bus quadratis aut alia qualibet mensura exprimimus, id nequaquam haberi debet tamquam contrarium iis, quae de numerorum *concretorum* multiplicatione demonstravimus in arithmetica (*schol. ad probl. IV. cap. II. arith.*) non enim pedes per pedes multiplicantur. Ita dum parallelogrammi superficies invenitur, multiplicando basim per altitudinem, hac operatione hoc unum significant geometrae; si nempe habeantur parallelogramma duo, adhibeaturque quantitas *linearis* quaelibet *a* pro communi basium et altitudinum mensura, et sit B numerus integer aut fractus, rationalis vel irrationalis exprimens, quoties basis parallelogrammi unius contineat quantitatem *a*: atque H exprimat, quoties altitudo eiusdem parallelogrammi eamdem contineat mensuram. Item sit *b* numerus exprimens, quoties mensura *a* contineatur in basi alterius parallelogrammi; *h* autem exponat, quoties altitudo parallelogrammi eiusdem contineat mensuram *a*; parallelogrammorum illorum superficies erunt inter se, ut productum ex duobus numeris B et H ad productum ex numeris duobus *b* et *h*. Haec est genuina huius operationis notio. Quare dum dicitur, parallelogrammi superficiem aequalem esse producto ex basi in altitudinem, *aequalitas* proprie dicta intelligi non debet; sed mera proportio. *AEqualitas enim non habetur, nisi determinetur absoluta mensura eiusdem speciei, quae pro unitate adsumitur.* Haec eadem observatio ad physicam saepe transferri debet, ubi de spatii, velocitatis et temporis mensura sermo est.

Fig.

SECTIO III.

De geometria solidorum.

CAPVT I.

De solidorum genesi et proprietatibus.

DEFINITIO I.

Si figura rectilinea AGR supra immotam re-
ctam AE motu sibi semper parallelo feratur; so- 39.
lidum AGROFE inde genitum, *prisma* dicitur,
et *rectum* vocatur, si AE describenti plano fue-
rit perpendicularis; si vero recta *e a* descri-
benti plano *abcd* fuerit obliqua, dicitur *obli-* 50.
quum.

Def. II. Si planum describens fuerit parallelogrammum DCKH, solidum inde genitum 40.
ABGFCDHK dicitur *parallelepipedum.* Si autem
planum describens sit quadratum ABCD, soli-
dum ABCDEFGI *cubus* nuncupatur. Basis so- 41.
lidi seu planum describens potest esse quodlibet
polygonum, et solidum inde genitum *prismatis*
nomen retinet, si e singulis polygoni angulis ex-
tra planum consurgant lineae aequales et paralle-
lae terminantes rectilineam solidi faciem.

Def. III. At si rectae lineae DA, FA, GA,
EA, HA ex plani describentis angulis D, F, G, 42.
E, H exeuntes in apicem A coëant, solidum

pyramis dicitur, quae vocatur *recta*, si perpendicularis AB ex vertice A ad basim ducta transeant per huius centrum; sin minus, pyramis est *obliqua*.

43. *Corol. I.* Prisma igitur oppositas facies AGR,
39. EFO aequales habet, similes et parallelas, quum AGR fluendo per AE motu sibi semper parallelo tandem congruat cum EFO. Praeterea dum planum AGR, motu sibi parallelo describit prisma AGROFE, latera AG, GR, RA motu sibi semper parallelo describunt parallelogramma AEFG, GFOR, ROEA. Ac proinde prisma tot parallelogrammis circumcirca terminatur, quot sunt latera plani describentis.

Corol. II. Parallelepipedum sex parallelogrammis terminatur, cubus autem sex quadratis aequalibus. Nam praeter facies quattuor parallelo laterum motu genitas, sunt etiam facies duae oppositae parallelae basis motu descriptae. Illa autem basis in primo casu est parallelogrammum, in altero autem quadratum.

Corol. III. In pyramide si omnia latera basis
42. DF, FG, GE, EH, HD sunt aequalia inter se, et latera rectilinea ipsius pyramidis DA, FA, GA, EA, HA pariter inter se aequalia, erunt omnes facies triangula isoscelia aequalia.

50. *Corol. IV.* Quaevis sectio prismatis EFGH,
42. vel pyramidis *dfgeh* facta plano basi parallelo est figura prorsus similis basi. Etenim sectionis parallela singula latera sunt singulis lateribus basis parallela; quum sint intersectiones planorum parallelorum cum iisdem planis. Quare singuli

anguli erunt aequales (*theor. II. cap. praeced.*); ac proinde sectio basi similis est.

Corol. V. In prismate EFGH sectio basi pa- 50.
rallela ipsi basi aequalis est, in pyramide autem 42.
latera sectionis homologa sunt minora, in ratione distantiae sectionis a vertice, ad distantiam basis ab eodem, *hoc est*, *basis* DFGEH *est ad sectionem dfgeh*, *ut* BA *est ad ba*. In prismate patet aequalitas, quum facies sint parallelogramma, ac proinde latera sectionis homologa aequalia sunt lateribus basis; ideoque sectio prorsus aequalis est basi. In pyramide proportio etiam patet, nam ob sectionem parallelam in unaquaque facie habebuntur triangula similia, DAF, D*af*, et FAG, *fag* cet.

Corol. VI. Omnia prismata collata inter se, si super basibus aequalibus, et inter eadem plana parallela constituantur, solida respective aequalia comprehendunt; idem dicendum est de pyramidibus eodem modo inter se comparatis. Secentur enim duo prismata ABCDEFGH, *abcdefgh* quot- 50.
cumque planis EFGH, *efgh*, quae sint basibus parallela, sectiones unius prismatis aequales semper erunt sectionibus respondentibus alterius. Nam in prismate omnes sunt aequales basibus. Porro prismata illa concipi possunt tamquam composita ex his omnibus sectionibus, quarum singulae singulis aequales sunt. Numerus autem sectionum altitudini prismatum aequalis est, seu distantiae inter plana parallela; ergo erunt ipsa prismata aequalia. Eadem demonstratio valet de pyramidibus. Nam in pyramide erunt sectiones ipsi basi

similes, et singula latera in una pyramide erunt ad latera homologa in pyramide altera, in eadem data ratione; nempe in ratione distantiae basis a vertice ad distantiam sectionis ab eodem vertice, quae quidem ratio eadem est, ut patet, quum pyramides terminentur plano basium, et alio plano sectionum planis parallelo. Numerus etiam sectionum aequalis est altitudini, seu eidem distantiae inter duo plana terminantia et parallela.

Corol. VII. Pyramides basium aequalium in eumdem apicem desinentes, vel eamdem utcumque altitudinem habentes sunt aequales. Nam per communem verticem ductum intelligatur planum basium planis parallelum; pyramides semper erunt super aequalibus basibus et in iisdem planis parallelis. Similiter si bases in eodem plano constituantur, vertices in eadem altitudine ad idem planum basibus parallelum terminabuntur.

Corol. VIII. Si pyramides eamdem habeant altitudinem; erunt inter se, ut bases. Etenim basis maior divisa intelligatur, si fieri possit, in partes basi minori aequales. Concipi poterit pyramis maior tamquam composita ex diversis pyramidibus, quae basim habeant basi minori aequalem; sed pyramides illae singulae erunt minori pyramidi aequales, ergo pyramis maior est ad minorem, ut pyramidum aequalium numerus in maiori pyramide, ad pyramidem minorem, hoc est, pyramides illae sunt inter se, ut bases.

At si basis maior minorem basim non conti-

neret accurate, sed tamen habeant aliquam communem mensuram; dividi fingantur bases in partes huic mensurae communi aequales. Iam pyramides duae tot alias continebunt pyramides aequales, quot sunt in utraque pyramide partes communes, ac proinde pyramides sunt etiam, ut bases.

Def. IV. Si recta sublimis BD motu sibi sem- 44.
per parallelo, circuli circumferentiam BGEH radat, figura solida hoc motu genita, *cylindrus* dicitur.

Def. V. At si recta AG per aliquod punctum 46.
fixum, et sublime A perpetuo transiens, altera extremitate G radat circuli circumferentiam GFMO, solidum AGM hoc motu genitum, *conus* vocatur. Vtriusque autem figurae *basis* vocatur circulus, cuius circumferentiam recta percurrit. Patet, cylindrum duobus circulis, conum autem circulo unico terminari. Recta per utrisque circuli centrum in cylindro transiens, in cono autem per basis centrum ipsumque coni verticem, *axis* dicitur. Si axis sit perpendicularis basi, cylindrus vel conus *rectus* solidum genitum appellatur, secus autem *obliquus* vocatur. Si autem basis fuerit quaevis alia curva, solidum dicitur *cylindricum* vel *conoidicum.* Figura 44. refert cylindrum rectum, figura autem 46. conum rectum repraesentat. Si semicirculus AHB circa immo- 47.
tam diametrum AB in orbem ducatur, donec ad pristinum situm redeat, solidum inde genitum *sphaera* dicitur.

Corol. I. Si basis prismatis vel pyramidis, au-

Fig. cto numero laterum et imminuta magnitudine in infinitum, abeat in curvam continuam, prisma abit in solidum cylindricum, pyramis in conoidicum. Item prisma, cuius latera sunt perpendicularia basi, mutatur in cylindrum rectum; pyramis vero, in qua basis latera sunt aequalia, et distantiae a vertice aequales, abit in conum rectum.

47. *Corol. II.* Si sphaera plano quovis secetur, sectio erit circulus HIFO, qui erit omnium maximus, si sectionis planum transeat per centrum sphaerae C, ac deinde erit maior vel minor, prout planum sectionis minus vel magis recedet a centro sphaerae. Sit enim sectio FIH, ad cuius planum ducatur diameter perpendicularis AB, quae plano secanti occurrat in E. Si punctum E congruat cum centro C; patet, rectas EI, EF fore radios sphaerae. Si autem cadat extra centrum, in triangulis CEI, CEF anguli ad E erunt recti, latus CE commune, et basis CI = CF; quare quodvis latus EI = EF, ac proinde in utroque casu sectio erit circulus, cuius centrum E; illud vero centrum in primo casu coincidet cum centro sphaerae. Patet autem, ob angulum rectum in E, radium circuli EF semper minorem fore radio sphaerae CF, nisi radii illi congruant, abeunte E in C. Evidens etiam est, eo minorem fore chordam HF, nempe circuli diametrum, quo maior fuerit distantia CE.

Corol. III. Sphaera considerari potest tamquam composita ex pyramidulis aequalibus numero infinitis et infinite parvis, quarum bases

sunt in ipsa sphaerae superficie, vertex autem communis est ipsum sphaerae centrum.

Schol. In capite praecedenti, ubi prismata et pyramides inter se comparavimus, aliqua dubitatio suboriri posset, quod nempe solida e superficiebus composita habere videamur. Et re quidem vera linea producitur motu continuo puncti, superficies motu continuo lineae, solidum motu continuo superficiei. At linea non ex punctis, sed ex lineolis; superficies ex areolis, non ex lineis; solidum ex spatiolis solidis, non ex superficiebus componitur. Neque genuinam linearum, superficierum et solidorum notionem tironibus proponunt nonnulli magistri, qui lineas tamquam e punctis, superficies ex lineis, solida ex superficiebus composita repraesentant. Itaque dum (*corolar. VI. cap. praeced.*) ex sectionum aequalitate prismatum et pyramidum aequalitatem concludimus, id non debet intelligi, quasi prismata et pyramides ex sectionibus planis componi velimus. Nam loco sectionis unius considerari possent sectiones duae infinite proximae, quarum (*in cit. corol.*) eadem foret distantia sive altitudo, ut patet ex planorum parallelismo. Igitur minima solida duabus sectionibus infinite vicinis comprehensa, forent aequalia in casu proposito, quare communem altitudinem negligere licuit solamque sectionum aequalitatem considerare; id vero facere numquam licet, nisi praeter sectionum aequalitatem ibi aequalis etiam sint binarum quarumcumque indefinite proximarum distantiae. Porro evidens est, hanc metho-

Fig. dum ad *exhaustionum* methodum saepius explicatam reduci, ac proinde ad severitatem geometricam esse omnino compositam.

CAPVT II.

De solidorum mensura.

PROBLEMA I.

39. PRISMATIS AGREFO, CVIVS LATERA RECTILINEA SVNT BASI PERPENDICVLARIA, SVPERFICIEM METIRI.

Singulae prismatis facies in hoc casu sunt rectangula AGFE, GFOR, AEOR sub singulis lateribus basis singulisque prismatis lateribus rectilineis contenta; ideoque omnium huiusmodi rectangulorum summa est tota basis perimeter in latus rectilineum ducta. Quare prismatis superficies, demtis basibus, est producto ex perimetro basis in unum ex lateribus rectilineis. Huic producto addatur dupla basis superficies; habebitur superficies tota prismatis.

Corol. I. Quum sex quadratis aequalibus ter-
41. minetur cubus ACEG, habebitur tota cubi superficies, si quadrati unius superficies sexies su-
40. matur. Quia vero parallelepipedum DK, BG sex terminatur superficiebus, quarum duae quaelibet oppositae sunt aequales; inveniantur tres inaequales superficies, illarumque summa bis sumatur: habebitur tota parallelepipedi superficies.

Corol. II. Quum basis cylindri BGEH consi- Fig.
derari possit, tamquam polygonum regulare ex 44.
lateribus numero infinitis et infinite parvis compositum; cylindrus haberi poterit tamquam prisma *infinitilaterum:* cuius proinde superficies habebitur, si tota basis perimeter seu circuli circumferentia ducatur in altitudinem, et producto addatur dupla basis sive dupla circuli superficies.

PROBLEMA II.

PYRAMIDIS DGA, CVIVS LATERA OMNIA SVNT 42.
AEQVALIA, ET BASIS LATERA SINT ETIAM AEQVALIA, SVPERFICIEM INVENIRE.

Quum facies omnes pyramidis in hoc casu sint triangula isoscelia aequalia DAF, FAG, GAE, EAH, HAD; erit omnium triangulorum summa aequalis dimidio producto ex tota basis perimetro in perpendiculum ex vertice pyramidis ad latus quodlibet basis demissum, quod dicitur vulgo *apothegma:* nam triangulum quodlibet aequatur dimidio producto ex latere basis ducto in suum perpendiculum. Haec autem singula perpendicula sunt aequalia; habebitur ergo in hoc casu pyramidis superficies, demta basi, *si basis perimeter ducatur in apothegma rectum.*

Corol. I. Conus est pyramis *infinitilatera;* ac proinde coni recti superficies aequalis est dimidio producto ex circumferentia basis in longitudinem, sive latus coni, sive in apothegma rectum, demta tamen basi.