Fig. dum ad *exhaustionum* methodum saepius explicatam reduci, ac proinde ad severitatem geometricam esse omnino compositam.

CAPVT II.

De solidorum mensura.

PROBLEMA I.

39. PRISMATIS AGREFO, CVIVS LATERA RECTILINEA SVNT BASI PERPENDICVLARIA, SVPERFICIEM METIRI.

Singulae prismatis facies in hoc casu sunt rectangula AGFE, GFOR, AEOR sub singulis lateribus basis singulisque prismatis lateribus rectilineis contenta; ideoque omnium huiusmodi rectangulorum summa est tota basis perimeter in latus rectilineum ducta. Quare prismatis superficies, demtis basibus, est producto ex perimetro basis in unum ex lateribus rectilineis. Huic producto addatur dupla basis superficies; habebitur superficies tota prismatis.

Corol. I. Quum sex quadratis aequalibus ter-
41. minetur cubus ACEG, habebitur tota cubi superficies, si quadrati unius superficies sexies su-
40. matur. Quia vero parallelepipedum DK, BG sex terminatur superficiebus, quarum duae quaelibet oppositae sunt aequales; inveniantur tres inaequales superficies, illarumque summa bis sumatur: habebitur tota parallelepipedi superficies.

Corol. II. Quum basis cylindri BGEH consi- Fig.
derari possit, tamquam polygonum regulare ex 44.
lateribus numero infinitis et infinite parvis compositum; cylindrus haberi poterit tamquam prisma *infinitilaterum:* cuius proinde superficies habebitur, si tota basis perimeter seu circuli circumferentia ducatur in altitudinem, et producto addatur dupla basis sive dupla circuli superficies.

PROBLEMA II.

PYRAMIDIS DGA, CVIVS LATERA OMNIA SVNT 42.
AEQVALIA, ET BASIS LATERA SINT ETIAM AEQVALIA, SVPERFICIEM INVENIRE.

Quum facies omnes pyramidis in hoc casu sint triangula isoscelia aequalia DAF, FAG, GAE, EAH, HAD; erit omnium triangulorum summa aequalis dimidio producto ex tota basis perimetro in perpendiculum ex vertice pyramidis ad latus quodlibet basis demissum, quod dicitur vulgo *apothegma:* nam triangulum quodlibet aequatur dimidio producto ex latere basis ducto in suum perpendiculum. Haec autem singula perpendicula sunt aequalia; habebitur ergo in hoc casu pyramidis superficies, demta basi, *si basis perimeter ducatur in apothegma rectum.*

Corol. I. Conus est pyramis *infinitilatera;* ac proinde coni recti superficies aequalis est dimidio producto ex circumferentia basis in longitudinem, sive latus coni, sive in apothegma rectum, demta tamen basi.

Fig. 42. *Corol. II.* Si pyramis DAG plano basi parallelo *truncata* ponatur, facies omnes reliquae pyramidis versus basim DFdf, FGfg, GEge, EHeh, DHdh, abeunt in trapezia aequalia; haec autem trapezia singula dividi possunt in triangula duo aequalia, quorum bases sunt sectionis et basis latera, altitudo autem communis est ipsarum basium distantia perpendicularis. Quare singulorum triangulorum mensura est dimidium productum ex singulis basibus in ipsam basium distantiam, ac proinde superficies pyramidis truncatae DGdg, aequatur dimidio producto ex summa perimetri basis et sectionis in distantiam perpendicularem basium, *sive in apothegma truncatum.*

46. *Corol. III.* Si conus rectus plano basi parallelo BC truncatus ponatur, coni huius truncati versus basim superficies GMBC, aequalis est dimidio producto ex peripheriarum summa in coni truncata longitudinem sive latus seu apothegma BG. Res autem facilius obtinetur, si inveniatur circulus DE, cuius peripheria aequalis sit semisummae peripheriarum BC, GM. Sumatur nempe punctum D medium inter B et G, ducaturque recta DE parallela sectioni BC, haec erit diameter circuli quaesiti. Etenim ductis perpendicularibus Bf, Dh: erit ob triangulorum DBf, DGh similitudinem $Bf : Df = Dh : Gh$, ac proinde, ob $Bf = Dh$, erit etiam $Df = Gh$; quare eadem est differentia inter diametros BC et DE, quae est inter diametros DE et GM; illa nempe differentia est dupla rectae Df vel Gh; ideoque recta DE est media proportionalis arit-

metica inter BC et GM, seu quod idem est, dia- Fig. meter DE aequalis est semisummae diametrorum BC et GM. Sed circuli, utpote figurae similes, suas habent peripherias diametris proportionales (*schol. cap. III.*); ergo circumferentia circuli, diametro DE descripti, est media proportionalis arithmetica inter circumferentias diametris BC et GM descriptas. Habebitur ergo coni truncati BCGM superficies, si multiplicetur circuli medii DE circumferentia per latus coni BG, seu per huius apothegma rectum.

Corol. IV. Si concipiatur cylindrus rectus KQTM circumscriptus sphaerae, habens pro axe 48. diametrum AB, pro basi circulum sphaerae maximum; superficies segmenti sphaerae HAF aequalis erit superficiei cylindri QNRK, et area totius sphaerae erit aequalis areae totius cylindri, demtis basibus. Etenim concipiatur particula quaevis Ff circuli *genitoris* ita parva, ut infinite accedat ad lineam rectam, productaque Ff et BA usque in G, recta FfG generabit superficiem coni recti, et Ff superficiem coni truncati, cuius mensura erit ipsa Ff ducta in semisummam peripheriarum, quarum radii sunt EF et *ef*. Ducta autem fx in EN perpendiculari, et PO ita, ut peripheria radio PO descripta aequalis sit semisummae peripheriarum praedictarum; erit coni truncati superficies, ut recta Ff ducta in circumferentiam, cuius radius est PO (*corol. praeced.*). Iam vero ob triangula similia rectangula fxF, GEF, Gf, GPO, OPC, erit fx vel Ee vel Nn: $Ff = GE : GF = GP : GO = PO : CO$ vel EN, ob EN = BT = CO (*sunt enim radii eiusdem circuli*), ideoque $Nn \times EN = fF \times PO$, atque ideo quum peripheriae sint, ut radii; erit productum ex Nn in peripheriam radio EN descriptam aequale producto ex fF in peripheriam radio PO descriptam. Primum autem productum exprimit aream genitam ab Nn, alterum vero aream genitam ab Ff. Quare tota area genita a toto arcu AfF aequatur toti areae genitae a recta QN; et abeunte REN in MBT, tota sphaerae superficies totius cylindri superficie aequalis est, demtis basibus.

Corol. V. Superficies sphaerae aequalis est producto ex circumferentia circuli maximi in axem sive diametrum sphaerae, ac proinde circuli maximi superficie quadruplo maior est (*cor. I. theorem. II. cap. II.*).

Corol. VI. Superficies tota cylindri circumscripti, inclusis basibus, est ad totam sphaerae superficiem, ut 3 ad 2. Nam superficies lateralis cylindri quadruplo maior est area circuli maximi, *cui si addantur duae superficies basium; fit tota superficies cylindri sexies maior sua basi seu circulo maximo.* Superficies autem sphaerae in hoc casu basi cylindri seu circulo maximo quadruplo maior est. *Proinde erit superficies sphaerae ad superficiem cylindri circumscripti*, ut 4, 6, seu ut 2, 3.

PROBLEMA III.

Prismatis soliditatem metiri.

Polygonum, seu quaelibet figura ABCD, quae prismatis basis est, in ipsam prismatis altitudinem ducatur: habebitur soliditas tota prismatis, ut patet ex genesi ipsius solidi, quod producitur motu parallelo basis, ac proinde basis sive polygoni superficies per altitudinem multiplicari debet. *Nempe sectiones basi parallelae ipsi aequales sunt, atque etiam tot numero exsistunt sectiones, quot in altitudine continentur* (corol. VII. cap. I.). 50.

Corol. I. Soliditas cubi ACEG habetur multiplicando faciem quadratam basis ABCD, per ipsum quadrati latus AE. Parallelepipedi AFDK soliditas invenitur, si parallelogrammi DCHK superficies per altitudinem AD multiplicetur. Habetur autem soliditas cylindri BF, si basis circuli, nempe superficies BGEH, in altitudinem cylindri BD ducatur. 41. 40. 44.

Corol. II. Eadem in solidorum mensura ratiocinatione instituta, quam in metiendis superficiebus adhibuimus (*schol. ad theor. III. cap. II.*), evidens est, cubum esse communem solidorum mensuram, non secus ac quadratum est mensura superficierum. Itaque pes solidus continet pollices cubicos 1728, nempe tres habet dimensiones, quarum singulae 1 pedi sive 12 pollicibus aequantur: et ita dicendum de alia qualibet mensura.

Fig.

PROBLEMA IV.

Pyramidis soliditatem invenire.

49. Si ad centrum I cubi GL fiat quadrata pyramis, cuius basis QZLO sit cubi facies quadrata, et altitudo IP dimidia altitudine cubi, evidens est, totam cubi soliditatem dividi in sex huiusmodi pyramides quadrilateras aeque altas et aequalium basium; ac proinde aequales. Igitur pyramis quaelibet erit sexta pars cubi. Sed cubi mensura aequalis est producto ex basi in altitudinem. Ergo illarum pyramidum quaelibet erit aequalis producto ex basi in sextam partem altitudinis HP, vel quod idem est, tertiam partem altitudinis HI. Ergo huiusmodi pyramidis soliditas aequalis est producto ex basi in tertiam partem altitudinis, seu, quod idem est, aequator tertiae parti prismatis eiusdem basis et eiusdem altitudinis.

Generatim pyramis quaelibet aequalis est producto ex basi in tertiam partem altitudinis, sive pyramis quaelibet est tertia pars prismatis eamdem cum ipsa pyramide basim habentis, eamdemque altitudinem. Etenim sit pyramis quaelibet, fingaturque cubus, cuius altitudo sit altitudinis pyramidis dupla. Iam si ex centro cubi alia exeat pyramis, cuius basis sit facies quadrata cubi; evidens est, hanc pyramidem habere eamdem cum proposita pyramide altitudinem, ac proinde pyramides illae sunt inter se, ut bases (*corol. VIII. theor. I. cap. praeced.*). Sed soliditas pyramidis cubi basi innixae aequalis est producto ex tertia parte altitudinis in basim; ergo ob altitudinem eamdem in utraque pyramide erit soliditas propositae pyramidis aequalis producto ex tertia parte altitudinis in basim. Ideoque generatim pyramis quaelibet est tertia pars prismatis eiusdem basis et altitudinis.

Corol. I. Quum cylindrus tamquam prisma infinitilaterum, itidemque conus tamquam pyramis infinitilatera considerari possint; erit conus tertia pars cylindri eamdem habentis basim et eamdem altitudinem.

Corol. II. Quum sphaera haberi possit tamquam composita ex infinitis pyramidulis, quarum vertex communis est in centro sphaerae; bases autem omnes simul sumtae totam occupant sphaerae superficiem; singulae illae pyramides aequales sunt producto ex tertia parte radii in suas bases, ac proinde tota pyramidum summa aequalis est producto ex omnibus basibus simul sumtis, hoc est, ex superficie sphaerae in tertiam partem radii. Ergo tota sphaerae soliditas habebitur, multiplicando tertiam radii partem per circuli maximi superficiem quater sumtam.

Corol. III. Quum soliditas cylindri sit productum ex diametro in circulum maximum, soliditas sphaerae aequalis est duabus tertiis partibus cylindri circumscripti. *Si nempe peripheria circuli maximi sit* $= p$, *et radius* $= r$, *erit area circuli maximi* $= \frac{1}{2}\ pr$, *adeoque soliditas cylindri circumscripti* $= pr^2$. *Soliditas vero sphaerae est* $= 2pr \times \frac{1}{3}\ r = \frac{2}{3}\ pr^2$. *Proinde erit soli-*

ditas sphaerae ad soliditatem cylindri circumscripti $= \frac{2}{3} pr^2 : pr^2 = \frac{2}{3} : 1 = 2 : 3.$

THEOREMA I.

SOLIDA DVO SIMILIA SVNT IN RATIONE TRIPLICATA LATERVM HOMOLOGORVM.

Ex solidorum definitione et ex praecedentibus propositionibus evidens est, corporis cuiuslibet soliditatem esse semper, ut productum ex aliqua superficie in aliquem axem vel aliquam altitudinem. Superficies autem ex duabus dimensionibus componitur. Ergo solidum quodlibet est in ratione composita trium dimensionum homologarum seu eiusdem nominis; sed solida similia ea dicuntur, quae singulas dimensiones homologas habent proportionales; ergo solida similia sunt in ratione composita ex tribus dimensionibus proportionalibus; ac proinde in ratione triplicata unius cuiuslibet dimensionis homologae.

Corol. I. Sphaerae sunt in ratione triplicata diametrorum. Etenim sphaerarum soliditates sunt inter se, ut circuli maximi superficies in radium ducta * (*corol. II. theor. praeced.*). Sed circulorum superficies sunt in ratione duplicata semi-

* *Hoc est, soliditates sphaerarum sunt, ut quattuor circuli maximi superficies ductae in* $\frac{1}{3}$ *radii; sed quantitatum partes determinatae sunt, ut quantitates ipsae: proinde valet etiam proportio Auctoris.*

diametrorum (*corol. I. theor. III. sect. praeced.*); ergo sphaerae sunt in ratione triplicata semidiametrorum vel diametrorum. Idem facile patet ex sphaerarum similitudine. Quum enim sphaerarum soliditates per circuli maximi superficiem determinentur, sintque circuli figurae similes; evidens est, sphaeras esse solida similia, ac proinde in ratione triplicata diametrorum.

Corol. II. Cubi sunt solida similia, itemque similes sunt cylindri sphaeris circumscripti (*corol. III. probl. praeced.*). Ergo cubi sunt in ratione triplicata laterum, et cylindri sphaeris circumscripti sunt in ratione triplicata diametrorum.

Corol. III. Prismata omnia, si inter se comparentur, ac pyramides omnes inter se erunt ut producta ex basibus et altitudinibus. Quare si bases fuerint aequales, erunt solida ut solae altitudines; si autem altitudines fuerint aequales, erunt ut solae bases. Si ea solida fuerint aequalia, altitudines erunt basibus reciproce proportionales. Et versa vice, si bases fuerint altitudinibus reciproce proportionales, solida erunt aequalia. Tandem si bases fuerint similes, et altitudines lateribus basium homologis proportionales, solida erunt in ratione triplicata laterum homologorum vel altitudinum.

Schol. De solidorum rectorum superficiebus in capite praecedenti sermonem habuimus. Verum si solida fuerint obliqua, superficierum mensura sublimiorem geometriam aliquando postulat. Quod spectat ad solida superficiebus planis terminata, res est nullius difficultatis. Quum enim solidorum

illorum facies sint polygona rectilinea, ad triangulorum superficiem reduci semper poterit illorum mensura. Prismatis cuiusvis exemplo rem illustrabimus. Per punctum quodlibet in aliquo prismatis latere traductum intelligatur planum ad latus illud perpendiculare; idem planum alia omnia prismatis latera, utpote parallela, perpendiculariter quoque secabit (*cor. v. theor. I. cap. I. sect. II.*), atque sectio erit polygonum, cuius unumquodque latus ad duo parallela prismatis latera erit perpendiculare. Quare superficies uniuscuiusque faciei aequabitur producto ex unoquoque sectionis latere in prismatis latus quodlibet, ob laterum omnium aequalitatem; ac proinde prismatis superficies aequatur producto ex omnibus lateribus sectionis, hoc est, ex tota sectionis perimetro in prismatis latus quodlibet seu eius oporhegma. Iam si prisma rectum ponatur, planum lateri perpendiculare coincidit cum basi, ideoque superficies prismatis aequalis est producto ex perimetro basis in altitudinem, ut antea, quod idem valet in superficie cylindri, qui potest considerari tamquam prisma infinitilaterum. At si rectus non fuerit cylindrus AC,
45. planum per cylindri axem vel latus quodlibet perpendiculariter traductum GMIM sectione sua cum cylindro obliquo generabit curvam, quae *ellipsis* vocatur a geometris, de qua in append. mox addenda pauca dicemus. Erit autem cylindri obliqui superficies aequalis producto ex ellipsis GMIM circumferentia in latus cylindri seu apothegma AB. Quod spectat ad coni obliqui superficiem, patet, eam ad sectoris circularis su-

perficiem, ut fit in cono recto, reduci non posse, quum in cono obliquo aequales non sint lineae omnes ductae ex vertice coni in basim Sed haec pauca monuisse satis sit; haec enim ad geometriae elementa non pertinent.

APPENDIX.

De lineis curvis.

Lineae curvae notionem ita simplicem esse iam observavimus, ut explicatione ulla vix clarior effici possit. Quare praetermissa definitione, de lineis curvis generatim, et deinde de parabola et ellipsi pauca exponemus, alia deinde, ubi necessitas occurret, demonstraturi.

Def. I. In curva qualibet recta AD lineas parallelas, ut M*m*; N*n*, aequaliter dividens, *diameter* curvae appellatur. *Axis* autem vocatur, si easdem parallelas ad angulos rectos secet. 52.

Def. II. Punctum A in axe *vertex* curvae dicitur: rectae autem parallelae M*m*, N*n* dicuntur *ordinatae:* pars diametri vel axis inter punctum A et ordinatam comprehensa, dicitur *abscissa. AEquatio* curvae appellatur formula algebraica, quae relationem inter semiordinatas et abscissas exprimit. Ita demonstratum est, in circulo quadratum rectae EO aequale esse produ- 24.
cto ex CO in OL. Iam diameter CL dicatur a, sitque CO$=x$, et EO$=y$. Erit OL$=a-x$; ac proinde $y^2=ax-x^2$, quae est aequatio ad circulum.