sit peripheriae sic inventae excessus supra veram. Haec eadem ratio subtilius ab aliis quaesita est, et statuitur, ut 1 ad 3, 14159265 cet. perductis decimalibus numeris usque ad notas 127; quae quidem *approximatio* est fere infinita. Sed omnium vulgatissima ratio diametri ad peripheriam ea est, quam exprimunt numeri 113 et 355. Quare data circuli diametro habebitur peripheria, si haec fiat proportio 113 ad 355, ut diameter data ad peripheriam quaesitam. Haec multiplicetur per quartam diametri partem, habebitur superficies circuli, sive, ut vocant, *area*. Haec pauca dicta sint de ratione diametri ad peripheriam, sive de quadratura circuli, quam audacter se invenisse non raro iactitant viri geometriae imperiti, qui ipsum quidem quaestionis statum, ut plurimum, non intelligunt.

Simili methodo figura quaelibet curvilinea generatim dividi potest in partes rectilineas. Aliquando per geometriam sublimiorem figurae curvilineae area accurate haberi potest. Sed commodissima et generalis est praxis, qua figurae curvilineae circumferentia in minimas partes, et *physice* rectilineas dividitur, et deinde figurae totius area investigatur, ut fieri solet in polygonorum mensura.

Porro dum superficierum magnitudinem *pedi-*

bus quadratis aut alia qualibet mensura exprimimus, id nequaquam haberi debet tamquam contrarium iis, quae de numerorum *concretorum* multiplicatione demonstravimus in arithmetica (*schol. ad probl. IV. cap. II. arith.*) non enim pedes per pedes multiplicantur. Ita dum parallelogrammi superficies invenitur, multiplicando basim per altitudinem, hac operatione hoc unum significant geometrae; si nempe habeantur parallelogramma duo, adhibeaturque quantitas *linearis* quaelibet *a* pro communi basium et altitudinum mensura, et sit B numerus integer aut fractus, rationalis vel irrationalis exprimens, quoties basis parallelogrammi unius contineat quantitatem *a*: atque H exprimat, quoties altitudo eiusdem parallelogrammi eamdem contineat mensuram. Item sit *b* numerus exprimens, quoties mensura *a* contineatur in basi alterius parallelogrammi; *h* autem exponat, quoties altitudo parallelogrammi eiusdem contineat mensuram *a*; parallelogrammorum illorum superficies erunt inter se, ut productum ex duobus numeris B et H ad productum ex numeris duobus *b* et *h*. Haec est genuina huius operationis notio. Quare dum dicitur, parallelogrammi superficiem aequalem esse producto ex basi in altitudinem, *aequalitas* proprie dicta intelligi non debet; sed mera proportio. *AEqualitas enim non habetur, nisi determinetur absoluta mensura eiusdem speciei, quae pro unitate adsumitur.* Haec eadem observatio ad physicam saepe transferri debet, ubi de spatii, velocitatis et temporis mensura sermo est.

Fig.

SECTIO III.

De geometria solidorum.

CAPVT I.

De solidorum genesi et proprietatibus.

DEFINITIO I.

Si figura rectilinea AGR supra immotam rectam AE motu sibi semper parallelo feratur; so- 39.
lidum AGROFE inde genitum, *prisma* dicitur, et *rectum* vocatur, si AE describenti plano fuerit perpendicularis; si vero recta *e a* describenti plano *abcd* fuerit obliqua, dicitur *obli-* 50.
quum.

Def. II. Si planum describens fuerit parallelogrammum DCKH, solidum inde genitum 40.
ABGFCDHK dicitur *parallelepipedum.* Si autem planum describens sit quadratum ABCD, solidum ABCDEFGI *cubus* nuncupatur. Basis so- 41.
lidi seu planum describens potest esse quodlibet polygonum, et solidum inde genitum *prismatis* nomen retinet, si e singulis polygoni angulis extra planum consurgant lineae aequales et parallelae terminantes rectilineam solidi faciem.

Def. III. At si rectae lineae DA, FA, GA, EA, HA ex plani describentis angulis D, F, G, 42.
E, H exeuntes in apicem A coëant, solidum