IACQVI
INSTITV
PHILOS

Sin necesidad de la misma
sera el primer termino en
la prog.n geometrica

INSTITVTIONES

PHILOSOPHICAE

AVCTORE

FRANCISCO IACQVIER

ex minimorum Familia, primariarum per Europam academiarum socio, in lyceo romano, et in collegio urbano de propaganda fide professore.

AD VSVM SCHOLAE VALENTINAE.

TOMVS III.

VALENTIAE

IN OFFICINA BENEDICTI MONFORT.

MDCCCXV.

SVPERIORVM PERMISSV.

AUCTOR LECTORI.

Physicam inter geometricamque doctrinam tam arcta est necessitudo, ut apud omnes cultiores viros tamquam vanissimum merito habeatur physicae studium geometriae praesidio destitutum. Quae quum ita sint, nemo mirari debet, quod a studiosis adolescentibus sacrae licet theologiae destinatis, arithmeticae et geometriae elementa requiram. Si enim his careant doctrinae physicae adiumentis, satius est, eos huic praeclarissimo studio valedicere omnino; *melius est nihil scire, quam male scire.* Tale enim cognitionis, potius dicam ignorantiae, genus mentis aciem hebetat, rectumque iudicium corrumpit, et omni studiorum generi nocet plurimum. At me fortasse reprehendent censores aliqui, quod nova elementa ediderim, quum nihil fere in orbe literario frequentius sit elementorum libris. Neque talem me esse, quis sibi falso persuadeat, ut de aliis elementis minus laudabiliter sentiam, huncque meum libellum supra alios omnes extollam, quod tamen a plerisque elementorum auctoribus nimis arroganter factum video. Et quidem variis elementis, ratione licet et methodo diversissimis, suam iustam laudem concedendam esse, facile quisque fatebitur; si varias attenderit adolescentum conditiones atque voluntates. Alii sublimiorem physicam mathesimque universam addiscere et funditus haurire, sibi proponunt. Alii autem aliis studiis gravioribusque negotiis nati institutiones geometricas strictim leviterque tantum arripiunt, quantum scilicet expoliendo perficiendoque ingenio satis est. Alii ultra geometriam, quam *practicam* vocant, nolunt progredi, illaque minus nobili geometriae parte contenti sunt. Alii tandem alios fines aliaque consilia in animo habent. ¿Quid ergo mirum, quod ego arithmeticae et geometriae elementa ad meas physicas institutiones accommodatissima proponam? At quaecumque sit elementorum ratio, demonstrationis severitas religiose semper tenenda est, neque obscura multarum propositionum farragine iuvenum mens est obruenda, sed splendidiori accurationis geometriae lumine illustranda. Monendi ergo sunt studiosi adolescentes, ut ab iis caute abstineant elementis, quae nec satis accurata methodo conscripta sunt, nec firmissimo demonstrationum robore munita. Perniciosissima quidem sunt studiosae iuventuti talia elementa, quae eos habent auctores, quorum doctrina tota in elementis continetur. Verum si recto proportionum ordine ne-

xuque necessario colligatae fuerint demonstrationes omnes; ex hoc studio diligenter, et, ut par est, instituto, in quolibet scientiarum genere fructum maximum sine ulla dubitatione polliceor. Nec quidquam existimationis geometrico studio detrahi debet, si aliqui exstiterint in rebus geometricis etiam versatissimi, in vulgari tamen agendi ratione et in rebus quoque familiarissimis omnino inepti. Id quidem, quod summa iniuria obiici solet, tribuendum est praecipiti quorumdam geometrarum iudicio. Non desunt, fateor, celeberrimi etiam viri, qui in rebus mathematicis toti occupati, necessaria rerum tractandarum vel gerendarum principia et elementa non satis tenent; atque hinc mirum non est, quod aliquando errent graviter geometrarum non geometriae vitio. Et re quidem ipsa, si fons erroris probe attendatur, vitium in principiis, non vero in *consequentiis* latere deprehenditur. Contra autem alii homines non pauci veris utuntur principiis, errant autem in *consequentiis*. Itaque huc mihi maxime reducendum videtur geometrici studii pretium: si nempe duos fingere liceat homines eadem ingenii vi eodemque cognitionum gradu praeditos, atque *ceteris*, ut vulgo dicunt, *paribus*, unus autem sit geometriae auxilio adiutus, alter autem destitutus; facile mihi persuadeo, virum geometram in quolibet scribendi genere, in tractanda etiam quaestione theologica multo excellentiorem futurum. Neque enim quae prima sunt, postrema dicet, et vicissim; nec quae perspicua sunt et illustria, minus accurata methodo obscurabit, aut quae abstrusa sunt et involuta, densiori caligine non obvolvet. Verum ne geometriae studio nimis tribuere videar, et hanc, quam maxime amo, disciplinam magnificentius praedicare, de iis non loquor melioris ingenii viris, in quibus excellens iudicium meditatione et experientia subactum atque perfectum miramur, sive graviora tractanda sint negotia, sive studiis quibuscumque danda sit opera. Has iustissimas geometriae laudes attigisse satis sit ad excitandam adolescentum voluntatem. Faxit D. O. M. ut hoc meo qualicumque labore utantur, non in rebus physicis tantum, sed etiam ut in studiis gravioribus, quem quidem fructum maxime exopto, ratiocinandi vim accuratiori methodo augeant atque amplificent, huius tamen sanctissimi dogmatis probe memores: *captivare intellectum in obsequium fidei.*

Ceterum monendum superest, scholia et appendices in his elementis praetermitti posse ab iis, qui minori pollent intelligendi facilitate; minus enim necessaria sunt haec additamenta.

LECTORI.

Matheseos elementa iacquieriana, quae hoc tertio tomo continentur, aliquatenus a ceteris eorumdem editionibus discrepantia, L. O. adinvenies. Ne autem variationem temere inconsultove factam iudices; oportet, illius causas intelligas. Iacquierius elementa isthaec concisiori et obscuriori stilo elucubraverat, quam ut tirones studiosi ferre possent: quod sane nemo mirabitur, qui noverit, viros in subliiori mathesi exercitatos ut plurimum dedignari prolixiores consecutiones, quae ab aliis in eo studio prima stipendia merentibus praecipue desiderantur. Hunc autem institutionum suarum naevum Iacquierium animadvertisse nobis persuassum est, experientia, ut opinamur, ipsum edocente, doctrinam a se antea traditam ad tironum captum non plane accommodatam fuisse: eaque de causa factum putamus, ut elementa matheseos simplicius accuratiusque tradiderit in editione sua romana ann. 1777, quae propterea et emendatior est, et ab aliis haud parum diversa. Atque haec est prima variationis nostrae ratio. Nempe inter romanam istam aliasque editiones ea seligere curavimus, quae accuratioris simpliciorisque doctrinae specimen exhiberent, a Iacquierii tamen littera nec hilum recedentes.

Sed neque in editione ista romana Auctor noster ita elementa sua explanavit, ut tirones non omnino ullas consecutiones desiderent, quibus demonstrationum vis sibi magis nota fiat atque perspicua. Quapropter operae pretium duximus, nonnulla, etsi diverso charactere notata, demonstrationibus interponere, quibus tironum intelligentia iuvaretur ad illarum vim sentiendam. Pleraque praeterea confuse, et aliqua inaccurate, ne dicam falso, tradita in editione romana ceterisque remansere, quae satius duximus penitus corrigenda. Eiusmodi sunt, quae habentur de exponentis definitione, de notione laterum homologorum in triangulis, de quantitatibus pure geometricis tamquam incommensurabilibus habitis, aliisque, quae partim expunximus, partimque mutavimus. Eodem etiam consilio, elementa scilicet matheseos edendi, quantum fieri possit, perspicua atque ad tironum captum accommodata, tabulam unam figurasque adiiecimus, quibus eadem iacquieriana doctrina quasi digito indicari ac demonstrari possit. Mutationes tamen omnes diverso charactere exhibuimus, ne tibi copiam adimeremus de labore nostro iudicandi. Haec omnia tibi, ut existimamus, non displicitura, L. B. te monitum voluimus, ut has iacquierianas matheseos institutiones inoffenso pede percurras. Vale.

INDEX

ARITHMETICA ET ALGEBRA.

GEOMETRIA.

ELEMENTA ARITHMETICAE

TVM VVLGARIS TVM SPECIOSAE.

CAPVT I.

De praecipuis utriusque arithmeticae operationibus generatim consideratis.

DEFINITIO I.

ARithmetica generatim definitur: *scientia computandi.* Computatio autem vel fit per vulgares numeros, ac proinde ei determinatos 1, 2, 3, cet. vel per alphabeti litteras a, b, c, cet. quae numerum quemlibet aut quantitatem quamlibet designant. Prima computandi ratio *arithmetica* simpliciter dicitur: altera autem vocatur arithmetica *speciosa* vel *algebra*, et convenientius a Newtono *arithmetica universalis* appellatur.

Scholion. Has quidem definitiones secundum vulgarem docendi consuetudinem praemittimus. Monendum tamen est, scientias quasdam vix clare definiri posse, nisi earumdem scientiarum diligens praecedat analysis atque accurata explica-

GEOMETRIA.

ELEMENTA ARITHMETICAE

TVM VVLGARIS TVM SPECIOSAE.

CAPVT I.

De praecipuis utriusque arithmeticae operationibus generatim consideratis.

DEFINITIO I.

A*Rithmetica* generatim definitur: *scientia computandi.* Computatio autem vel fit per vulgares numeros, ac proinde ei determinatos 1, 2, 3, cet. vel per alphabeti litteras a, b, c, cet. quae numerum quemlibet aut quantitatem quamlibet designant. Prima computandi ratio *arithmetica* simpliciter dicitur: altera autem vocatur arithmetica *speciosa* vel *algebra*, et convenientius a Newtono *arithmetica universalis* appellatur.

Scholion. Has quidem definitiones secundum vulgarem docendi consuetudinem praemittimus. Monendum tamen est, scientias quasdam vix clare definiri posse, nisi earumdem scientiarum diligens praecedat analysis atque accurata explicatio. Ita in praesenti casu, explicatis arithmeticae et algebrae operationibus, recte iam dicere liceret: hanc, quam vobis explicavimus, scientiam esse, quae *arithmetica* vel *algebra* vocatur.

Def. II. Per *numerum* arithmetici intelligunt *unitatum multitudinem.* At accuratius a Newtono definitur numerus: *relatio seu ratio quantitatis cuiusvis ad aliam eiusdem generis quantitatem.*

Scholion. Quae quidem definitio, ut in bono lumine collocetur, observandum est, quantitatem quamlibet cum alia eiusdem generis quantitate comparatam vel ea minorem esse, vel maiorem, vel tandem ipsi aequalem; hoc est, magnitudinem aliquam vel in alia contineri, vel aliam certo modo continere. Hic autem modus, quo magnitudo aliqua aliam continet, vel in ea continetur, *numerus* dicitur. E. g. numerus 3 exprimit rationem magnitudinis alicuius ad aliam minorem, quae pro unitate adsumitur, et in maiori ter continetur. Contra autem si quantitas maior 3 pro unitate adhibeatur, erit quantitas 1 tertia pars quantitatis maioris, quae tamquam unitas consideratur, sive 1 ter in quantitate maiori continetur.

Def. III. Inde autem intelligitur, quid sit numerus *integer*, quid numerus *fractus*. Integer dicitur, *quem unitas metitur*. Fractus, *qui est pars unitatis.* Ita 1, 2, 3, cet. sunt numeri integri; sed dimidia, tertia, quarta, cet. pars unitatis sunt numeri fracti. Ita autem exprimi solent numeri fracti $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, cet. Ratio, quam modo definivimus, si nempe consideretur, quomodo quantitas una alteram contineat, dicitur *geometrica.*

Vocatur autem *arithmetica*, si excessum tantummodo quantitatis unius supra aliam consideremus. Duarum rationum aequalitas *proportio* dicitur vel *geometrica* vel *arithmetica*, pro diversa rationum qualitate. Quare ad habendam proportionem quattuor quantitates requiruntur; et prima ad secundam esse dicitur, ut tertia ad quartam.

Scholion I. Numeri omnes in vulgari arithmetica decem notis sive characteribus designantur. Sunt autem 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0, quorum ultimus *cyphra* sive *zero* appellatur. Harum notarum varia est significatio non solum ex diversa illarum figura, sed etiam ex diverso, quem occupant, loco. Quae ad dexteram postrimae occurrunt, designant unitates; quae proxime praecedunt, unitatum decades; exinde centenarii sequuntur, millenarii; et sic deinceps per decades et centenarios progrediendo. Huic autem usui potissimum cyphra destinatur. Quum nempe ipsa nullum designet numerum, auget tamen reliquarum notarum significationem, longius illas ab extremo in dextera numero versus sinistram removens. Sic unitatis nota, quae sola unicam designaret unitatem, beneficio unius vel duplicis cyphrae in secundum aut tertium locum reiecta, denas unitates aut centenas significabit. Breviores numeri facile leguntur. Ita 247 exprimunt ducentas quadraginta septem unitates. At in prolixioribus numeris aliquo opus est artificio. Ita si legere oporteat longiorem numerum:

. 3 . 2 . 1 .
3 242 578 562 914 020 467 212. Hunc ita

divides a postremis dexterioribus numeris exorsus. Nempe tres postremos divides a praecedentibus puncto superius apposito, tribus sequentibus adscribes 1, et sic deinceps reliquis ternariis punctum alternatim oppones vel numerum; ita tamen, ut numeri unitate semper augeantur, quemadmodum heic factum vides. His peractis, quamlibet notarum classem perinde leges, ac si sola esset; et ubi punctum invenies, dic mille; ubi 1, dic decies centena millia, seu, ut vulgo loquimur, *millionem;* ubi 2, dic milliones millionum sive *biliones;* ubi 3, dic *trilliones*, et sic deinceps. Sic itaque legendus est numerus praecedens: ter mille ac ducenti quadraginta duo trilliones, quingenta septuaginta octo millia ac quingenti sexaginta duo biliones, nongenta quatuordecim millia ac viginti milliones, quadringenta sexaginta septem millia, bis centum ac duodecim.

Scholion II. Vulgares explicavimus arithmeticae characteres, quorum auctores feruntur astronomi arabes. Aliquid iam dicendum est de notis, quae *romanae* appellantur. Notae illae, quarum in physicis institutionibus usus recurret, maiusculis alphabeti litteris exprimuntur. His characteribus *romanorum* nomen factum fuisse creditur, quod eos in monetis publicisque monumentis usurpaverint veteres romani. Litterae, quae numeros romanos componunt, sunt septem sequentes I, V, X, L, C, D, M. Harum notarum haec est significatio. I, unitas: V, quinque: X. decem: L, quinquaginta: C, centum: D, quingenta: M, mille. Si duo I, scribuntur in hunc modum II, aequiva-

lent binario; si tria scribantur III, significant ternarium; numerus quaternarius ita exprimitur IV; et numerus novenarius hoc modo IX: nempe unitas numeris V, X praefixa eos mulctat unitate. Verum ad exprimendos numeros vulgares 6, 7, 8, scribi solet VI, VII, VIII. Si numero L vel C preemittatur X; numeri illi decade minuuntur; ita XL significant 40, et XC 90. Contra autem si numerum L sequatur X in hunc modum LX; numerus praecedens augetur decade, significans 60 cet. Aliquando numerus 400 expressus fuit litteris CD, sed raro. Praeter litteram D, quae exprimit 500, idem numerus significatur etiam hoc modo IↃ. Ita etiam loco M, aliquando scribitur CIↃ. Eodem modo exprimi potest 600 per IↃC: et 700 per IↃCC cet. Si litterae C, et Ↄ ante et post addantur, numerus CIↃ augetur in ratione decupla. Ita CCIↃↃ significat 10000, CCCIↃↃↃ 100000, cet. Hi erant communes arithmeticae characteres apud veteres romanos, qui etiam numerum millenarium designare solebant adscripta numeris millenario minoribus lineola; hoc modo $\overline{\mathrm{V}}$, et significat 5000; $\overline{\mathrm{LX}}$, et designat 60000 Similiter $\overline{\mathrm{M}}$ aequivalet 1000000, et $\overline{\mathrm{MM}}$ designat 2000000. A recentioribus nonnullis scriptoribus variationes aliquae fuerunt adhibitae; ita litteris IIX designant 8, litteris XXCIX exprimunt 89. Qua ratione horum numerorum ope computationes suas iniverint veteres romani, nos omnino latet. Aliquam procul dubio habuerunt arithmeticam, quam quidem invenire, aut aliam non mul-tum dissimilem substituere, problema est a viris arithmeticae et antiquitatis studiosis solvendum.

Scholion III. Quoniam numeri nihil aliud sunt, quam magnitudinum rationes quaedam certis signis distinctae; evidens est, arithmeticam sive scientiam numerorum esse artem diversas illas rationes inter se combinandi, illasque certis characteribus distinguendi. Hinc nascuntur arithmeticae operationes praecipuae. Etenim diversae numerorum combinationes hac revocari possunt, ut nempe mutuus eorum excessus vel modus, quo se invicem continent, expendatur et adsignetur. Ex his autem intelliguntur mox explicandae quattuor vulgares arithmeticae operationes: ***additio, subtractio, multiplicatio, divisio.***

Def. IV. Additio vocatur illa arithmeticae operatio, qua plures numeri simul colliguntur. Subtractio autem dicitur operatio, qua numeri a se invicem subtrahuntur. Ita si addantur 2 et 3, ut efficiantur 5: vel minor numerus 2 a maiori 3 subtrahatur, ut remaneat 1; in primo casu dicitur additio, in altero autem subtractio.

Scholion. Patet, in additione et subtractione considerari mutuum numerorum excessum. Etenim in additione excessus summae ab alterutro numero innotescit; in subtractione autem mutua numerorum differentia investigatur.

Def. V. Multiplicatio appellatur illa arithmeticae operatio, qua idem numerus sibimetipsi pluries additur. Ita si 3 per 4 multiplicari debeat, idem est, ac si 4 sibi ipsi ter addatur, vel 3 sibi ipsi quatter adiungatur; prodibitque 12. Divi-

sio est arithmeticae operatio, in qua numerus unus ab alio subtrahitur, quantum fieri potest; ita numerus 4 ex 12 ter subtrahi potest.

Scholion I. Itaque patet, in multiplicatione et divisione considerari modum, quo numeri sese mutuo continent. Ita in praecedenti multiplicatione innotescit, numerum 12 ter continere numerum 4: per divisionem autem demonstratur, numerum 4 ter contineri in 12.

Scholion II. Ex his evidens est, multiplicationem nihil aliud esse, quam additionem compositam; atque etiam divisionem nihil aliud esse, quam compositam subtractionem. Quare ad duas dumtaxat revocari possunt quattuor vulgares arithmeticae operationes. Hinc arithmeticae operationes accurate omnino definivit Newtonus: ***compositionem et resolutionem arithmeticam;*** quae quidem definitio ex ipsa arithmeticarum operationum natura derivat. Quamvis autem numeri sint rationes geometricae, ex dictis tamen evidens est, additionem et subtractionem proprie revocari ad rationem arithmeticam; multiplicationem vero et divisionem ad rationem geometricam referri. Ceterum praeter vulgares quattuor enumeratas operationes aliae sunt plurimae; sed hae omnes ad primas referuntur, ut ex dicendis manifestum fiet. Heic autem regulas arithmeticae generatim considerasse satis sit. Patet autem, hanc, quam tradidimus arithmeticae notionem, arithmeticae speciosae communem esse. Itaque licet arithmeticae nomen generatim usurpemus; illud tamen de arithmetica speciosa intelligi quoque volumus. Iam vero universam arithmeticae utriusque doctrinam breviter et distincte explicemus, quantum postulant nostrarum institutionum necessitas atque iniuncta brevitas.

CAPVT II.

De quattuor primis arithmeticae operationibus in numeris integris.

I.

Prima arithmeticae operatio dicitur *additio*, quae ex praecedentibus satis intelligitur. Totam huius operationis praxim declarabimus atque demonstrabimus.

PROBLEMA I.

NVMEROS INTEGROS ADDERE, SIVE IN VNAM SVMMAM COLLIGERE.

II. Addendi proponantur numeri in hoc exemplo expressi. Quattuor numerorum series ita alias aliis subscribe, ut unitates unitatibus subiiciantur, decades decadibus, et sic de reliquis. Tum infra omnes numeros ducta lineola, et a dextera columna exorsus dic: 1 et 2 efficiunt 3: 3 et 8 efficiunt 11: 11 et 1 efficiunt 12. Habes ergo in hac columna unam decadem unitatum, ac praeterea duas unitates. Quare scribe 2 in columna unitatum, et decadem reiice in sequentem decadum columnam

Exempl.
23561
392
8768
49321
———
82042

dicens; 1 et 6 efficiunt 7: 7 et 9 efficiunt 16: 16 et 6 efficiunt 22: 22 et 2 efficiunt 24, hoc est; duas decadas decadum, sive duo centenaria, et 4 decadas. Scribe ergo 4 in loco decadum, et duo centenaria in sequentem columnam reiice: eodemque pacto in hac et reliquis operare; et tandem invenies summam quaesitam 82042.

Demonstratio ex tota operationis serie facile patet. Etenim in unaquaque columna numeri ita colliguntur, tamquam si essent unitates, ex eaque summa tot unitates in columnam proxime sequentem reiiciuntur, quot decades collectae sunt. Quod quidem faciendum esse evidens est, quum nota quaelibet ab unitatum columna ad reliquas progrediendo valorem habeat in columna sequente decuplo maiorem, quam in praecedente. Igitur in hac operatione adduntur singulae unitates, singulae decades, singula centenaria. Quare patet huius operationis ratio, quae quidem utpote per se evidens, nullo vulgarium axiomatum auxilio indigere videtur. Quamvis enim demonstrationis severitati maxime studeamus; eorum tamen imitari nolumus obscuram diligentiam, qui res evidentes ita demonstrant, ut, perlecta demonstratione, de iis fere dubitare liceat, quae antea perspicua credebantur.

PROBLEMA II.

NVMEROS INTEGROS SVBTRAHERE.

III. Secunda arithmeticae operatio dicitur *sub-*

ro universam arithmeticae utriusque doctrinam breviter et distincte explicemus, quantum postulant nostrarum institutionum necessitas atque iniuncta brevitas.

CAPVT II.

De quattuor primis arithmeticae operationibus in numeris integris.

I.

Prima arithmeticae operatio dicitur *additio*, quae ex praecedentibus satis intelligitur. Totam huius operationis praxim declarabimus atque demonstrabimus.

PROBLEMA I.

NVMEROS INTEGROS ADDERE, SIVE IN VNAM SVMMAM COLLIGERE.

II. Addendi proponantur numeri in hoc exemplo expressi. Quattuor numerorum series ita alias aliis subscribe, ut unitates unitatibus subiiciantur, decades decadibus, et sic de reliquis. Tum infra omnes numeros ducta lineola, et a dextera columna exorsus dic: 1 et 2 efficiunt 3: 3 et 8 efficiunt 11: 11 et 1 efficiunt 12. Habes ergo in hac columna unam decadem unitatum, ac praeterea duas unitates. Quare scribe 2 in columna unitatum, et decadem reiice in sequentem decadum columnam

Exempl.
23561
392
8768
49321
———
82042

dicens; 1 et 6 efficiunt 7: 7 et 9 efficiunt 16: 16 et 6 efficiunt 22: 22 et 2 efficiunt 24, hoc est; duas decadas decadum, sive duo centenaria, et 4 decadas. Scribe ergo 4 in loco decadum, et duo centenaria in sequentem columnam reiice: eodemque pacto in hac et reliquis operare; et tandem invenies summam quaesitam 82042.

Demonstratio ex tota operationis serie facile patet. Etenim in unaquaque columna numeri ita colliguntur, tamquam si essent unitates, ex eaque summa tot unitates in columnam proxime sequentem reiiciuntur, quot decades collectae sunt. Quod quidem faciendum esse evidens est, quum nota quaelibet ab unitatum columna ad reliquas progrediendo valorem habeat in columna sequente decuplo maiorem, quam in praecedente. Igitur in hac operatione adduntur singulae unitates, singulae decades, singula centenaria. Quare patet huius operationis ratio, quae quidem utpote per se evidens, nullo vulgarium axiomatum auxilio indigere videtur. Quamvis enim demonstrationis severitati maxime studeamus; eorum tamen imitari nolumus obscuram diligentiam, qui res evidentes ita demonstrant, ut, perlecta demonstratione, de iis fere dubitare liceat, quae antea perspicua credebantur.

PROBLEMA II.

NVMEROS INTEGROS SVBTRAHERE.

III. Secunda arithmeticae operatio dicitur *sub-*

tractio, cuius totum hoc est artificium. Vt numerum datum a dato numero subtrahas, numerum subtrahendum alteri, a quo subtrahi debet, ita subiicies, ut unitates unitatibus respondeant, decades decadibus, et sic de reliquis. Tum ab unitatibus exorsus, quamlibet inferiorem notam a superiori subtrahe, et residuum scribe infra lineolam, habebis numerum, qui sit datorum numerorum differentia. Si vero occurrat, inferiorem notam superiori maiorem esse, hanc augebis decem unitatibus, easque mutuas accipies a sinisteriori nota, quam proinde deinceps habebis tamquam unitate mulctatam. Subtrahendus proponatur numerus 4245 a numero 23897. Auferendo 5 ex 7 relinquitur numerus 2. Auferendo 4 ex 9 relinquitur 5: 2 ex 8 remanet 6. At quum numerus 4 ex 3 subtrahi nequeat; adiice huic denas unitates, et auferendo 4 ex 13, residuum habebis 9. Tum vero notam sinisteriorem proxime sequentum unitate mulctabis; hanc enim ab ea mutuam accepisti, ut denis unitatibus dexteriorem augeres; habebis ergo residuum 1; ideoque residuum totum 19652.

Exempl.

$$\begin{array}{r} 23897 \\ 4245 \\ \hline 19652 \end{array}$$

Demonstratio satis per se constat: quum unitates ab unitatibus auferantur, decades a decadibus, cet. Nam, quod in hoc exemplo numerus 3 decem augeatur unitatibus, et numerus sequens 2 unitate mulctetur, ratio patet. Haec nempe unitas in numero 3 decadi unitatum aequalis est, earum scilicet, quibus constat idem numerus 3. Quare etiamsi unitatem dumtaxat ille amittat, huic

tamen decem accedunt. Simili modo si plures sequerentur cyphrae, ex quibus eadem de causa nulla fieri potest subtractio; ex numero proxime sinisteriori mutua accipienda est unitas, quae in cyphram dexteram translata decem unitatibus aequivalet. Rursus ex illa decade unitas in secundam cyphram transfertur, atque ita deinceps. Quare patet, cyphram dexteriorem decem unitatibus aequalem esse, ceteras vero sinisteriores aequari novenario. Itaque evidens est huius operationis ratio, nec vulgarium axiomatum ope facilius intelligitur.

Scholion. Ex additionis et subtractionis natura manifestum est, duas illas operationes sibi mutuam probationem conferre, et sese invicem confirmare. Etenim quum residuum in subtractione sit ipsa numerorum differentia; patet, minorem numerum residuo sive differentiae additum maiori numero aequalem esse. Item quum additio sit plurium numerorum adgregatum, si ex adgregato alteruter numerus auferatur; numerum alterum remanere, necessum est. Si igitur explorare velis, utrum additio rere peracta sic necne, subtractione utendum est: contra autem ad explorandam subtractionem additio adhibenda.

PROBLEMA III.

Nvmeros integros mvltiplicare.

IV. Tertia arithmeticae operatio vocatur *multiplicatio*, in qua, ut patet ex capite praecedenti, toties sumitur numerus multiplicandus, quoties unitas continetur in numero, per quem debet multiplicari. Singulae notae in singulas facile ducuntur, si numeri breviores sint. Sic nemo non videt, 3 in 4 ductum, sive 4 ter sumtum 12 efficere *.

At si numeros pluribus notis constantes multiplicare oporteat, horum alterutrum infra alterum scribe ita, ut unitates unitatibus subiiciantur. Deinde notas omnes superioris numeri per singulas inferioris multiplica, initio a dextris facto. Decades, quae inter multiplicandum colliguntur, sepone adiiciendas producto ex eadem nu-

* *Producta nihilominus maiora adiuncta tabella scribimus. Signum multiplicationis est ×.*

$3\times3=9$	$4\times3=12$	$5\times3=15$	$6\times3=18$
$3\times4=12$	$4\times4=16$	$5\times4=20$	$6\times4=24$
$3\times5=15$	$4\times5=20$	$5\times5=25$	$6\times5=30$
$3\times6=18$	$4\times6=24$	$5\times6=30$	$6\times6=36$
$3\times7=21$	$4\times7=28$	$5\times7=35$	$6\times7=42$
$3\times8=24$	$4\times8=32$	$5\times8=40$	$6\times8=48$
$3\times9=27$	$4\times9=36$	$5\times9=45$	$6\times9=54$

$7\times3=21$	$8\times3=24$	$9\times3=27$
$7\times4=28$	$8\times4=32$	$9\times4=36$
$7\times5=35$	$8\times5=40$	$9\times5=45$
$7\times6=42$	$8\times6=48$	$9\times6=54$
$7\times7=49$	$8\times7=56$	$9\times7=63$
$7\times8=56$	$8\times8=64$	$9\times8=72$
$7\times9=63$	$8\times9=72$	$9\times9=81$

meri inferioris nota in proxime sequentem superioris. Facta, quae emergunt ex singulis notis inferioris in omnes superioris, infra lineolam seorsum notentur ita, ut uniuscuiusque unitates subiiciantur numero, per quem multiplicatio peragitur. Si horum omnium summa colligatur, ea erit productum quaesitum.

Exempl.

$$\begin{array}{r} 235 \\ 43 \\ \hline 705 \\ 940 \\ \hline 10105 \end{array}$$

Multiplicandus proponatur numerus 235 per 43. Scribe 43, sub 235; tum ducta lineola, dic 3 in 5 efficiunt 15, scribe; 5 sub numero multiplicante 3, et unam decadem sepone adiiciendam facto sequenti ex 3 in 3, quod est 9; cui si addas 1 habebis unam decadem, et nullas praeterea unitates, scribe igitur 0: et facto et 3 in 2, quod est 6, adiiciens 1 scribe 7. Rursus dic 4 in 5 efficiunt 20; scribe 0 ita, ut multiplicatori 4 subiaceat, et facto sequenti 4 in 3, quod est 12, adiiciens 2 habebis 14; scribe igitur 4: et seponens 1, dic, 2 in 4 efficiunt 8, et adiecto 1, scribe 9. Demum ducta linea, collige in unam summam hos numeros ita dispositos; eritque 10105 productum quaesitum.

Demonstratio evidens est ex ipsa notarum arithmeticarum natura, si nempe in memoriam revocetur, numerorum characteres decuplo plus valere in locis sinisterioribus, quam in dexterioribus. Illico enim manifestum fiet, toties sumi in productu numerum multiplicandum, quoties unitas continetur in numero, per quem fit multiplicatio.

PROBLEMA IV.

NVMEROS INTEGROS DIVIDERE.

V. Quarta arithmeticae operatio vocatur *divisio*. Quum numerus datus per alium datum dividendus proponitur, eo reducitur quaestio, ut inveniatur, quoties in numero dividendo contineatur divisor, totiesque auferatur: atque totidem unitates scribantur in numero, qui iccirco *quotus* dicitur. Haec ergo genuina est divisionis notio: nempe dividendus est ad divisorem, ut quotus est ad unitatem; vel dividendus est ad quotum, ut divisor est ad unitatem.

Proponatur dividendus numerus 10105, per 43. Numero dividendo divisorem postpone lineola interiecta; tum operationem instituens in primis notis dividendi, quae exhibeant quantitatem divisorem aequalem vel proxime maiorem; dic, quoties 43 continentur in 101, quotus erit 2. Scribe ergo 2 infra lineolam divisoris ad partem dexteram, et factum ex 2 in 43, sive 86 aufer ex 101, et residuo 15 notam appone 0, quae in dividendo proxime sequitur quantitatem iam divisam 101. Dic iterum, quoties 43 continetur in 150, quotus est 3, quem scribe, ut antea; et factum ex 3 in 43, seu 129 aufer ex 150. Residuo 21 adnecte sequentem no-

Exempl.

```
10105 | 43
 86   | 235
 150
 129
  215
  215
  000
```


tam dividendi 5: et dic iterum, quoties 43 continentur in 215, quotus erit 5, quem scribe cum aliis quoti notis, et aufer ex 215 factum ex 5 in 43, sive 215. Quum nihil ex ea divisione supersit; patet, numerum 235 illum accurate esse, qui oritur ex divisione 10105 per 43.

Tota operationis ratio facile patet, si animadvertamus, in huiusmodi operatione rem perinde se habere, ac si quaereretur, quota pars quantitatis alicuius singulis hominibus obveniret, si eam ex aequo tot hominibus distribui oporteret, quot unitates continet divisor. Nam in tota operationis serie inquirimus, quot unitates, decades, cet. singulis dari possint; iisque datis, quae dari possunt, quot adhuc distribuendae supersint. Facile autem intelligitur, post quamlibet subtractionem peractam id, quod relinquitur, antequam ulteriorem dividendi notam adiicias, divisione minorem esse oporteret, nam si residuum aequale foret vel maius, divisor in quantitate iam divisa pluries contineretur, quam indicet numerus in quotum relatus. Omnis difficultas in eo sita est, quod in numeris longioribus statim non pateat, quoties divisor in dividendi notis contineatur, et tentamine utendum est. Divisor nempe per numeros ab 1 ad 9 multiplicandus est, atque numeri ex hac multiplicatione producti debent comparari cum dividendi notis, et explorandum est, quinam ex illis numeris sit proxime minor. Pones in quoto numerum, in quem ductus divisor hunc efficit numerum, ipsum vero numerum ex dividendi notis subduces. Ceterum qui in arithmetica satis fuerit exercitatus, facile coniiciet ex primis utriusque numeri notis, dividendi scilicet et divisoris, ipsum numerum pro quoto eligendum.

Probe autem observari debet in quoto notarum valor, ut in aliis arithmeticae operationibus iam antea monuimus. At in praesenti operatione, quae est omnium difficillima, rem brevi exemplo illustrabimus. Dividendus proponatur numerus 416 per 2, statim patet, in quoto contineri centenarios, decadas et unitates. Dividatur iam 4 per 2, quotus erit 2, qui per 2, multiplicatus producit 4, quo subtracto ex 4 fit o. Patet ergo, divisum fuisse 400 per 2. Progredior deinde ad notam sequentem 1, hoc est, dividi debet 10 per 2. Statim autem video, 2 in 10 decies non contineri; quare scribitur o in quoto: tum ut indicetur, quotum nullam decadem continere, tum ut primae quoti notae 2 suus servetur centenarii valor. Tandem progrediendum ad 6, qui numero praecedenti 1 apponitur, divisoque 16 per 2, habetur quotus 8, ideoque quotus totus est 208.

Exempl.

```
416 | 2
    |____
4     208
___
016
 16
______
 00
```

Hinc generatim intelligitur, qua de causa in quoto scribatur cyphra, immo et plures cyphras aliquando scribi oporteat. Hac divisione peracta, nulla relinquitur in dividendo nota; si autem aliquid residui ex postrema subtractione supersit, quoto adiicienda est fractio. Ita si in exemplo praecedenti haberetur numerus 417 per 2 dividendus ita, ut numerum 417 ex aequo hominibus 2 partiri debeas, singuli acciperent numeros 208, et di-

midiam partem nummi, quae ita scribitur $\frac{1}{2}$.

Ex hactenus explicatis generatim etiam patet, satis esse primam dividendo notam per primam divisoris dividi, si in divisore et dividendo idem sit notarum numerus. Verum si dividendus plures contineat notas, persaepe necesse est, duas primas dividendi notas prima divisoris notae subiici; idque fieri debere evidens est, quoties datus notarum numerus in divisore maiorem habet valorem, quam habet aequalis notarum numerus in dividendo. Verum si duae adhibeantur dividendi notae, per primam divisoris notam divisio semper fieri potest. Quare generatim ostenditur, quod, sumtis in dividendo tot notis, quot sunt in divisore, vel etiam, quod aliquando necesse est, nota una insuper adiecta, notarum numerus in quoto unitate excedat residuum notarum in dividendo. Inde autem facile colligitur, nullum in quoto numerum novenario maiorem esse posse. Etenim divisor decies sumtus aequalis esse non potest adsumtae dividendi parti. Nam si divisor decies sumatur, nota una augetur. At pars dividendi adsumta habet notarum numerum notarum divisoris numero aequalem vel unitate maiorem. In primo casu evidens est, dividendi partem adsumtam minorem esse divisore decies sumto, quum notarum numerum habeat unitate minorem: in secundo casu pars dividendi adsumta, si nota una versus dexteram minuatur, minor fit divisore. Quare dividendus hac nota iterum auctus minor est divisore decies sumto. *Quum nempe tam dividendi quam divisoris notae per additionem no-*

vae dexterioris decuplo maiores fiant, eadem, ac prius manebit invicem notarum dexteram praecedentium ratio. Ideoque si in priori hypothesi dividendus minor erat divisore, minor quoque manebit, postquam utrique addita fuit dextera nota.

Divisionis rite peractae argumentum habebis, si divisorem in quotum ducas, redeatque divisus numerus; nam si non redeat, manifestum est, alicubi errorem esse admissum. Quod quidem patet ex ipsa divisionis natura; quum dividendus toties contineat divisorem, quoties unitas continetur in quoto. Quare quum quotus exprimat, quoties divisor contineatur in dividendo, si divisor per quotum multiplicetur, dividendum ipsum restitui necesse est. Ceterum patet, si divisorem accuratum habere non licuit, facto ex divisore in quotum addendum esse residuum ex ultima divisionis subtractione, ut redeat divisa quantitas. Contraria ratione evidens est, multiplicationis rite peractae haberi argumentum, si productum dividatur per multiplicandum aut per numerum multiplicatorem: in primo casu quotus fit multiplicatur; in casu autem altero quotus est multiplicandus. Quum enim divisio sit multiplicationi contraria, per divisionem resolvitur, quod in multiplicatione componitur, et contra. Ceterum in multiplicatione et divisione compendia plurima usus docebit. Heic monere satis erit, multiplicationis per plures cyphras faciendae compendium haberi, si in producto scribantur tot cyphrae, quot occurrunt in multiplicando et multiplicatore si-

mul; multiplicatio autem aliarum notarum fiat secundum regulas praedictas. Item in divisione, si divisor et dividendus cyphras contineant, in dividendo delendae sunt tot cyphrae, quod occurrunt in divisore, quae etiam in ipso divisore deleri debent, et reliqua operatio peragenda, ut antea. Notandum autem est, compendium illud valere dumtaxat, si cyphrae fuerint ultimae tum divisoris, tum dividendi notae; quod quidem manifestum est ex cyphrarum natura.

Scholion. In praesenti capite sermonem habuimus dumtaxat de numeris homogeneis sive eiusdem speciei. At pari facilitate in numeris heterogeneis seu diversae speciei absolvuntur operationes arithmeticae. Antequam vero operationes illas explicemus, definiendum est, quid per numerum *concretum*, quid per *abstractum* intelligant arithmetici. Numerus concretus dicitur, quo res aliqua determinata designatur, ita si dicas tres homines, tres horas, tres pedes cet. At si numerum 3 generatim enunciaveris, nec rem aliquam designaveris, numerus vocatur abstractus. Iam in numeris diversae speciei additio et subtractio facile intelliguntur. Probe tenenda est diversa numerorum species. Ita si addi debeant lineae, pollices, pedes, hexapedae; sciendum est, 12 lineas pollicem unum componere, pollices 12 pedem unum, et hexapedam ex pedibus 6 constare. Vbi autem in linearum additione summa efficitur, quae 12 excedit; tot unitates inter pollices referri debent, quot sunt numeri duodenarii; quod vero reliquum est, seu quod duodenario minus est, in linearum columna scribi debet; et ita deinceps de alia qualibet numerorum specie. Similiter in subtractione tota patet operationis ratio, si quantitas subtrahenda, e. g. linearum numerus, iusto maior sit; iam ex quantitate praecedenti, pollicum scilicet, mutuo accipienda est unitas, quae duodenario numero aquivalet, atque ita reliqua operatio peragenda. Illud unicum est discrimen inter operationes arithmeticas in numeris abstractis atque in heterogeneis peragendas, quod scilicet in numerorum abstractorum additione vel subtractione unitas mutuo accepta decadi aequivaleat; at in numeris heterogeneis unitas, quae mutuo accipitur, eum retinet valorem, qui speciei suae respondeat. Haec de additione et subtractione.

Quod ad multiplicationem spectat, improprie omnino a quibusdam arithmeticis proponi videntur concretorum numerorum multiplicationes. Ita ineptum est, quod faciunt aliqui, quaerere productum ex nummis 3, iuliis, 3, assibus 3 in nummos 3, iulios 3, asses 3. Etenim in eo sita est multiplicatio, ut data quaedam quantitas datis vicibus sumatur, ac proinde multiplicator debet esse numerus abstractus. Qua ratione autem quantitates diversae speciei per numerum abstractum multiplicentur, facile patet, si e. g. productum ex lineis in numerum abstractum maius sit numero duodenario, iam inter pollicis reiici debent tot unitates, quot sunt numeri duodenarii, quod autem reliquum est, inter lineas scribendum. Porro quamvis in multiplicatione numerus abstractus esse debeat multiplicator, res tamen aliter se habet in

divisione; nam dividendus semper censetur numerus concretus, divisor autem vel concretus vel abstractus esse potest. Ita dividi possunt nummi 6 per nummos 2, hoc est, investigari potest, quoties 2 contineatur in 6: quotus 3 erit numerus abstractus. Potest etiam dividi numerus concretus per numerum abstractum; ita nummos 6 dividere possumus per 3, hoc est investigare possumus tertiam partem nummorum 6, et quotus erit numerus concretus, nempe nummi 2. Iam ut perspicua habeatur divisionis notio, ad ipsam definitionem redeamus. In divisione scilicet dividendus est ad divisorem, ut quotus est ad unitatem, vel dividendus est ad quotum, ut divisor ad unitatem. Probe autem observari debent illae duae proportiones; licet una eademque videantur. Dividendus tamquam numerus concretus semper habetur, concretus autem vel abstractus esse potest numerus divisor. In primo casu quotus erit numerus aubstractus, et locum habet prima proportio; in casu altero, ubi nempe divisor est numerus abstractus, quotus est numerus concretus, et locum habet proportio altera. Haec quidem omnia exemplo facile licebit intelligere. Si nummi 6 (*numerus concretus*) dividantur per nummos 2 (*numerum* itidem *concretum*); quoties erit numerus abstractus 3; hic enim non indicabit numerum nummorum, sed exprimet, quotus divisor continetur in dividendo; erunt nempe 6 nummi ad 2 nummos, ut numerus abstractus 3 est ad unitatem abstractam 1. Dici autem non posset, 6 nummi (*numerus* scilicet *dividendus* et *concretus*) sunt ad quotum 3 (*numerum* *abstractum*); ut nummi 2 (*numerus divisor* et *concretus*) ad 1 (*numerum abstractum*). Talis proportio nullam in mente relinqueret distinctam notionem. Quum enim numerus concretus et numerus abstractus diversi sint generis; nulla inter eos comparatio et ratio proprie dicta institui potest.

Si divisor sit numerus abstractus, ut in casu secundo, quotus est numerus concretus, et secunda valet proportio. Ita si dividantur 6 nummi per *numerum abstractum* 3, quotus erit nummi 2 (*numerus* scilicet *concretus*); habebiturque haec proportio; numerus concretus, nempe 6 nummi, erit ad quotum nummos 2; ut divisor 3 ad 1. Id vero notandum est, in utraque proportione unitatem esse semper numerum abstractum. Quare divisio sub duplici ratione considerari potest. Vel enim quaeritur, quoties quantitas una in altera eiusdem generis quantitate continetur, et hic est primus casus; vel quaeritur quantitas, quae certis vicibus in alia eiusdem generis quantitate contineatur, et hic est casus secundus. Facile autem patet ex demonstratis, quomodo numeri concreti per abstractos dividantur, aut etiam concreti per concretos, etiamsi fuerint diversae speciei. Etenim si concreti per abstractos dividantur, initio sumto ab iis, qui maiorem habent valorem, divisio ex regulis praescriptis instituatur; si autem supersit aliquid, ad minorem speciem reducatur. E. g. si residui fuerint pedes, reducantur in pollices, atque iterum divisio de more fiat. Si concretos numeros diversae speciei per concretos itidem diversae speciei dividi oporteat, iam numeri tum dividendi, tum divisoris ad minimam species deprimantur, quod per multiplicatione fieri manifestum est, atque divisio fiat eodem modo ac in numerum abstractis. Ceterum in multiplicatione et divisione quantitatem diversae speciei varia adhiberi possunt operandi compendia, quae sine fractionum doctrina intelligi non possunt. Divisionis notionem ex genuinis principiis iam hausimus. In operationibus arithmeticis abstrahi solet a concretis abstractisque numeris, an concreti sint vel abstracti ad maiorem operationum facilitatem. Verum ad formandum earumdem operationum ideam distictam, necesse est, ut numeris sua deinde restituatur conveniens notio.

CAPVT III.

De quattuor praecedentibus operationibus in arithmetica speciosa absolvendis.

PROBLEMA I.

QVANTITATES LITTERALES ADDERE.

I.

Quantitatibus litteralibus praefiguntur signa, quorum significationem praemitti omnino necessum est. Signum additionis est $+$, signum autem subtractionis est $-$, aequalitas duabus lineolis exprimi solet hoc modo $=$. Ita $a = a$, $a + a = 2a$, $a - a = 0$. Quantitas addenda dici solet quantitas *positiva*; quantitas autem subtrahenda vocatur *negativa*. Si quantitati litterali praefigatur numerus aliquis, hic *coëfficiens* vocatur, ita in quan.

abstractum); ut nummi 2 (*numerus divisor* et *concretus*) ad 1 (*numerum abstractum*). Talis proportio nullam in mente relinqueret distinctam notionem. Quum enim numerus concretus et numerus abstractus diversi sint generis; nulla inter eos comparatio et ratio proprie dicta institui potest.

Si divisor sit numerus abstractus, ut in casu secundo, quotus est numerus concretus, et secunda valet proportio. Ita si dividantur 6 nummi per *numerum abstractum* 3, quotus erit nummi 2 (*numerus* scilicet *concretus*); habebiturque haec proportio; numerus concretus, nempe 6 nummi, erit ad quotum nummos 2; ut divisor 3 ad 1. Id vero notandum est, in utraque proportione unitatem esse semper numerum abstractum. Quare divisio sub duplici ratione considerari potest. Vel enim quaeritur, quoties quantitas una in altera eiusdem generis quantitate continetur, et hic est primus casus; vel quaeritur quantitas, quae certis vicibus in alia eiusdem generis quantitate contineatur, et hic est casus secundus. Facile autem patet ex demonstratis, quomodo numeri concreti per abstractos dividantur, aut etiam concreti per concretos, etiamsi fuerint diversae speciei. Etenim si concreti per abstractos dividantur, initio sumto ab iis, qui maiorem habent valorem, divisio ex regulis praescriptis instituatur; si autem supersit aliquid, ad minorem speciem reducatur. E. g. si residui fuerint pedes, reducantur in pollices, atque iterum divisio de more fiat. Si concretos numeros diversae speciei per concretos itidem diversae speciei dividi oporteat, iam numeri tum dividendi, tum divisoris ad minimam species deprimantur, quod per multiplicatione fieri manifestum est, atque divisio fiat eodem modo ac in numerum abstractis. Ceterum in multiplicatione et divisione quantitatem diversae speciei varia adhiberi possunt operandi compendia, quae sine fractionum doctrina intelligi non possunt. Divisionis notionem ex genuinis principiis iam hausimus. In operationibus arithmeticis abstrahi solet a concretis abstractisque numeris, an concreti sint vel abstracti ad maiorem operationum facilitatem. Verum ad formandum earumdem operationum ideam distictam, necesse est, ut numeris sua deinde restituatur conveniens notio.

CAPVT III.

De quattuor praecedentibus operationibus in arithmetica speciosa absolvendis.

PROBLEMA I.

QVANTITATES LITTERALES ADDERE.

I.

Quantitatibus litteralibus praefiguntur signa, quorum significationem praemitti omnino necessum est. Signum additionis est $+$, signum autem subtractionis est $-$, aequalitas duabus lineolis exprimi solet hoc modo $=$. Ita $a = a$, $a + a = 2a$, $a - a = 0$. Quantitas addenda dici solet quantitas *positiva*; quantitas autem subtrahenda vocatur *negativa*. Si quantitati litterali praefigatur numerus aliquis, hic *coëfficiens* vocatur, ita in quan.

titate litterali $2a$ numerus 2 coëfficiens appellatur. Si autem quantitas litteralis nullum numerum praefixum habeat, iam unitas tamquam illius coëfficiens censeri debet; ita $a = 1a$, ut patet. Quantitates litterales dicuntur *similes*, si easdem contineant litteras et eumdem earumdem litterarum numerum, etiamsi diversis coëfficientibus notentur; ita $+2a$, et $-5a$ sunt quantitates similes. At *dissimiles* sunt quantitates a et b, atque etiam quantitates a et aa. Quantitas aliqua *ex pluribus terminis composita* dicitur, quae plures habet litteras signo $+$ vel $-$ connexas. Ita $a+b$ constat ex duobus terminis, et *binomium* dicitur; $a+b+c$ ex tribus terminis, et *trinomium* vocatur. Quantitas ex unico termino composita dicitur *quantitas simplex*, atque etiam *monomium*: ita a, ab, abc sunt quantitates simplices.

His praemissis definitionibus, quantitatum litteralium additio iam explicanda est. Si quantitates simplices fuerint, tota operationis ratio statim patet. Ita si a et a addi debeant, habebitur $2a$; si addere oporteat a et $2a$, summa erit $3a$, et ita deinceps. Satis nempe est in hoc casu addi coëfficientes, et coëficiententium summam quantitatibus litteralibus praefigi, eodem servato signo $+$ vel $-$, si quantitates eodem signo adficiantur. At si diversa fuerint signa, iam coëfficiens minor a maiori subtrahi debet, et differentia cum maioris coëfficientis signo scribenda.

Id quidem evidens est ex negativarum et positivarum quantitatum natura. Etenim quantitates positivae quantitatibus negativis sunt directe con-

trariae. Quare si quantitates addendae similes sint, signisque contrariis adfectae, vel sese omnino destruunt, vel aliqua ex parte tantum. Nempe si quantitas una sit altera maior, destruitur si maiori quantitate pars minori aequalis, et residuum est quantitatis utriusque differentia, quae quidem differentia signo maiori quantitati praefixo adfici debet. Ita evidens est, quantitates $+5df$ et $-3df$ reduci ad $+2df$; nam $+5df$ est quantitas df quinquies sumta, et $-3df$ est quantitas df ter subtracta; sed eadem quantitas quinquies sumta, et ter subtracta reducitur ad quantitatem bis sumtam. Similiter $+5fm$ et $-6fm$ reducitur ad $-1fm$, vel ad $-fm$. Nam $-6fm$ est quantitas fm sexies subtracta, et $+5fm$ est eadem quantitas quinquies addita, ac proinde quantitas fm semel subtrahitur, et remanet negativa, seu fit $-fm$. Eadem ratione operandum est in aliis quantitatibus utcumque compositis. Quantitates addendae ita disponuntur, ut similes termini sibi invicem respondeant. Singulae partes seorsum considerantur ut simplices, et additio fit, ut modo praescriptum est; summa autem infra lineolam scribimur. Sub terminis, qui sese mutuo destruunt, scribi solet stellula vel zero. Tota operatio patet ex praesenti exemplo. Si quantitates aliquae fuerint dissimiles, eas signo $+$ vel $-$ connectendas esse evidens est. Ita si addi oporteat a et b, vel a et b, scribendum est $a+b$, $a-b$.

Exemplum.

$$
\begin{array}{rrrr}
3ab & -5cs & -4dr & +2s \\
-ab & +4cs & +4dr & -s \\
\hline
2ab & -cs & * & +s
\end{array}
$$

PROBLEMA II.

QVANTITATES LITTERALES SVBTRAHERE.

II. In subtractione considerantur quantitates singulae subtrahendae, tamquam si haberent signum ei, quod habent, contrarium, et fit summa ex legibus iam praescriptis. Nempe in quantitate subtrahenda mutetur signum + in —; et — in +, et additio de more fiat. Ita subtrahitur b ex a, scribendo $a - b$. Si $b - c$ ex $a + c$ subtrahi oporteat, scribitur $a + c - b + c = a - b + 2c$. Simili modo in quantitatibus utcumque compositis operandum est. Quantitas subtrahenda inferiori loco scribitur, alia autem, ex qua subtractio fieri debet, supra opponitur. Deinde mutatis signis, ut iam dictum est, tota quantitatum series scribitur, et postea reducitur, ut factum est in additione; habebitur quantitatum differentia infra lineolam scribenda.

Exemplum.

$$ab + abb - dd$$
$$ab - bc + dd.$$
$$\overline{ab + abb - dd - ab + bc - dd}$$
$$= abb + bc - 2dd.$$

Quod autem in quantitate subtrahenda signum — mutetur in +, ratio facile patet. Si ex a subtrahi debeat $b - d$, scribaturque primo $a - b$, subtractio iusto maior est; subtrahenda enim non proponitur tota quantitas b, sed b mulctata quantitate d; quare iusto maior est subtractio, et excessus est ipsa quantitas d, quae proinde cum signo positivo + restitui debet,

et scribendum est $a - b + d$. Id vero numerorum exemplo illustratur. Si ex numero 6 subtrahendus proponatur numerus $5 - 3$, ex praescripta regula scribendum est $6 - 5 + 3$, hoc est, 4, reductione facta. Quod evidens est. Si enim scriberes $6 - 5 - 3$; subtraheres 8 ex 6, quod quidem faciendum non proponitur. Quum enim sit $5 - 3 = 2$, ex numero 6 subtrahi debet dumtaxat numerus 2. Ceterum patet, in calculo litterali non secus ac in arithmetico additionem et subtractionem sibi mutuum probationem praebere; ita ut operatio una per alteram mutuo exploretur.

PROBLEMA III.

QVANTITATES LITTERALES MVLTIPLICARE.

III. Signum multiplicationis est ×, quod tamen in multiplicatione facta per litteras omitti solet, et sola coniunctio litterarum sine signo multiplicationem significat. Sit $a = 2$, $b = 10$; erit $ab = 2 \times 10 = 20$. Si eadem quantitas per se ipsam multiplicetur, apponitur post ipsam paullo supra numerus, qui exprimat, quoties scribenda esset. Ita $aa = a^2$, $aaa = a^3$. Numerus supra positus est *index* seu *exponens potentiae*, ut vocant, vel *potestatis* seu *dignitatis* quantitatis ipsius, et exprimit, *plures paucioresve vices, quibus quantitas in se ipsam ducitur.* *Ita* $a \times a = a^2$, $a \times a \times a = a^3$, cet. *Quum quantitas solitaria est, tunc ha-*

bere intelligitur unitatem pro exponente. E. g. $a = a^1$. (*Ceterum probe notandum est discrimen, quod inter coëfficientem et exponentem intercedit. Exponens enim indicat iteratam quantitatis multiplicationem; coëfficiens vero eiusdem iteratam summam.*) *Ita* $a^3 = a \times a \times a$; *at vero* $3a = a + a + a$. Sit $a = 5$, erit $a^2 = 25$, $2a = 10$. Sit $b = 2$, erit $(a+b)^2 = \overline{a+b}^2 = 7 \times 7 = 49$; parenthesis autem ( ), vel lineola — *supra polynomium* producta designat, totam quantitatem $a + b$ in se ipsam multiplicari.

In quantitatum compositarum multiplicatione, altera quantitas alteri subscribenda est. Tum tota prima quantitas multiplicanda per unum ex terminis secundae, scribendo productum in eadem serie, deinde tota prima quantitas per aliam; et ita porro scribendo singula producta in singulis seriebus, ac notando similes terminos diversorum huiusmodi productorum alios sub aliis; deinde omnium serierum colligenda summa. Omnium vero huiusmodi operationum patet ratio. Multiplicatio enim fit per partes non secus ac in quantitatibus simplicibus. (Porro in multiplicatione quattuor operationis partes considerari debent, nempe signa, coëfficientes, litterae et exponentes. Hinc quattuor praescribuntur regulae. I.ª Si signa fuerint eadem, positiva scilicet vel negativa, productum fit positivum: contra autem si fuerint diversa, productum est negativum.) Ita $+ \times + = +$; $+ \times - = -$; $- \times + = -$; et $- \times - = +$. II.ª Coëfficientes in se invicem multiplicantur. III.ª Litterae ordine alphabetico scribuntur, nullo interposito signo. IV.ª Si quantitas aliqua exponente adficiatur, eaque multiplicari debeat per eadem litteram exponente itidem adfectam, littera illa semel in producto scribenda est; ita tamen ut huius quantitatis exponens aequalis fiat exponentium summae. Operatio tota patet exemplo. Quantitas multiplicanda superiori loco scribitur. Deinde multiplicatur per a, et producta singula infra lineolam scribuntur. Postea fit multiplicatio per $-b$, productaque infra apponuntur, et tandem productorum partes singulae, ut moris est in summam colliguntur. Id vero pro maiori additionis facilitate observandum est, ut scilicet similis productorum partes aliae sub aliis scribantur, et sibi invicem respondeant, ut in additione praescripsimus. Quod spectat ad tres ultimas leges, hae satis patent et antea demonstratis. Verum quod attinet ad signorum doctrinam, in bono lumine collocari debet.

Exemplum.

$$
\begin{array}{l}
a^2 + 2ac - bc \\
\qquad a - b \\
\hline
a^3 + 2a^2c - abc \\
-a^2b - 2abc + b^3c \\
\hline
a^3 - a^2b + 2a^2c - 3abc + b^2c
\end{array}
$$

Signorum multiplicatio, quae tironibus difficultatem adferre solet, ex ipsa quantitatum negativarum natura intelligi potest. Dum quantitas positiva $+a$ multiplicatur per aliquem numerum positivum $+n$, sensus est, quantitatem $+a$ toties sumi, quoties unitas continetur in n; atque proinde productum fit na. Si $-a$ multiplicari debeat per $+n$, sensus est, — quantitatem negativam toties sumi, quoties unitas continetur in n, ideoque productum est $-na$. Simili modo si multiplicetur $+a$ per $-n$, sensus est, quantitatem a toties subtrahi, quoties unitas continetur in n, ideoque productum est negativum, seu $-na$. Si $-a$ multiplicari oporteat per $-n$, sensus est, $-a$ toties subtrahendum esse, quoties unites est in n; sed subtractio quantitatis negativae $-a$ aequivalet additioni $+a$; quare productum est $+na$. Nemo non valet, productum ex quantitate positiva in positivam, fieri positivum. Sed alii casus hoc modo rursus illustrari possunt. Quum sit $+a-a=0$, si multiplicetur $+a-a$ per n, productum debet esse 0. Iam vero primus producti terminus est $+na$, ergo terminus alter debet esse $-na$, qui destruat primum terminum $+na$, ita ut productum sit $+na-na=0$. Quare $-a\times+n=-na$. Simili modo si multiplicetur $+a$, et $-a$ per $-n$, primus producti terminus est $-na$; quare terminus alter est $+na$; alioqui termini duo sese mutuo non destruerent, quod tamen fieri debet, quum sit $a-a=0$. Ergo $-a\times-n=+na$.

PROBLEMA IV.

Quantitates litterales dividere.

IV. Signum divisionis est lineola interposita,

dividendum separans a divisore; ita $\frac{a}{b}$ adsignat, a dividi per b. Divisio etiam designatur, interpositis binis punctis, hoc modo $a:b$. Verum his signis utendum est dumtaxat, si divisio accurate fieri non possit; quod primum illustrabimus exemplo quantitatum, quae unico constat termino. Si proponatur dividenda quantitas a^2bc per a^2c, erit $\frac{a^2bc}{a^2c}=b$; ac proinde quotus erit b. Simili ratione $\frac{6a^2bc}{2a^2c}=3b$. At $\frac{10a^2b}{6a^2c}=\frac{10b}{6c}$.

In hoc sita est tota divisionis operatio, ut ex dividendo et divisore expungatur litterae utrique communes: reliquae autem pro quoto habeantur. Si autem quantitates litterales coëfficientibus adficiantur, evidens est, divisionem institui debere non secus ac in arithmetica vulgari. Porro licet in dividendo et divisore deleantur litterae communes; non tamen putandum est, quotum ex quantitate per se ipsam divisa esse $=0$; ita $\frac{abc}{abc}$ non est $=0$. Deleantur quidem litterae omnes, sed quantitati litterali praefixus semper intelligitur coëfficiens 1; sic $\frac{abc}{abc}=\frac{1abc}{1abc}=\frac{1}{1}=1$. Et quidem dum dividitur abc per abc quaeritur, quoties abc continetur in abc. Sed quantitas quaelibet semel in se ipsa continetur. Quare in hoc casu quotus est semper unitas. Quod ad signorum leges spectat, eaedem omnino sunt, quae pro multiplicatione: nempe si $+$ dividatur per $+$, et $-$ per $-$, quotus signo $+$ adficitur; contra autem si dividatur $+$ per $-$, vel $-$ per $+$, quotus adficitur signo $-$. Tota explicatae operationis ratio evidens est ex ipsa divisionis natura. Quum enim productum ex divisore in quotum dividendo aequale esse debeat; manifestum est, quotum ex divisione quantitatis negativae per negativam oportere esse positivum. Ponamus enim, esse negativum; iam productum ex quoto negativo in divisorem negativum, foret positivum; ac proinde non rediret quantitas dividenda, quae ponitur negativa. Simili ratione demonstrantur aliae signorum leges.

Eodem plane modo operandum est in aliis divisionibus utcumque compositis. Ita si dividi oporteat $9ab^2 - 15a^3b + 6a^3$ per $-3ab + 2a^2$. Singuli termini ita disponi debent, ut sumatur divisionis initium ab illo termino, qui *tam in dividendo quam in divisore* ad maximam evectus est potestatem, et ita per gradus progre-

Exemplum.

$$
\begin{array}{l|l}
6a^3 - 15a^3b + 9ab^2 & 2a^2 - 3ab \\
6a^3 - 9a^2b & \overline{} \\
\hline
* - 6a^2b + 9ab^2 & 3a^1 - 3b \\
 - 6a^2b + 9ab^2 & \\
\hline
 * * & \\
\hline
\end{array}
$$

diendo, ut heic factum vides. Itaque dividas $6a^3$ per $2a^2$: prodit quotus $3a$; per quam divisor totus multiplicatur, productumque $6a^3 - 9a^2b$ subtrahas ex dividendo, residuum fit $-6a^2b$, cui addas $9ab^2$, et dividere pergas, ut antea: quotus est $-3b$; productumque ex hoc quoto et divisore, $-6a^2b + 9ab^2$ iterum auferas ex dividendo, nihilque remanet. Quare accurata est divisio. Si autem peracta operatione aliquid supersit ita, ut divisor et reliqua pars dividendi nullas communes habeant quantitates, iam divisio accurate fieri non potest, sed quoto invento iungenda est fractio; de fractionibus autem tractabitur in proximo capite.

Saepe contingit, divisionem in infinitum continuari, et tunc quotus fit, ut vocant, *series infinita.* Exemplo sit unitas dividenda per $1 - a$. Operatio est huiusmodi.

$$
\begin{array}{l|l}
1 & \\
1 - a & 1 - a \\
\hline
+ a & 1 + a + a^2 + a^3 + a^4 \text{ cet.} \\
+ a - aa & \text{quotus est in infinitum.} \\
\cline{1-1}
+ aa & \\
+ aa - aaa & \\
+ aaa \text{ cet.} &
\end{array}
$$

Haec pauca exempla satis sint. Ceterum patet, multiplicationem et divisionem in quantitatibus litteralibus non secus ac in numeris sibi mutuam probationem conferre ita, ut multiplicatio per divisionem, et versa vice divisio per multiplicationem confirmetur.

Scholion. In hoc capite frequens fit mentio de quantitatibus negativis, quarum genuinam notionem paucis iterum explicare non abs re erit. Si duae quantitates magnitudine aequales ad partes directe oppositas simul et in eodem subiecto coniunctae intelligantur; sese mutuo destruunt, illarumque effectus nihilo aequalis est. Ita si potentiae duae aequales in partes directe oppositas agunt, virium illarum effectus nullus est. Pari modo, si aliquis habeat 100 nummos, totidemque alteri debeat; iam illi 100 nummi, si ad huius hominis possessionem referantur, pro nihilo considerari debent. Si autem quis 100 nummos habeat, et 200 alteri debeat, tam possesio huius hominis negativa est, et, ut ita dicam, nihilo minor. Si aliquis ad propositum locum iter facturus, ad partem directe oppositam progrediatur, iam huius hominis iter tamquam negativum et minus nihilo haberi debet, si ad finem propositum referatur. Igitur probe tenendum est, quid intelligatur per quantitatem negativam, et nihilo, ut dicunt, minorem. Quantitas negativa non minus realis est quam quantitas positiva; sed nihilo minor dicitur, quatenus positivae quantitati opponitur; iuncta scilicet quantitati positivae ipsam minuit, quem quidem effectum, hanc nempe diminutionem, ipsum *zero* non producit. Quare quantitas negativa ratione effectus tantum et *relative*; non autem *absolute* nihilo minor dicitur. Hunc loquendi modum a nonnullis usurpatum ita explicavimus, ut nihil difficultatis tironibus facessere possit.

CAPVT IV.

De iisdem operationibus in numeris fractis.

I.

Numeri fracti definitionem iam in primo capite tradidimus. Si divisor excedat dividendum, duo numeri a se invicem interposita lineola separantur ita, ut dividendus supra lineolam, et divisor infra eam scribantur, in hunc modum $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$ cet. Similiter si quantitas aliqua litteralis per aliam dividenda proponatur, et divisio fieri non possit, eodem modo scribuntur duae quantitates: ita $\frac{a}{b}$ significat quotum ex a per b; tales autem quoti *fractiones* vocantur. Quantitas superior dicitur *numerator*, inferior autem *denominator* appellatur. Denominator exprimit numerum partium, in quas totum aliquod divisum fingitur; numerator autem designat, quot eiusdem partes accipiantur, vel, quod idem est, quoties una ex illis partibus sumatur, ac proinde pars illa considerari potest tamquam unitas aliqua. E. g. fractio $\frac{3}{4}$ nihil est aliud, quam pars quarta, alicuius totius ter sumta; haec autem pars quarta, tamquam unitas alia haberi etiam potest. *Itaque inspe-*

tuam probationem conferre ita, ut multiplicatio per divisionem, et versa vice divisio per multiplicationem confirmetur.

Scholion. In hoc capite frequens fit mentio de quantitatibus negativis, quarum genuinam notionem paucis iterum explicare non abs re erit. Si duae quantitates magnitudine aequales ad partes directe oppositas simul et in eodem subiecto coniunctae intelligantur; sese mutuo destruunt, illarumque effectus nihilo aequalis est. Ita si potentiae duae aequales in partes directe oppositas agunt, virium illarum effectus nullus est. Pari modo, si aliquis habeat 100 nummos, totidemque alteri debeat; iam illi 100 nummi, si ad huius hominis possessionem referantur, pro nihilo considerari debent. Si autem quis 100 nummos habeat, et 200 alteri debeat, tam possesio huius hominis negativa est, et, ut ita dicam, nihilo minor. Si aliquis ad propositum locum iter facturus, ad partem directe oppositam progrediatur, iam huius hominis iter tamquam negativum et minus nihilo haberi debet, si ad finem propositum referatur. Igitur probe tenendum est, quid intelligatur per quantitatem negativam, et nihilo, ut dicunt, minorem. Quantitas negativa non minus realis est quam quantitas positiva; sed nihilo minor dicitur, quatenus positivae quantitati opponitur; iuncta scilicet quantitati positivae ipsam minuit, quem quidem effectum, hanc nempe diminutionem, ipsum *zero* non producit. Quare quantitas negativa ratione effectus tantum et *relative*; non autem *absolute* nihilo minor dici-

tur. Hunc loquendi modum a nonnullis usurpatum ita explicavimus, ut nihil difficultatis tironibus facessere possit.

CAPUT IV.

De iisdem operationibus in numeris fractis.

I.

Numeri fracti definitionem iam in primo capite tradidimus. Si divisor excedat dividendum, duo numeri a se invicem interposita lineola separantur ita, ut dividendus supra lineolam, et divisor infra eam scribantur, in hunc modum $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$ cet. Similiter si quantitas aliqua litteralis per aliam dividenda proponatur, et divisio fieri non possit, eodem modo scribuntur duae quantitates: ita $\frac{a}{b}$ significat quotum ex a per b; tales autem quoti *fractiones* vocantur. Quantitas superior dicitur *numerator*, inferior autem *denominator* appellatur. Denominator exprimit numerum partium, in quas totum aliquod divisum fingitur; numerator autem designat, quot eiusdem partes accipiantur, vel, quod idem est, quoties una ex illis partibus sumatur, ac proinde pars illa considerari potest tamquam unitas aliqua. E. g. fractio $\frac{3}{4}$ nihil est aliud, quam pars quarta, alicuius totius ter sumta; haec autem pars quarta, tamquam unitas alia haberi etiam potest. *Itaque inspe-*

cta numeratoris et denominatoris natura, evidens est: fractionem maiorem esse, quae sub eodem denominatore maiorem habeat numeratorem; atque contra minorem esse, quae sub eodem numeratore maiorem habeat denominatorem. Ac proinde valor fractionis consistit in relatione seu ratione numeratoris ad denominatorem. Certum etiam est, quod si data quantitas alterius dupla sit, tripla vel centupla, etiam illius dimidia, tertia, quarta, vel millesima pars erit dupla, tripla, vel centupla huius dimidiae, tertiae, quartae, vel millesimae partis. Ex quibus liquet, in fractionibus valorem non mutari, si numerator et denominator per eamdem quantitatem multiplicentur aut dividantur.

II. Ex fractionum natura intelligitur, qua ratione numerus integer ad fractum reducatur, atque etiam ad denominatorem datum. Ita si numerus 3 reducendus proponatur ad fractionem, cuius denominator sit 4; multiplicetur 3 per 4, scribaturque $\frac{12}{4}$, eritque haec fractio aequivalens ternario, ut patet; quum numerus 3 multiplicetur, simulque dividatur per 4. Sed tales fractiones, in quibus numerator maior est denominatore, pro veris fractionibus non habentur, atque *improprie* dumtaxat fractiones appellantur. Pari ratione si quantitas a reduci debeat in fractionem litteralem, cuius denominator sit b; habebitur $\frac{ab}{b} = a$.

Ex his etiam patet, quomodo fractiones, quae diversum habent denominatorem, ad eumdem

redigantur. Sint fractiones duae $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$: multiplicentur fractionis $\frac{a}{b}$ numerator et denominator per alterius denominatorem d, erit $\frac{a \times d}{b \times d} = \frac{a}{b}$. Simili modo multiplicentur fractionis $\frac{c}{d}$ numerator et denominator per alterius denominatorem b, erit $\frac{c \times b}{d \times b} = \frac{c}{d}$. (§. *I.*) Itaque generatim fractiones ad eumdem denominatorem reducuntur, multiplicando numeratorem unius per denominatorem alterius, et versa vice, scribendoque pro denominatore communi productum ex utroque denominatore. Evidens est, hanc operationem eamdem esse pro quolibet fractionum numero. Multiplicentur scilicet numeratores singuli seorsum sumti per denominatores ceterarum fractionum; producta singula dabunt numeratores singulos quaesitos. Deinde denominatores singuli in se ipsos ducantur, habebitur denominator communis quaesitus. Ita fractiones $\frac{a}{b}$, $\frac{b}{c}$, $\frac{c}{d}$ reducuntur ad $\frac{acd}{bcd}$, $\frac{bbd}{bcd}$, $\frac{ccb}{bcd}$. Patet, rem perinde se habere in numeris quibuslibet fractis. Ita fractiones $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, *respective* aequales sunt fractionibus $\frac{40}{60}$, $\frac{45}{60}$, $\frac{48}{60}$ (§ *I.*)

III. Hinc facile adduntur et subtrahuntur fractiones. Reducantur scilicet ad denominatorem communem (§. *II.*): sumatur numeratorum summa vel differentia, et subscribatur denominator communis. In primo casu habebitur additio; in altero autem subtractio. Ita $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}+\frac{d}{e}=\frac{ade+bce+bdd}{bde}$, et $\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{ad-bc}{bd}$. Similiter in numeris $\frac{2}{3}+\frac{3}{4}=\frac{8+9}{12}=\frac{17}{12}=1\frac{5}{12}$. Sed $\frac{4}{5}-\frac{3}{4}=\frac{16-15}{20}=\frac{1}{20}$. Fractiones ex integris et fractis compositae, qualis est $1\frac{5}{12}$, appellantur mixtae. Ex his autem statim intelligitur, quomodo numeri integri et fracti simul addi possint, vel a se invicem subtrahi. Integri ad fractos reducantur et ad denominatorem communem, atque operatio fiat, ut antea. Quamvis autem additionis et subtractiones operationes ex dictis sint manifestae, demonstrari tamen possunt hoc modo. Sint fractiones duae $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{b}$ ad eumdem denominatorem reductae, erit $\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b}$, et $\frac{a}{b}-\frac{c}{b}=\frac{a-c}{b}$. Etenim

ponatur $\frac{a}{b}=m$, et $\frac{c}{b}=n$; erit, facta multiplicatione per b, $a=mb$, $c=nb$, et $mb+nb=a+c$; ac proinde $m+n=\frac{a+c}{b}$, hoc est, $\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b}$. Simili modo patet, esse

$$\frac{a}{b}-\frac{c}{b}=m-n=\frac{a-c}{b}.$$

IV. Nulla reductione opus est, ubi fractiones multiplicare et dividere oportet. In multiplicatione satis est numeratores et denominatores invicem ducere: habebitur numerator et denominator fractionis quaesitae, quae erit productum ex datis fractionibus emergens. Contra vero si fractio per aliam fractionem dividenda sit, numerator dividendae per alterius denominatorem est multiplicandus, et illius denominator in huius numeratorem ducendus est, *seu quod idem est: fractio per quam divisio fieri debet, invertatur* e. g. *pro* $\frac{2}{5}$ *scribatur* $\frac{5}{2}$. *Atque fiat fractionum multiplicatio, ut in casu praecedenti.* Ita productum ex $\frac{a}{b}$ per $\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$ Quotus autem ex $\frac{a}{b}$ per $\frac{c}{d}=\frac{ad}{bc}$.

Etenim ponatur $\frac{a}{b} = m$; $\frac{c}{d} = n$; erit $a = bm$, et $c = dn$. Iam demonstrandum superest, esse $\frac{ac}{bd} = mn$, et $\frac{ad}{bc} = \frac{m}{n}$. Quod quidem facile patet substituendo loco a et c illorum valores bm et dn; erit in primo casu $\frac{bdmn}{bd} = mn$; in casu autem altero, fiet $\frac{bdm}{bdn} = \frac{m}{n}$. Demonstratio generalis est, ac proinde in quibuslibet numeris fractis eadem est operatio. Sic productum ex $\frac{2}{6}$ in $\frac{4}{8} = \frac{8}{48}$. Sic quotus ex $\frac{3}{6}$ per $\frac{2}{16} = \frac{48}{12} = 4$. Manifesta quoque est operandi ratio, si numerus fractus per integrum multiplicari aut dividi debeat. Considerari enim debet numerus integer tamquam fractio impropria, in qua denominator est unitas, et reliqua peragenda, ut antea. Quare patet, in multiplicatione numerum integrum per numeratorem esse multiplicandum; contra autem in divisione per denominatorem. Nec mirum esse debet, si fractio per fractionem divisa, praebeat numerum integrum; quum revera una fractio bis, ter, quater cet. in alia contineri possit. Itaque fractionum valor per multiplicationem minuitur, augetur per divisionem. Quod quidem paradoxum videtur iis, qui multiplicationis et divisionis naturam non satis attendunt.

Ex dictis etiam facile patet, *fractiones fractionum* ad multiplicationem referri. *Fractionem fractionis* appellant fractionis alicuius partem. Ita si sumantur $\frac{2}{3}$ fractionis $\frac{3}{4}$, operatio illa ad divisionem non pertinet, sed ad multiplicationem. Etenim si sumenda proponeretur dumtaxat pars $\frac{1}{3}$ fractionis $\frac{3}{4}$, multiplicandus esset denominator per 3 habereturque $\frac{3}{12}$. At sumi non debet dumtaxat pars tertia; sed duae tertiae partes sumendae proponuntur. Quare productum praecedens duplo maius fieri debet, hoc est, numerator multiplicandus est per 2. Eodem modo reduci debent aliae quotlibet fractiones fractionum, multiplicando numeratores singulos et singulos denominatores.

Ex fractionum doctrina colligi possunt operationum arithmeticarum compendia plurima, si de quantitatibus variae speciei agatur. E. g. quaeritur, quanti constituerint 35 mensurae mercis alicuius, si mensurae unius pretium sit 24 nummorum et assium 15. Multiplicetur primo (35×24) erit productum 840. Quod ad alteram multiplicationis partem, considerari potest, esse $15 = 10 + 5$. Iam si asses 10 nummo aequivalerent, productum foret 35. At sunt 10 *asses* pars decima dumtaxat nummi unius, quare 35 dividi debet per 10 *. Simili modo operandum est in ultima mul-

* *Monetae, de quibus heic Auctor, videntur, quae hodie num apud romanos in usu sunt.* As *est vilioris pretii moneta* quattrino, *quorum quinque componunt aliam* bayocco. *Ex quin-*

tiplicationis parte, atque emerget productum ex nummis, nummorumque partibus compositum. Ille operandi modus dicitur operatio per partes *aliquotas*. Partes enim aliquotae quantitatis alicuius appellantur, quae ipsam quantitatem accurate dividunt; secus autem partes *aliquantae* vocantur. Ceterum exercitatio atque attentio multa docebunt: quae fusius explicare superfluum esset.

V. Explicatis arithmeticae operationibus in numeris fractis, iam superest, ut communes, si quos habeant, fractionum divisores inquiramus. Si numeri nullum habeant communem divisorem praeter unitatem, numeri illi inter se *primi* dicuntur, cuiusmodi sunt 1, 5, 7, 11, 19, quos sola unitas metitur. At numeri *compositi* appellantur, quos praeter unitatem alii quoque numeri metiuntur. Sic 12 componitur ex 2 in 6, itemque ex 3 in 4. Quare 2, 3, 4, 6 metiuntur 12, seu aliquoties sumti 12 adaequant. Illi autem numeri dicuntur *fractores* ipsius numeri 12. Si igitur fractionis alicuius denominator sit numerus compositus, et resolvi possit in alterius fractionis denominatorem, instituta divisione per hunc numerum, qui sit vel numerator vel etiam numeratoris divisor communis, iam licebit fractionem

que bayocci *conflatur alia* grosso. *Quattuor* grossi *componunt aliam, quae dicitur* pappetto, *quae nomine nummi ab Auctore intelligitur. Quapropter in hac computatione nummis seu* pappeto *componitur ex* 100 *assibus seu* quatrini.

hanc ad minimos terminos deprimere; quod sic praestari potest. Dividatur maior numerus per minorem; si nihil ex divisione supersit, iam minor numerus est divisor maximus communis. Si autem residuum aliquod fuerit, divisor datus per hoc residuum dividatur. Si divisio accurate fiat, primum residuum erit maximus divisor communis. Si autem divisio non sit accurata, sed alterum maneat residuum, per hoc secundum residuum dividatur primum. Si autem nullum supersit tertium residuum, iam residuum secundum pro maximo divisore communi haberi debet. Atque ita progrediendum, donec nihil supersit. Atque ultimus divisor erit maxima, ut vocant, communis duorum numerorum mensura, qua inventa, fractio ex his duobus numeris composita ad minimos terminos reducitur. Exemplo sit fractio $\frac{91}{294}$. Dividatur 294 per 91; neglectoque quoto 3, residuum est 21. Rursus dividatur 91 per 21, iterumque neglecto quoto 4, residuum est 7. Tandem residuum primum 21 per alterum 7 dividatur; habetur quotus 3, et divisio est accurata. Quare numerus 7 est maximus communis divisor, per quem divisis numeratore et denominatore, fractio praecedens in hanc simpliciorem abit $\frac{13}{42} = \frac{91}{294}$. AEquales autem esse fractiones illas, ex natura divisionis, *et ex his*, *quae* §. *I. dicta sunt*, omnino patet. At, si divisione instituta, ad unitatem tandem, ultimum residuum, perveniatur; iam nulla est mensura communis praeter unitatem.

Eadem plane est operatio in quantitatibus litteralibus. Hoc solum observandum est, nempe quantitates residuas per earum simplices divisores esse dividendas, *seu quod idem est, per monomium aliquod, si forte omnibus residui terminis commune sit.* Quantitates item secundum eiusdem litterae dignitatem, *sicut in dividendo*, semper sunt ordinandae. Invenienda sit maxima communis mensura quantitatis $a^2 - b^2$, et $a^2 + 2ab + b^2$. Dividatur $a^2 + 2ab + b^2$ per $a - b^2$; residuum fit $2ab + 2b^2$. *Quum vero in hoc residuo sit monomium* 2b *utrique termino commune; deleatur utrinque:* ut reducatur residuum ad $a + b$. Iterum dividatur $a^2 - b^2$ per $a + b$; divisio accurate succedit, ac proinde maximus divisor communis est $a + b$.

(Tota huius operationis ratio patet ex hoc divisionis principio: si nempe quantitas aliqua metiatur et divisorem et residuum, metiri quoque debet ipsum dividendum.) Est enim dividendus aequalis producto ex divisore in quotum et ipsi residuo simul. Ita in exemplo praecedenti *sit dividendus* $a^2 + 2ab + b^2 = A$: *divisor* $a^2 - b^2 = B$: *residuum* $2ab + 2b = R$. *Si quotus certo quodam et integro numero exprimatur* v. g. 4, *erit* $A = 4B + R$, *seu* $A - R = 4B$. *Si igitur* B *et* R *habeant communem divisorem; erit* R *aliquoties sumtus*, v. g. *ter*, *aequalis* B, *adeoque* $B = 3R$. *Inde substituto valore* B *in superiori aequatione, erit* $A - R = 12R$, *seu* $A = 13R$. *Igitur* A *et* R *habent etiam communem divisorem, quum sit* A *multiplus ipsius* R.

Porro ubi residuum fit nullum, seu dum accurate succedit divisio; evidens est, divisorem

haberi maximum. Quum enim dividendus aequalis sit producto ex divisore in quotum, et ipsi residuo simul; ubi residuum fit divisor accuratus, iam patet, divisorem esse maximum. Nulla enim quantitas potest habere divisorem se ipsa maiorem. Ita in praecedenti aequatione $A = QB + R$, exprimat Q quotum. Iam dividatur B per R; et divisio succedat accurate, patet, esse R maximum divisorem communem. Dividit enim B (*ex hypoth.*) ac proinde et BQ: praeterea dividit R; fieri autem non potest, ut R habeat divisorem se ipso maiorem. Quamvis in numeris et quantitatibus litteralibus eadem sit operatio; tamen ut divisor per residuum possit dividi, saepe oportet, primos terminos ita praeparare, ut alter per alterum accurate dividi possit sine fractione. Id autem fit observando in novi divisoris primo termino quantitates, quae non habentur in primo termino dividendi. Si autem per eas dividi potest totus divisor, is totus dividatur; sin minus, multiplicetur totus dividendus per illas quantitates, quae non occurrunt in dividendo, atque ita faciendum in tota operationis serie, si necesse sit. Ita in praecedenti exemplo ubi perventum est ad residuum $2ab + 2b^2$, residuum illud dividi praescripsimus per $2b$. (Haec autem praescripta praeparatio tota pendet ex hoc principio: nempe, quantitates A et B communem retinebunt maximum divisorem, si multiplicetur vel dividatur quantitas altera, puta A, per quantitatem, quae nullum cum quantitate B communem divisorem habeat.) Illud autem principium ex ipsa divisoris communis notione est omnino evidens.

De fractionum communi divisore unum addendum est, quod deinde utilitatis maximae esse debet. Si numeri duo primi fuerint, aut eorum alteruter dumtaxat primus fuerit; evidens est ex ipsa numerorum primorum definitione et ex communium divisorum regula, numeros illos nullum praeter unitatem divisorem communem habere. Quare fractio ex duobus numeris primis composita, puta $\frac{a}{b}$, ad simpliciores terminos reduci non potest. Ergo productum *ac* ex duobus numeris primis ab ipso *b* diversis non potest accurate dividi per *b*. Nam ponatur $\frac{ac}{b} = m$ erit $\frac{a}{b} = \frac{m}{c}$, quod fieri non potest. Oportet enim *b* et *c* habere divisorem communem, quod est contra hypothesim. Similiter ostendetur, fractionem $\frac{ac}{bd}$, in qua *d* est numerus primus ad simpliciorem expressionem reduci non posse, atque ita deinceps. Nempe generatim productum ex numeris primis quibuscumque, divisum per productum ex aliis quibuscumque numeris itidem primis, ad simpliciores terminos reduci non potest. Quare si $\frac{a}{b}$ sit fractio ad minimos terminos redu-

cta erunt quoque $\frac{aa}{bb}$ $\frac{a^3}{b^3}$, et generatim $\frac{ba}{bn}$ fractiones ad simplicissimos terminos redactae. Ac proinde fractio quaelibet sive pura sive mixta ad potentiam quamlibet evecta semper manet fractio.

De fractionibus decimalibus.

Scholion. Praeter fractiones in hoc capite explicatas considerari etiam debent fractiones, quae *decimales* appellantur. Illae scilicet fractiones pro denominatore habent unitatem cum tot sequentibus cyphris, quot sunt numeri in numeratore: atque eam ob causam non scribitur denominator, sed numerator dumtaxat, cuius numeris praefixa est virgula. Alii punctum praefigunt, quod fit, ut numerator a numeris integris distinguatur. Ita ad exprimendam fractionem 19 $\frac{4}{10}$, scribi solet 19, 4. Ad exprimendam fractionem 19 $\frac{4}{100}$, scribitur 19, 04; cyphra numero 4 praefixa iudicat, denominatorem esse 100 Fractio 19 $\frac{4}{1000}$ ita exprimitur 19, 004. Ex fractionum decimalium significatione patet, primum numerum post virgulam designare decadas, secundum centenarios, et ita deinceps per decadas semper progrediendo. Sic $4, 217 = 4 + \frac{2}{10} + \frac{1}{100} + \frac{7}{1000}$. Fractionum decimalium utilitas maxima est ad obtinendum quotum proxime verum, si divisio accurate fieri non possit. E. g. si dividendus proponatur numerus 147475 per 362, quotus invenitur 407 cum residuo 141, cui addatur 0, dividaturque 1410 per 362, quotus erit 3 cum novo residuo 324, cui iterum addatur 0, dividaturque 3240 per 362, quotus prodit 8 cum residuo 344, cui addatur 0; in nova tandem divisione quotus emergit 9; quod autem remanet 182, iterum dividi posset; sed operationis ordinem exhibuisse satis sit. Quare quotus est 407, 389, quem quidem accuratorem esse evidens est.

Eadem methodo fractio vulgaris in fractionem decimalem reducitur. Si fractio $\frac{3}{4}$ in fractionem decimalem reducenda proponatur, numeratori 3 addatur 0, dividaturque 30 per 4, quotus est 7 cum residuo 2, cui addatur 0, rursusque 20 per 4 dividatur, quotus est 5 sine ullo residuo; quare $\frac{3}{4} = 0, 75$. Et re quidem ipsa, quum sit 25 quarta pars numeri 100, numerus 75 erit $\frac{3}{4}$ eiusdem numeri 100. Hinc generatim patet, quo artificio fractio vulgaris ad decimalem reduci possit. Multiplicetur nempe numerator fractionis datae per 100 vel 1000 cet. productum illud divisum per denominatorem erit numerator fractionis decimalis, cuius denominator est 100 vel 1000 cet. Saepe tamen contingit, fractiones ad decimales accurate reduci non posse, etiamsi divisionum residuis plures utcumque cyphrae eddantur. Id autem facile dignoscitur, si nempe ad idem residuum semper perveniamus, vel si iidem numeri eodem ordine redeant. Ita si fractionem $\frac{4}{7}$ ad decimalem reducere volueris, invenies 0, 571428571428571428 cet. nec umquam pervenies ad divisionem accuratam. Pari modo ad reducendam fractionem $\frac{5}{12}$ in decima-

lem, invenies 0, 416666 cet. In his autem casibus duas vel tres primas decimales adhibere satis sit, reliquae autem negliguntur. Ita poni possunt $\frac{4}{7} = 0, 57$ et $\frac{5}{12} = 0, 416$.

Haec quidem pauca satis esse possunt iis, qui demonstrationis severitatem non quaerunt. Sed rem utilissimam generatim et omnino accurate ostendemus. Sit $\frac{p}{q}$ fractio vulgaris reducenda ad fractionem decimalem $\frac{r}{10^n}$, in qua n exprimit cyphrarum numerum, et r valorem notarum in numeratore, erit $r = \frac{p \times 10^n}{q}$. Sed est $10^n = 2^n \times 5^n$; est igitur $r = \frac{p \times 2^n \times \overset{5}{\cancel{10}}{}^n}{q}$. Non potest autem $\frac{p \times 2^n \times 5^n}{q}$ seu r abire in numerum integrum, nisi q aequalis sit alicui potestati ipsius 2 vel 5 vel 2×5, vel tandem producto ex aliqua potestate ipsius 2 in aliquam potestatem ipsius 5, quae tamen potestates sunt minores, quam n. Ponitur enim, fractionem $\frac{p}{q}$ esse ad minimos terminos reductam, hoc est, p et q nullum habere divisorem communem. In alio quolibet casu fractio $\frac{p\times 10^n}{q}$ seu r numquam fieri poterit numerus integer. Attamen quo maior erit n, hoc est, quo plures erunt cyphrae in denominatore, eo magis fractio $\frac{r}{10^n}$ accedet ad fractionem $\frac{p}{q}$. Si enim $p\times 10^n$ per q dividatur, inventus r minor erit [*quum sit quotus in divisione non exacta*]. Iusto autem maior fiet, si unitate augeatur. Quare $\frac{r}{10^n}$ minor est, quam $\frac{p}{q}$, et $\frac{r+1}{10^n}$ maior. *Porro quum augetur* n, *maiori ratione crescit* r; *adeoque crescit valor fractionis* $\frac{r}{10^n}$. *Item aucta* r, *minuitur in numeratore fractionis* $\frac{r+1}{10^n}$ *ratio unitatis ad* r, *adeoque minuitur excessus iusto maior. Igitur quo maior fuerit* n, *eo magis fractio decimalis ad legitimum valorem accedet.* Hinc patet, utilissimum esse fractionum decimalium usum, quum earum ope valor fractionum accuratus quamproxime haberi possit.

Quattuor arithmeticae operationes in fractionibus decimalibus eadem omnino ratione, qua in numeris integris tractantur; sed habenda est maxime ratio virgulae, qua fractiones ab integris dirimuntur. Haec virgula in eadem linea verti-

cali iacere debet, si plures quantitates vel in unam summam colligendae sunt, vel invicem subtrahendae. Si vero multiplicatio instituitur, eum locum in producto occupare debet virgula, ut totidem post se notas relinquat, quot erat in utraque fractione. Tandem si divisio peragitur numeri dividendi notae decimales probe observandae sunt; nam in quoto et divisore simul totidem esse debent post virgulam notae, quot erant in dividendo. Quattuor illarum operationum exempla exhibebimus.

Additio.	*Subtractio.*
23, 304	
3, 9567	49, 638
149, 86	17, 16
177, 1207	32, 478

Multiplicatio.	*Divisio.*	
12, 35	8, 445	3, 22
4, 2	6 44	2, 6
2470	2 005	
4940	1 932	
51,870	0 073	

Vnum autem in divisione notandum est. Si nempe in divisione plures occurrant notae decimales, quam in dividendo, tunc decimalibus dividendi adiunges, quot volueris cyphras, ita tamen ut notae decimales in dividendo plures sint, quam in divisore, ut nempe in quoto aliquae decimales notae haberi possint. Tota operationum illarum ratio statim manifesta fiet, si fractiones decimales vulgari modo exprimantur. Ita in exemplo divisionis praecedentis $8,445=\frac{8445}{1000}$ et $3,22=\frac{322}{100}$. Itaque dividi debet fractio prior per secundam. Evidens autem est, cyphram unam dumtaxat in quoto adesse. Et hinc facile intelligitur, cyphrarum numerum in quoto esse semper aequalem differentiae cyphrarum in divisore et dividendo. Generatim, quod ad multiplicationem spectat, si 10^n sit denominator fractionis unius decimalis, et 10^m alterius; denominator producti erit 10^{m+n}. Quare, omisso denominatore, productum habere debet tot partes decimales seu numeros post virgulam, quot sunt unitates in $m+n$. Contraria ratione in divisione denominator quoti non erit 10^{m+n}, sed 10^{m-n} *exprimente* m *partes decimales in dividendo, et* n *partes decimales divisoris;* ideoque $m-n$ exprimet numerum cyphrarum, quae post virgulam in quoto scribi debent.

CAPVT V.

De radicum extractione.

I.

Explicavimus iam in capite II, quid sit *potestatum* formatio. Quantitatis alicuius *potestas pri-*

ma vel *primi gradus* est quantitas ipsa solitarie spectata. Ita prima potestas ipsius a est a. Productum ex quantitate aliqua in se ipsam dicitur *potestas secunda* vel etiam *quadratum:* ita a^2 est quadratum. Ipsa autem quantitas dicitur *radix*, quae vocatur *quadrata*, si potestas sit secunda, vel quadratum. Si quadratum in ipsam quantitatem ducatur, productum dicitur *potestas tertia* vel *cubus:* ita a^3 est cubus ipsius a: quantitas autem dicitur *radix cubica*. Et generatim *quantitas ad datam potestatem elevatur, si eius exponens ducatur in exponentem potestatis.* Ita si quantitas a evehatur ad potestatem, cuius index est n, habebitur a^n gradus n.

Scholion 1. In hoc autem capite praesertim considerabimus radicum quadratae et cubicae extractionem. Quod ut clare fiat, ipsam quadrati et cubi formationem primum investigavimus, atque deinde ad operationes arithmeticas recto ordine progrediemur. Sit quantitas litteralis $a+b$ ad quadratum evehenda, prodit $aa+2ab+bb$. Iam vero quadrati huius formationem seu partes singulas expendamus. Quadratum binomii $a+b$ continet: I.° Quadratum aa primae partis a: II.° Productum $2ab$ ex duplo primae partis in secundam: III.° Quadratum partis secundae, nempe bb. Simili modo si multiplicetur $a+b+c$ per $a+b+c$, orietur quadratum $a^2+2ab+b^2+\overline{2a+2b}\times c+c^2$. In hoc quadrato rursus considerandae sunt partes singulae. Continet I.° quadratum $a^2+2ab+b^2$ ex duobus primis terminis $a+b$: II.° Productum notae decimales in dividendo plures sint, quam in divisore, ut nempe in quoto aliquae decimales notae haberi possint. Tota operationum illarum ratio statim manifesta fiet, si fractiones decimales vulgari modo exprimantur. Ita in exemplo divisionis praecedentis $8,445 = \frac{8445}{1000}$ et $3,22 = \frac{322}{100}$. Itaque dividi debet fractio prior per secundam. Evidens autem est, cyphram unam dumtaxat in quoto adesse. Et hinc facile intelligitur, cyphrarum numerum in quoto esse semper aequalem differentiae cyphrarum in divisore et dividendo. Generatim, quod ad multiplicationem spectat, si 10^n sit denominator fractionis unius decimalis, et 10^m alterius; denominator producti erit 10^{m+n}. Quare, omisso denominatore, productum habere debet tot partes decimales seu numeros post virgulam, quot sunt unitates in $m+n$. Contraria ratione in divisione denominator quoti non erit 10^{m+n}, sed 10^{m-n} *exprimente* m *partes decimales in dividendo, et* n *partes decimales divisoris;* ideoque $m-n$ exprimet numerum cyphrarum, quae post virgulam in quoto scribi debent.

CAPVT V.

De radicum extractione.

I.

Explicavimus iam in capite II, quid sit *potestatum* formatio. Quantitatis alicuius *potestas pri-*

ma vel *primi gradus* est quantitas ipsa solitarie spectata. Ita prima potestas ipsius a est a. Productum ex quantitate aliqua in se ipsam dicitur *potestas secunda* vel etiam *quadratum:* ita a^2 est quadratum. Ipsa autem quantitas dicitur *radix*, quae vocatur *quadrata*, si potestas sit secunda, vel quadratum. Si quadratum in ipsam quantitatem ducatur, productum dicitur *potestas tertia* vel *cubus:* ita a^3 est cubus ipsius a: quantitas autem dicitur *radix cubica.* Et generatim *quantitas ad datam potestatem elevatur, si eius exponens ducatur in exponentem potestatis.* Ita si quantitas a evehatur ad potestatem, cuius index est n, habebitur a^n gradus n.

Scholion I. In hoc autem capite praesertim considerabimus radicum quadratae et cubicae extractionem. Quod ut clare fiat, ipsam quadrati et cubi formationem primum investigavimus, atque deinde ad operationes arithmeticas recto ordine progrediemur. Sit quantitas litteralis $a+b$ ad quadratum evehenda, prodit $aa+2ab+bb$. Iam vero quadrati huius formationem seu partes singulas expendamus. Quadratum binomii $a+b$ continet: I.° Quadratum aa primae partis a: II.° Productum $2ab$ ex duplo primae partis in secundam: III.° Quadratum partis secundae, nempe bb. Simili modo si multiplicetur $a+b+c$ per $a+b+c$, orietur quadratum $a^2+2ab+b^2+\overline{2a+2b}\times c+c^2$. In hoc quadrato rursus considerandae sunt partes singulae. Continet I.° quadratum $a^2+2ab+b^2$ ex duobus primis terminis $a+b$: II.° Productum ex duplo duorum priorum terminorum in tertium terminum $= \overline{2a+2b} \times c$. Tandem continet quadratum c^2 tertii termini. Simili modo progredi licet pro alia qualibet quantitate ex pluribus quam tribus terminis composita. Tales vero quantitates magis compositae appellari solent *polynomia*.

Eadem omnino ratione intelligitur cubi formatio. Binomium $a \times b$ ad tertiam potestatem evehatur: multiplicetur nempe quadratum $a^2+2ab+b^2$ per $a+b$, prodit cubus $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$. Cubi huius partes singulae sunt. I.° Cubus primi termini, nempe a^3 II.° Productum ex triplo quadrato $3a^2$ primi termini in terminum secundum, scilicet $3a^2b$ III.° Productum ex primo termino a in triplum quadratum secundi termini; nempe $3ab^2$ IV.° Cubus secundi termini, scilicet b^3.

Simili modo operandum est pro trinomio $a+b+c$; invenieturque cubus $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3+3a^2c+6abc+3b^2c+3ac^2+3bc^2+c^3$. In hoc autem cubo praeter cubum $a^3+3ab^2+3a^2b+b^3$ duorum primorum terminorum, habetur I.° Factum ex triplo quadrato summae duorum primorum terminorum in tertium terminum c, nempe $3a^2c+6abc+3b^2c = \overline{a^2+2ab+bb} \times 3 \times c$. II.° Summa duorum primorum terminorum per tertii termini triplum quadratum multiplicata, scilicet $3ac^2+3bc^2 = a+b \times 3c^2$ III.° Tandem tertii termini cubus, nempe ccc.

II. Ex potestatum compositione facile colligitur illarum resolutio sive radicum extractio. Sit

quantitas litteralis $x^2 - ax + \frac{1}{4}a^2$ ex qua extrahenda sit radix quadrata. Sumatur primi termini radix x, cuius quadrato subtracto, remanent termini duo $-ax+\frac{1}{4}a^2$. Deinde sumatur duplum ipsius x, per quod dividatur secundus terminus $-ax$, quotus fit $-\frac{1}{2}a$, qui multiplicetur per $2x$. Tandem fiat quadratum quoti $-\frac{1}{2}a$, atque producta illa ex residuo $-ax+\frac{1}{4}a^2$ subtrahantur, nihil remanet. Quare radix quadrata est $x-\frac{1}{2}a$. Tota operatio patet ex numero praecedenti. En typus calculi.

$$
\begin{array}{l}
x^2 - ax + \frac{1}{4}a^2 \quad (x - \frac{1}{2}a \\
x^2 \\
\hline
0 - ax + \frac{1}{4}a^2 \\
\cancel{2x - \frac{1}{2}a} \\
\hline
\quad - ax + \frac{1}{4}a^2 \\
\hline
\quad\quad 0 \quad 0
\end{array}
$$

Ceterum, si radix plures habuerit quam duos terminos, iam duo primi termini post primam operationem velut unicus terminus considerari debent, et reliqua peragenda, ut antea, quod quidem patet ex demonstratis.

Proponatur extrahenda radix cubica ex quantitate litterali $c^3 - 3c^2y + 3cy^2 - y^3$. Ex primo termino extrahatur radix cubica, quae est c, cuius c^3 ex primo termino auferatur: remanent termini $-3c^2y+3cy^2-y^3$. Iam quia notum est, secundum terminum multiplicari per triplum quadratum primi, sumatur termini c triplum quadratum, per quod dividatur secundus terminus $-3c^2y$, prodit quotus $-y$, qui erit secunda pars radicis. Tum divisor $3c^2$ ducatur in $-y$; ut habeatur triplum quadratum primae partis radicis ductum in secundam $-3c^2y$. Deinde fiat $3y^2 \times c$ aequale triplo quadrato secundae partis radicis ducto in primam. Tandem fiat $-y^3$: cubus secundae partis. Si haec producta ex reliquis terminis auferantur, nihil remanet; ac proinde radix accurata est $c-y$. En calculi typum.

$$
\begin{array}{l}
c^3 - 3c^2y + 3cy^2 - y^3 \quad (c-y \\
c^3 \\
\hline
0 - 3c^2y + 3cy^2 - y^3 \\
\quad (3c^2) \\
\quad -3c^2y + 3cy^2 - y^3 \\
\hline
\quad 0 \qquad 0 \qquad 0 \\
\hline
\end{array}
$$

III. Ex demonstrationibus praecedentibus facile patet radicum extractio in quantitatibus numericis. Extrahenda sit radix quadrata, ut in praesenti exemplo. Numerum datum in classes divide, quarum singulae duas notas contineant, initio a dextris facto. Nihil autem refert sive unica tantum nota constet prima classis, sive notis duabus. Quaere radicem veram aut proxime veram numeri 38, in nostro casu est 6. Scribe 6 loco radicis, et eius quadratum 36 aufer ex 38. Residuo 2 adiunge notas classis pro-

Exemplum.

```
38.94.89. (624,09.
36
----------
 294
 122
 244
----------
 5089
 1244
 4976
----------
 11300
 12480
     0
----------
 1130000
 124809
 1123281
----------
    6719 cet.
```


xime sequentis 94, et huius novi numeri postrema nota neglecta, quaere, quoties duplum radicis hactenus inventae sive 12 contineatur in 29, invenietur 2; scribe ergo 2 in radice, eumdemque quotum 2 scribe etiam sub dexteriori nota 4 numeri 294. Ex 294 aufer productum ex 2 in 122 nempe 244, remanet 50. Huic autem residuo adnecte notas classis proxime sequentis 89. Rursus contemta novi numeri dextera nota, quaere, quoties duplum radicis hactenus inventae, scilicet 124, contineatur in 508. Quotus erit 4, qui quidem ponatur etiam sub nota dextera numeri 5089, iterumque ex numero superiori aufer productum ex 1244 in 4; nempe 4976, residuum est 113. Quare radix proxime vera numeri propositi est 624. Numerus autem ille foret perfecte quadratus, si numero 113 minueretur. Quamvis autem radix quadrata non sit accurate vera, ad eam tamen fractionum decimalium ope pro arbitrio licet accedere. Residuo 113 addantur cyphrae duae, ut heic factum vides, ut habeatur numerus 624 tamquam prima pars radicis, cuius duplum sumatur, nempe 1248; dividaturque 1130 per 1248, quotus est 0, quare scribe 0 in radice, et multiplica 12480 per 0, productumque 0 aufer ex 11300, remanent 11300. Huic residuo iterum addantur cyphrae duae, sumaturque duplum radicis, nempe 12480, per quod dividatur 113000, scribaturque quotus 9 in radice, qui scribatur etiam sub dextera cyphra numeri 113000, et per quem multiplicetur numerus 124809, productumque 1123281 auferatur ex 1130000, residuum fit 6719. Operatio rursus continuari posset. Sed satis patet methodus, cuius ope radicem proxime veram obtinere licet, et ad eam magis ac magis accedere. Tota operationis ratio manifesta est ex fractionum decimalium natura.

Scholion II. In huius operationis serie idem notare oportet, quod in divisione observatum est, nempe, si post adiectas alicui residuo notas duas classis proxime sequentis, duplum radicis inventae non contineatur in numero, qui per illud duplum dividendus est, postrema huius dividendi nota neglecta; cyphra scribenda est in radice, et classis proximae notis duabus demissis, operatio continuanda. Evidens autem est, hanc operationem esse divisioni simillimam, in qua radix sit quotus, divisor vero sit duplum radicis postremo inventae auctum nota, quae deinceps investigatur. Hoc unum interest, quod in divisione divisor semper est idem, heic autem semper augetur: in divisione totus divisor cognoscitur, heic autem ignota est novi divisoris nota, quae inquiritur. Atque id in causa est, cur in hac divisione instituenda postrema dividendae quantitatis nota praetereatur. Si contingeret, divisorem esse maiorem: v. g. in praesenti exemplo, si productum ex 2 in 122 subtrahi non posset ex 294, iam in radice scribendus esset numerus proxime minor, et tota operatio esset reformanda. Sed in casu nostro id minime contingit; quare nulla correctione opus est. Vnum tandem superest notandum, cur nempe post duplum radicis inventae scribatur radix nova, et deinde numerus to-

tus per radicem novam multiplicetur. Ita in praesenti exemplo post duplum primae radicis 12 scribitur 2, totusque numerus 122 multiplicatur per novam radicem 2. Operationis ratio manifesta est. Quum enim numerus 2 in radice duas exprimat decadas, huius numeri quadratum versus sinistram promoveri debet, ut patet ex notarum arithmeticarum significatione.

Ad radicis cubicae extractionem iam veniendum est. Pro radice cubica methodus est admodum similis, et iisdem innititur principiis. Extrahenda sit radix cubica, ut in praesenti exemplo. Diviso numero in classes per ternas notas, incipiendo a dexteris notis; prima classis, quae poterat continere vel tres notas vel duas, in hoc casu unicam continet. Quaeratur radix cubica numeri 5 proxime minor, quae est 1. Huius cubus 1 subtrahatur a prima classe 5, residuum est 4, cui adnectatur classis sequens, ut heic factum vides. Deinde ita

Exemplum.

5.305.473 (174, 4.
1

4305
(300)

2100
1470
343

3913

392472
(86700)

346800
8160
64

355024

37448000

dicendum, prima pars radicis 1 pro decade haberi debet, si conferatur cum secunda parte. Sumatur itaque numeri 10 quadratum 100, et per illius triplum 300 dividatur 4305, invenietur quotus 7; quilibet enim alius foret iusto maior, si 7 excederet, ut patet operationem experiendo. Iam multiplicetur 300 per 7, habetur productum 2100, *quod est triplum quadratum primae partis* 10 *ductum in secundam* 7. Dic praeterea $7 \times 7 = 49$, et $49 \times 10 = 490$, postea $490 \times 3 = 1470$, *quod est triplum quadratum secundae partis radicis* 7 *ductum in primam* 10, et illud scribe infra 2100. Tandem $7 \times 7 \times 7 = 343$, *quod est cubus secundae partis radicis* 7, et scribi debet infra 1470. Addantur numeri 2100, 1470 et 343; et summa 3913 auferatur ex numero 4305; residuum est 392. Demittatur classis tertia 472, et duae primae partes radicis, velut pars una considerentur. Haec autem pars, quae est 17, aequivalet 170, si conferatur cum tertia parte quaesita. Sumatur huius numeri 170 triplum quadratum 86700: per quod dividatur pars cubi reliqua 392472, prodit quotus 4, quem scribe in radice. Multiplicetur divisor 86700 per 4 productum fit 346800, *quod est quadratum triplum primae partis radicis* 170 *ductum in secundam partem* 4, et infra scribitur. Dicas deinde $4 \times 4 = 16$; $16 \times 170 \times 3 = 8160$, quod productum, *quum sit triplum quadratum secundae partis radicis* 4, *ductum in primam partem* 170, scribe infra 346800, atque infra scribi debet cubus ipsius 4, nempe 64. Addantur tres illae quantitates; quarum summa

355024 ex reliqua cubi parte subtrahatur, residuum fit 37448. Quare numerus propositus non est cubus perfectus; sed ad radicem proxime veram licebit accedere, si residuo addantur tres cyphrae, ut in praesenti exemplo factum est; et si eadem operatio deinde pro alio quolibet fractionum decimalium numero iteretur, magis ac magis accurata fiet radix inventa. Illud autem observandum est diligenter, inventas radicis partes velut partem unicam tractandas esse, si pars alia investigari debeat.

In extractione radicis quadratae et cubicae, diximus, tot esse radicis partes, quot sunt diversae numeri propositi partes. Id vero demonstratione indiget. Quantitas quaelibet ex duobus constans numeris unicam dumtaxat in radice partem habere potest. Consideretur numerus 99 omnium, qui duabus constent notis, maximus. Deinde radicem ex duabus notis compositam omnium minimam 10 consideremus: quadratum erit 100, quod numero 99 maius est, ac proinde radix duas notas continere non potest. Similiter quantitas omnium minima, quae tres habeat notas, est 100, cuius radix quadrata est 10, quae proinde duas continet notas. Ac quantitas omnium maxima, quae tres habeat notas, est 999, cuius radix tres notas habere non potest. Nam numerus omnium minimus tribus constans notis est 100, cuius quadratum fit 10000, quod quidem numerum 999 longe excedit. Eadem ratione ad aliam quamlibet numerorum seriem progrediendo, facile intelligitur praescripta numerorum divisio in extrahenda radice quadrata. Et huic numerorum divisioni partium numerum in radice respondere, evidens est. Idem simili ratiocinatione constat pro radice cubica. Evidens est, extractionem radicum simili ratione perfici in numeris fractis, extrahendo scilicet radicem propositam ex numeratore et ex denominatore. In qualibet autem radicum extractione operationis rite peractae facile habetur argumentum. Si radix sit quadrata, haec in se ipsam ducatur, productoque addatur residuum, si aliquod fuerit facta operatione, et restitui debet ipse numerus propositus. Similiter radix cubica ad cubum evehatur. Id vero statim patet ex ipsa earumdem operationum natura.

DE QVANTITATIBVS SVRDIS SIVE IRRATIONALIBVS, ET INCOMMENSVRABILIBVS *.

IV. Saepe ab extrahenda radice supersedemus, ubi veram invenire non licet, ut quantitati propositae praefigitur signum $\sqrt{}$ quod *radicale* appellant. Sic $\sqrt{3}$ significat radicem quadratam numeri 3. $\sqrt[3]{10}$ denotat radicem cubicam denarii. Et hi sunt numeri, quos arithmetici vocant numeros *surdos* sive *irrationales*; aut etiam *incommensurabiles*. Quantitatibus litteralibus idem signum praefigitur, ita $\sqrt{ab}$, $\sqrt[3]{abc}$ significant ra-

dicem quadratam ipsius ab: et radicem cubicam quantitatis abc. Sed commoditatis ergo radix secunda vel quadrata exprimi solet per $\frac{1}{2}$, radix cubica per $\frac{1}{3}$: ita $a^{\frac{1}{2}}$, $a^{\frac{1}{3}}$, $a^{\frac{1}{m}}$ significant radicem quadratam, cubicam et radicem quamlibet indeterminatam m. Vt autem clara talium expressionum notio habeatur, meminisse oportet, quae antea de exponentibus breviter dicta sunt. Ponamus $a = bb$, erit $a^{\frac{1}{2}} = (bb)^{\frac{1}{2}}$. Praeterea in quantitate $(bb)^3$ exponens 3 indicat, quantitatem bb ter scribendam esse, ac proinde $(bb)^3 = b^6$. Igitur eadem ratione in quantitate $(bb)^{\frac{1}{2}}$ exponens $\frac{1}{2}$ designat litteram b dimidio minus scribendam esse, quam in bb; ac proinde semel tantum. Quare $(bb)^{\frac{1}{2}} = b = a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$. *Brevius: quantitas* a *ad quamlibet potestatem*, v. g. *quadratum vel cubum elevatur, si exponens illius* 1 *per exponentem potestatis* 2 *vel* 3 *multiplicetur, seu fiat* $a^{1\times 2}$, $a^{1\times 3}$. (§. I. hui. cap.). *Igitur eiusdem operationis resolutio seu radicis extractio fiet, si exponens* 1, *per exponentem radicis* 2 *vel* 3 *dividatur, seu fiat* $a^{\frac{1}{2}}$, $a^{\frac{1}{3}}$. Idem patet de aliis quibuscumque exponentibus. Res autem tota ma-

* *Etsi quantitates surdae seu irrationales sint incommensurabiles relate ad unitatem vel eius aliquam determinatam partem; sunt tamen persaepe inter se commensurabiles, seu quod idem est, exprimitur plerumque numeris vera ratio, quae inter quantitates surdas vel irrationales intercedit.*

gis ac magis illustrabitur, explicatis quattuor arithmeticae operationibus in quantitatibus surdis.

Quantitates surdae adduntur vel subtrahuntur facillime, si eiusdem sint exponentis, et eamdem habeant sub signo radicali quantitatem. Si autem res non ita se habeat, saepissime contingit, quantitates surdas eiusdem ordinis ad eamdem quantitatem sub signo radicali posse revocari. Ita si addi vel subtrahi debeant quantitates radicales $\sqrt{48abb}$, et $b\sqrt{75a}$; prima per reductionem mutatur in $4b\sqrt{3a}$, alterna autem in $5b\sqrt{3a}$. Quare in *additione utriusque quantitatis*, habebitur $9b\sqrt{3a}$; in *subtractione autem primae quantitatis a secunda habebitur* $b, \sqrt{3a}$. Totum reductionis artificium in eo consistit, ut numeri sub signo radicali positi quaerantur divisores, inter quos ille eligatur, si quis fuerit, ex quo liceat radicem extrahere eiusdem ordinis, cuius est surda quantitas. Si aliquem eiusmodi divisorem invenias, eius radicem praefige signo radicali, et sub hoc includatur tantummodo alter dati numeri factor seu divisor. Si autem nullus talis divisor inveniri possit, iam quantitates radicales in additione signo + connectendae, in subtractione autem signo — separandae.

Demum multiplicantur et dividuntur quantitates irrationales non secus ac rationales, dummodo exponentes radicum sint eiusdem ordinis; et producto vel quoto idem, quod prius erat, signum radicale praefigitur. Ita si multiplicari de-

beat $\sqrt{ab}$ per $\sqrt{ac}$, productum erit $\sqrt{aabc}=a\sqrt{bc}$. Ita si dividi debeat $ac\sqrt{bc}$ per $a\sqrt{b}$, quotus erit $\frac{ac\sqrt{bc}}{a\sqrt{b}}=c\sqrt{c}$. Patet autem, in multiplicatione delendum esse signum radicale, si aequales fuerint quantitates signo inclusae. Sic $\sqrt{a^3c}\times\sqrt{a^3c}=a^3c$.

Quoniam saepe contingit, quantitates radicales ad eumdem exponentem reducendas esse, observandum est, id facile praestari posse ex hactenus demonstratis. Ita quantitates duae radicales $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$, et $\sqrt[m]{\frac{c}{d}}$ mutantur in $\sqrt[mn]{\frac{a^m}{b^m}}$ et $\sqrt[mn]{\frac{c^n}{d^n}}$ quod patet; nam quantitates illae *si repraesententur per radicum exponentes erunt* $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}}$ et $\left(\frac{c}{d}\right)^{\frac{1}{m}}$ *Si exponentes fracti ad eamdem denominationem reducantur, erunt* $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m}{mn}}$ *et* $\left(\frac{c}{d}\right)^{\frac{n}{mn}}$. *Adeoque* $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ *et* $\sqrt[m]{\frac{c}{d}}$ *in aequales permutantur* $\sqrt[mn]{\frac{a^m}{b^m}}$ *et* $\sqrt[mn]{\frac{c^n}{d_n}}$. Probe autem notandum est discrimen inter quantitatum multiplicationem illarumque potestatem. Ita si multiplicari debeat a^3 per a^2, productum fit $a^{3+2} = a^5$. Si autem quantitas a^3 ad secundam potestatem evehi debeat, habetur $a^{3 \times 2} = a^6$. Et generatim quantitas a^m ad potestatem n evecta, fit a^{mn}. Quare multiplicatio fit per *exponentium* additionem; potestas autem per multiplicationem *exponentis quantitatis per exponentem potestatis.* Contraria ratione divisio fit per *exponentium* subtractionem, et radicis extractio per exponentium divisionem. Ita $\frac{a^6}{a^2} = a^{6-2} = a^4$. At si ex a^6 extrahenda sit radix quadrata, erit $a^{\frac{6}{2}} = a^3$, et generatim pro divisione $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$; at pro radicis n extractione habetur $a^{\frac{m}{n}}$. *Ex quibus liquet, quod si dividendus est divisor eumdem habeant exponentem, exponens quoti per subtractionem exponentium aequalium abibit in zero.* Ita $\frac{a^3}{a^3} = a^{3-3} = a^0$. *At qaantitas* $\frac{a^3}{a^3} = 1$. *Ergo* $a^0 = 1$. *Adeoque quaelibet quantitas elevata ad potestatem zero aequalis est unitati. Similiter si exponens di-*

visoris maior sit quam dividendi, exponens quoti fit negativus. Ita $\frac{a^3}{a^5} = a^{3-5} = a^{-2}$. *Sed* $\frac{a^3}{a^5} = \frac{1}{a^2}$. *Ergo quantitas elevata ad potestatem negativam aequalis est fractioni, cuius numerator sit* 1; *denominator vero eadem quantitas cum suo exponente positivo.* Si quantitates sint simplices, brevius per exponentes quam per signum radicale exprimuntur.

V. Quantitates irrationales sive incommensurabiles saepe in hoc capite nominavimus. Re vera autem tales dari quantitates, evidens est ex capite praecedenti, in quo demonstravimus, fractionem sive puram sive mixtam in fractionem semper abire, etiamsi ad potestatem quamlibet evehatur. Ergo numerus integer, cuius radix quadrata, cubica cet. non est numerus integer, nullam fractionem nequidem mixtam pro radice habere potest, ac proinde huius numeri radix est incommensurabilis. Itaque numeri incommensurabiles non sunt numeri proprie dicti. Et re quidem ipsa quum per numerum nihil aliud intelligamus, quam rationem quantitatis cuiusvis ad aliam eiusdem generis quantitatem; in omni ratione vel numero existere necessum est partem aliquotam, quae sit utrique quantitati communis; at quantitates incommensurabiles tali carent mensura. Ita $\sqrt{2}$ non est numerus proprie dictus, quia talis quantitas, *seu numerica*, inveniri non potest. Immo fractiones proprie non dicuntur numeri, nisi quatenus ad numeros integros revocantur. Et quidem fractio $\frac{8}{4}$, quae exprimit quartam partem totius alicuius ter sumtam, ipsa ad numeros integros refertur; haec enim quarta pars velut alia unitas consideratur, ut antea observavimus. Totam incommensurabilium doctrinam utilissimam quidem alio arithmetico exemplo illustrabimus. Si ex numero 7 extrahenda proponatur radix quadrata, haec invenitur minor quam 3; quum $3 \times 3 = 9$, et maior quam 2, quum sit $2 \times 2 = 4$. Igitur radix quadrata numeri 7 continetur intra limites 2 et 3; ac proinde si posset determinari, ea foret aequalis numero 2, et alicui numero fracto; sed fieri non potest, ut fractio mixta per se ipsam multiplicata producat numerum integrum, ut antea demonstravimus. Ergo numerus 7 pro radice habere non potest neque numerum integrum neque fractum. Idem patet de alio quolibet numero integro, cuius radix non est numerus integer.

Scholion. Secundae dumtaxat et tertiae potestatis compositionem ac resolutionem in praesenti capite explicavimus. At rem generatim et breviter, quantum licet, pro alia qualibet dignitate considerabimus. Ex hactenus explicatis manifestum est, eodem modo formari altiores cuiuslibet gradus potestates. Ita ad formandam quarti gradus potestatem multiplicari debet cubus per suam radicem, et sic deinceps. Iam in singulis terminis exponentes et coëfficientes diligenter observemus. In potestatis cuiuslibet compositione primus terminus a binomii cuiuslibet $a+b$, evehitur ad potestatem quaesitam, v. g. a^2, si potestas secunda fuerit. In aliis sequentibus terminis exponens quanti-

tatis a per unitatem decrescit, et in ultimo termino evanescit. Ita in secunda potestate habentur *secundus et tertius terminus* $2ab + a^0 b^2 = 2ab + b^2$. Contra autem potestas termini b in primo termino non reperitur, seu est b^0, sed in 2° termino illius exponens est unitas, in 3° termino est 2, et ita crescit per gradus donec in ultimo termino exponenti potestatis quaesitae aequalis fiat. Quare iisdem gradibus, quibus decrescunt exponentes ipsius a, crescunt exponentes quantitatis b, atque in utraque quantitate exponentium summa semper eadem est, et maximus exponens est potestatis quaesitae exponenti aequalis; quod quidem in potestate qualibet experiri licet. Ita potestas sexta binomii $a+b$, invenitur $a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$. In qua observare licet, exponentes quantitatis a decrescere secundum seriem numerorum 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0; contrario autem ordine crescere exponentes quantitatis b, nempe hoc modo 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6; numerusque exponentius in utroque termino est semper 6. Iam superest, ut singulorum terminorum coëfficientes observemus. *Primi termini coëfficiens semper est unitas; in reliquis autem terminis ita invenitur:* dividatur coëfficiens praecedentis termini per exponentem ipsius b in termino dato, et quotum multiplica per exponentem ipsius a in eodem termino auctum unitate. Ita in praecedenti exemplo, ubi termini sunt a^6, a^5b, a^4b^2, a^3b^3, a^2b^4, ab^5, b^6, coëfficiens primi termini est unitas: coëfficiens secundi est *coëfficiens primi termini* 1 *divisus per exponentem* b, *seu per* 1, *ductus in exponentem ipsius* a^5 *auctum unitate, seu* $\overline{5+1}=6$ *hoc est*, $\frac{1}{1}\times\overline{5+1}=6$: tertii termini coëfficiens $\frac{6}{2}\times\overline{4+1}=3\times5=15$: coëfficiens termini quarti est $\frac{15}{3}\times\overline{3+1}=5\times4=20$. Et simili modo invenientur coëfficientes alii 15, 6, 1.

Ex hac constanti exponentium et coëfficientium serie generatim exhiberi potest binomium $a+b$ ad potestatem quamlibet m evectum. Ita terminorum series se habebit, non consideratis coëfficientibus: $a^m b^0$, $a^{m-1}b^1$, $a^{m-2}b^2$, $a^{m-3}b^3$, $a^{m-4}b^4$, quae series continuari debet, donec exponens quantitatis b evadat m. Coëfficientes autem ex praecedenti regula hoc ordine progredientur 1, m, $m\times\frac{m-1}{2}$, $m\times\frac{m-1}{2}\times\frac{m-2}{3}$, $m\times\frac{m-1}{2}\times\frac{m-2}{3}\times\frac{m-3}{4}$ et ita deinceps. Quare haec habetur generalis formula $(a+b)^m=a^m+ma^{m-1}b+m\times\frac{m-1}{2}\times a^{m-2}b^2+m\times\frac{m-1}{2}\times\frac{m-2}{3}\times a^{m-3}b^3$ cet. Simili modo invenitur formula pro binomio $(a-b)^m$, hoc solum observato discrimine, quod terminus debeat esse negativus, si exponens quantitatis b sit numerus impar. Ita in cubo $a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$ secundus et quartus termini sunt negativi. Ratio autem est evidens, quum negativa exsistente quantitate, multiplicationem numerus impar productum efficere debeat negativum. Formula eadem omnino ratione componi posset pro trinomio $a+b+c$; ponendo $a+b=n$, et ita deinceps pro polynomio quolibet. Praecedens formula, quae potestatum compositionem exhibet, earum quoque resolutionem repraesentare potest. Ita radix quadrata binomii $a+b$ nihil est aliud, quam potestas binomii $a+b$, cuius exponens $\frac{1}{2}$. Quare ponatur in formula praecedenti $m=\frac{1}{2}$, habebiturque

$$\overline{a+b}^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{2}}+\tfrac{1}{2}\left(a^{-\frac{1}{2}}b\right)+\tfrac{1}{4}\times-\tfrac{1}{2}\left(a^{-\frac{3}{2}}b^2\right)+\tfrac{1}{4\cdot3}\times-\tfrac{1}{2}\times-\tfrac{3}{2}\left(a^{-\frac{5}{2}}b^3\right)\text{cet.}=a^{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{b}{2a}-\frac{b^2}{8a^2}+\frac{b^3}{16a^3}\right)\text{cet.}$$

Simili modo si extrahenda sit radix quinta ex $a+b$; habebitur

$$\left(a+b\right)^{\frac{1}{5}}=a^{\frac{1}{5}}+\tfrac{1}{5}\left(a^{-\frac{4}{5}}b\right)-\frac{1\times4}{2\times25}\left(a^{-\frac{9}{5}}b^2\right)\text{cet.}=a^{\frac{1}{5}}\left(1+\frac{b}{5a}-\frac{2bb}{25aa}+\text{cet.}\right)$$

Itaque ad radicem proxime veram accedere possumus per series infinitas convergentes, hoc est, per series, quorum termini perpetuo decrescant.

CAPVT VI.

De proportionibus.

I.

In memoriam revocanda est explicata cap. I. rationis et proportionis definitio. *Ratio* dicitur: *ea duarum quantitatum latitudo, qua ad se invicem referuntur. Geometrica* dicitur: *si in ea relatione consideremus, quomodo quantitas una alteram contineat; arithmetica* vocatur: *si excessum tantummodo unius supra aliam spectemus.* In omni ratione quantitas, quae ad aliam refertur, *antecedens* dicitur, ea vero, ad quam refertur; *consequens* appellatur. Ratio *geometrica* dicitur *dupla, tripla, decupla* cet. si antecedens bis, ter, decies cet. consequentem continet; contra vero *subdupla, subtripla, subdecupla* cet. si vis, ter, decies cet. antecedens in consequenti continetur. *Exponens* rationis geometricae dicitur: *quotus ex antecedenti per consequentem diviso:* exponens vero rationis arithmeticae est: *differentia consequentis ab antecedenti.* Hinc ratio geometrica instar fractionis scribitur, arithmetica instar subtractionis. *Duarum rationum aequalitas* dicitur *proportio.* Ea est *geometrica* vel *arithmetica* pro rationum ipsarum qualitate. Igitur in omni proportione quattuor quantitates esse debent, et *prima ad secundam esse* dicitur; *ut tertia ad quartam.* Si vero eadem quantitas bis adsumatur ita, ut primae rationis consequens idem sit cum antecedente secundae, proportio dicitur *continua.* Ita exprimi solet proportio geometrica $a . b :: c . d$, vel $a . b = c : d$, vel $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$; arithmetica vero $a - b = c - d$.

II. Si inter duas primas quantitates eadem sit differentia, quae inter duas ultimas, iam quantitates illae sunt *arithmetice proportionales,* ut patet ex praecedenti definitione; quare arithmetice proportionales sunt numeri 3, 7, 12, 16; atque etiam quantitates a, $a+b$, e, $e+b$. Si autem talis proportio continuetur ita, ut quantitates per eamdem constantem differentiam perpetuo crescant vel decrescant, iam habetur series vel *progressio arithmetica,* qualis est ita a, $a+b$, $a+2b$, $a+3b$ cet. vel haec alia x, $x-b$, $x-2b$ cet. aut etiam in numeris 1, 2, 3, 4, 5 cet. et 10, 7, 4, 1, -2, -5, -8 cet. Ex ipsa proportionis arithmeticae natura evidens est, summam extremorum terminorum aequalem esse summae mediorum. Ita in proportione arithmetica $a - (a+b) = e - (e+b)$ manifestum est, summam extremorum $a+e+b$, aequalem esse summae mediorum $a+b+e$. Hinc datis tribus quantitatibus, facile invenitur quarta arithmetice proportionalis: addantur scilicet secunda et tertia, atque ex summa auferatur prima, differentia erit quartus terminus arihmetice proportionalis, ut patet.

Inde etiam colligitur, in progressione qualibet arithmetica summam duorum extremorum aequalem esse summae duorum quorumlibet terminorum ab extremis aeque distantium. Sint priores termini a, $a+b$, $+2^b$ cet. sitque ultimus terminus x, erit penultimus $x-b$, antepenultimus, $x-2^b$ cet. Iam comparentur inter se termini, qui ab extremis aeque distant in hunc modum:

$$\begin{array}{l} a,\ a+b,\ a+2b,\ a+3b,\ a+4b \text{ cet.} \\ x,\ x-b,\ x-2b,\ x-3b,\ x-4b \text{ cet.} \\ \hline a+x,\ a+x,\ a+x,\ a+x,\ a+x \text{ cet.} \end{array}$$

Si nempe singuli termini correspondentes, et qui ab extremis aequaliter distant, sibi invicem addantur, habebitur semper $a+x$, hoc est, summa primi termini a et ultimi x. Atque hinc etiam evidens est, summam omnium terminorum in progressione arithmetica aequalem esse producto ex summa primi et ultimi in dimidium terminorum numerum. Ita si numerus terminorum dicatur n, erit omnium summa $\overline{a+x}\times\frac{n}{2}$.

III. Quum differentia communis terminorum in progressione arithmetica primum terminum non adficiat; patet, huius differentiae coëfficientem in quolibet dato termino aequalem esse numero terminorum, qui terminum datum praecedunt. Quare in ultimo termino x habebitur illa $\overline{n-1}\times b$ nempe $x=a+\overline{n-1}\times b$. Igitur quum omnium terminorum summa sit $\overline{a+x}\times\frac{n}{2}$, ea quoque invenitur $=\frac{2an+bn^2-bn}{2}=\left(\frac{2a+bn-b}{2}\right)\times n$. E. g. Series arithmetica $1+2+3+4+5$, cet. ad 100 terminos producta $=\frac{2\times100+10000-100}{2}=5050$.

At si progressionis primus terminus fuerit 0, erit progressionis summa aequalis dimidio producto ex ultimo termino in numerum terminorum. Nam in hoc casu quum sit $a=0$, summa terminorum, quae generatim exprimitur per $\overline{a+x}\times\frac{n}{2}$ in hanc abit $\frac{nx}{2}$. Vnde patet, summam numeri cuiuslibet terminorum in progressione arithmetica; cuius primus terminus est 0, aequalem esse dimidio producto ex terminorum numero in terminum maximum. E. g. Progressio arithmetica.

$$\left.\begin{array}{l} 0+1+2+3+4+5+6+7+8+9= \\ 9+9+9+9+9+9+9+9+9+9= \\ \hline \qquad\qquad 2 \end{array}\right\}\frac{10\times9}{2}=45.$$

IV. Si quotus ex duabus primis quantitatibus, aequalis sit quoto ex duabus ultimis, quattuor illae quantitates sunt *geometrice proportionales*, ut patet ex praecedenti definitione. Tales sunt numeri 2, 6, 4, 12, et quantitates a, ar, b, br. Ex ipsa proportionis geometricae natura evidens est, productum ex terminis extremis aequale esse producto ex mediis; sic $a\times br=ar\times b$, ut patet. Quare datis tribus terminis facile invenitur quartus geometrice proportionalis: multiplicando scilicet duos medios terminos, productumque dividendo per primum, quotus erit quartus quaesitus. Ita datis tribus quantitatibus a, ar, b, invenitur quarta $\frac{ar\times b}{a}=br$. At si proportio sit continua ita, ut secunda quantitas sit primae rationis consequens, et simul secundae rationis antecedens, simul ratiocinatione patet, sumendum esse huius quantitatis quadratum, et per primam quantitatem esse dividendum. Haec autem quantitas, quae antecedentis et consequentis vices gerit, vocatur *media proportionalis*, talisque proportio ita exprimitur $\div\!\div\ a . b . c$, nempe hoc scribendi modo significatur, b esse mediam proportionalem. At media proportionalis arithmetica ita designatur $\div\ a . b . c$. Patet autem, in hac proportione summam extremorum aequalem esse termino medio bis sumto.

Ex demonstratis de proportione geometrica pendet vulgatissima arithmeticae operatio, quae *regula trium* vel etiam *regula aurea* propter eximiam utilitatem appellari solet. Per hanc regulam, datis tribus terminis, invenitur quartus proportionalis. In hac autem operatione probe observari debet terminorum ordo. Et primo quidem consideranda est quantitas, quae est eiusdem generis cum quantitate quaesita. Ex quaestionis natura intelligitur, an quantitas data sit maior vel minor quantitate quaesita; si maior sit, iam maxima ex aliis duabus quantitatibus in terminorum ordine ad sinistram scribi debet, at si minor sit, tunc duarum aliarum quantitatum minima ad sinistram, alia autem ad dexteram collocari debet. Constituto autem convenienti terminorum ordine iam ex praescripto regulae, productum ex secundo termino in tertium per primum terminum dividi debet. Tota res exemplo perspicua fiet. Haec

proponatur quaestio. *Si 30 homines 15 diebus absolvant 150 speris hexapedas; quaeritur, quot hexapedas conficient 40 homines eodem tempore.* Quoniam quaeritur hexapedarum numerus, primum considerandus est numerus 150. Statim autem vides, numerum quaesitum *hexapedarum maiorem esse debere dato hexapedarum numero, sicuti 40 homines plures numero sunt quam 30.* Quare numerus 30 ad sinistram collocari debet in priori ratione, numerusque 40 ad dexteram, atque ita operatio peragitur: $30 : 40 = 150 : \frac{40 \times 150}{30}$

$= \frac{4 \times 150}{3} = 200.$

V. Pro varia terminorum ordinatione in proportione geometrica diversa ab arithmeticis inventa fuerunt nomina. At ex prima terminorum ordinatione aliae omnes facile inferuntur. Si primus terminus dicatur esse ad tertium, ut secundus ad quartum, argumentari dicimur *alternando*. Si dicatur secundus ad primum, ut quartus ad tertium, tunc dicitur *invertendo*. Si summa terminorum primi et secundi refertur ad secundum, ut summa terminorum tertii et quarti ad quartum, inferre dicimur *componendo;* contra autem *dividendo*, si terminorum primi et secundi differentia ad secundum referatur, ut differentia tertii et quarti referatur ad quartum. In his autem omnibus argumentandi modis proportionem manere patet, quum productum extremorum aequale semper inveniatur producto mediorum. *Ita in proportione* a : ab = c : cb *erit etiam* a : c = ab : cb. *Itemque* ab : a = cb : c; *quum in utroque casu sit productum extremorum* abc *aequale producto mediorum* abc. *Pariter* a + ab : ab = c + cb : cb, *atque etiam* a — ab : ab = c — cb : cb; *quum in primo casu sit productum extremorum et mediorum* $acb + ab^2c$; *in secundo autem* $acb - ab^2c$. Ex eadem productorum aequalitate facile colligitur, rationum compositione proportionem non mutari. (Ratio *composita* ex pluribus geometricis rationibus illa dicitur, quam habet productum ex earum antecedentibus ad productum ex consequentibus.) Sint duae proportiones $\left.\begin{matrix} a:b=c:d \\ f:g=m:s \end{matrix}\right\}$ erit $af : bg = cm : ds$. Etenim productum extremorum $afds$ aequale est producto mediorum $bgcm$. Et quidem $a:b=c:d$, ac proinde $ad=bc$. Praeterea $f:g=m:s$, ideoque $fs=gm$, ergo $ad \times fs = bc \times gm$. Simili ratione patet $\frac{ad}{fs}=\frac{bc}{gm}$, *adeoque* ad : fs = bc : gm. Atque eadem valet demonstratio pro alio quolibet proportionum numero. (Ratio ex duabus aequalibus composita dicitur *duplicata*, ex tribus *triplicata* cet. Hinc ratio geometrica, quam habet quadratum unius quantitatis ad quadratum alterius, est duplicata eius, quam habent ipsae invicem quantitates: ratio cuborum, triplicata cet. Et contra ratio, quam habent inter se radices quadratae, cubicae cet. dicitur *subduplicata*, *subtriplicata* cet.

rationis potentiarum *respectivarum*. At ratio, quae intercedit inter radices quadratas cuborum, hoc est, ratio $a^{\frac{3}{2}}$ et $b^{\frac{3}{2}}$ dicitur *sesquiplicata*.)

(Si duae quantitates ita inter se connexae sint, ut si una sit dupla, tripla cet. altera etiam dupla, tripla cet. evadat, prima dicitur esse in *ratione directa simplici* alterius. At si prima in eadem ratione decrescit, in qua altera augetur, tunc illa esse dicitur in *ratione inversa* sive *reciproca* istius. At si duae quantitates ita sint invicem connexae, ut altera crescat in eadem ratione, qua primae quadratum aut cubus cet. tunc illa ad hanc esse dicetur in ratione duplicata, triplicata cet. At si in eadem ratione una descrescit, qua crescunt alterius quadrata vel cubi, dicetur esse in ratione huius *reciproca* duplicata aut triplicata cet.) Harum rationum frequentissimus usus recurret in physica. *Quod ad rationem inversam simplicem spectat, res sequenti exemplo manifesta fiet.* Si 40 operarii dierum 18 spatio opus aliquod absolvant, quaeritur necessarius operatiorum numerus, ut idem opus 12 diebus absolvatur. *Inspecta autem quaestionis natura, statim patet, quaesitum operariorum numerum non minorem esse debere relate ad* 40, *sicuti* 12 *minor est relate ad* 18, *sed e contrario maiorem; proindeque evidens est, operariorum numerum quaesitum esse in ratione inversa dierum. Quapropter in priore ratione proportionis, quae exprimet dies, invertentur numeri, seu minor sinistram tenebit, et maior dexteram.*

E. g. $12 : 18 = 40 : \frac{18 \times 40}{12} = 60$.

VI. Ex mediorum et extremorum producto pendet etiam universa progressionum geometricarum doctrina. In progressione qualibet geometrica productum ex primo in ultimum terminum semper aequale est producto ex secundo et penultimo, aut etiam alteri cuilibet producto ex duobus terminis a primo et ultimo aequaliter distantibus. Sit progressio a, ar, ar^2, ar^3, in qua communis multiplicator aut divisor *ratio communis*, aut *exponens communis rationis* dici solet, sitque y ultimus terminus; erunt quattuor ultimi termini y, $\frac{y}{r}$, $\frac{y}{r^2}$, $\frac{y}{r^3}$: ut patet ex natura progressionis geometricae. Est autem $a \times y = ar \times \frac{y}{r} = ar^2 \times \frac{y}{r^2} = \frac{ar^3 \times y}{r^3}$ cet. Praeterea summa progressionis geometricae, demto primo termino, aequalis est summae omnium terminorum, demto ultimo per communem rationem seu *per communem exponentem rationis* multiplicato. Nam $ar + ar^2 + ar^3 +$ cet. $\frac{+y}{r^3} + \frac{y}{r^2} + \frac{y}{r} + y =$

$r \times \left(a + ar + ar^2 \text{ cet.} + \frac{y}{r^4} + \frac{y}{r^3} + \frac{y}{r^2} + \frac{y}{r}\right)$.

Quare si progressionis summa dicatur s; erit

$s - a = \overline{s - y} \times r$, hoc est, $s - a = sr - yr$, vel $sr - s = yr - a$, et $s = \frac{yr - a}{r - 1}$

Quamvis autem ex arithmeticarum operationum natura facile pateat, qua ratione ad hunc ultimum valorem perveniatur; res tamen magis fiet manifesta ex appendice, quam de aequationibus mox adiungemus. Porro quum exponens ipsius r post secundum terminum perpetuo crescat, si numerus terminorum dicatur n, erit $n-1$ exponens ipsius r in ultimo termino; ac proinde $y = ar^{n-1}$, et $yr = ar^{n-1+1} = ar^n$, et $s = \frac{yr - a}{r - 1} = \frac{ar^n - a}{r - 1}$. Quare datis in progressione geometrica primo termino, terminorum numero et communi ratione *seu communi exponente rationis*, facile invenietur omnium terminorum summa. Si invenienda sit summa seriei decrescentis $y + \frac{y}{r} + \frac{y}{r^2} + \frac{y}{r^3} +$ cet. $+ ar^3 + ar^2 + ar + a$ posito terminorum numero infinito, ultimus terminus a fit $= 0$. Quum enim n sit infinitus, ac proinde et infinitus r^{n-1}; erit $a = \frac{y}{r^{n-1}} = 0$.

Quare summa talis seriei est $s = \frac{yr}{r - 1}$ quae est summa finita, quamvis numerus terminorum seriei sit infinitus : ita series infinita est $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} +$ cet. $= 2$.

DE LOGARITHMIS.

Scholion. Ad progressiones arithmeticas et geometricas refertur logarithmorum doctrina, maximae quidem utilitatis in physica sublimiori, sed rem breviter tantum attingere nobis licebit. Progressio quaelibet geometrica hac formula potest repraesentari $\div aq^0 . aq^1 . aq^2 . aq^3 . aq^4 . aq^5$. cet. in qua a et q exprimunt numeros quoslibet. Quare si fiat $a = 1$, praecedens series abit in hanc $\div q^0 . q^1 . q^2 . q^3 . q^4 . q^5$. cet. Inde autem duo colliguntur. I.° Productum ex duobus quibuscumque huius progressionis terminis pro exponente habet ipsorum exponentium summam. (*cap.V.§. IV. ad calc.*) Ita productum ex $q^1 \times q^4 = q^5$. Quare si inveniendus proponatur in hac progressione terminus, qui sit duorum aliorum producto aequalis, quaeratur terminus, cuius exponens est ipsa duorum exponentium summa . . . II.° Quotus ex duobus terminis emergens ipse est terminus, cuius exponens est ipsa exponentium differentia. Ita si dividatur q^8 per q^3, quotus est $q^{8-3} = q^5$. Quare si inveniendus proponatur terminus duorum aliorum quoto aequalis, quaeratur terminus, cuius exponens aequalis est exponentium differentiae.

Si ponatur progressionis geometricae terminus aliquis q, atque exponens rationis sit $\frac{1}{n}$ progressio quaelibet geometrica hac serie in infinitum re-

praesentari potest : $\div \frac{q}{n^5} . \frac{q}{n^4} . \frac{q}{n^3} . \frac{q}{n^2} . \frac{q}{n} . q . qn . qn^2 . qn^3 . qn^4 . qn^5$ cet. $= \div qn^{-5} . qn^{-4} . qn^{-3} . qn^{-2} . qn^{-1} . qn^{-0} . qn^1 . qn^2 . qn^3 . qn^4 . qn^5$. cet. ut patet. Si infra progressionem geometricam scribatur progressio arithmetica ita, ut singuli termini unius respondeant singulis terminis alterius hoc pacto:

$\div qn^{-4} . qn^{-3} . qn^{-2} . qn^{-1} . qn^0 . qn^1 . qn^2 . qn^3 . qn^4$ cet.

$\div - 4 - 3 - 2 - 1 \quad 0 + 1 + 2 + 3 + 4$ cet.

(Termini quilibet progressionis arithmeticae $-4 -2 +3 +4$ appellantur *logarithmi* terminorum respondentium in progressione geometrica qn^{-4}, qn^{-2}, qn^{+3}, qn^4.) Inde autem patet, multipliciter variari posse logarithmorum formam. Etenim si duae sint progressiones, quarum altera geometrica sit, altera arithmetica, et sub singulis primae terminis singuli secundae scribantur, undecumque initium fiat, hi dicuntur illorum *logarithmi*. (At in vulgari logarithmorum systemate numeri alicuius logarithmus vocatur exponens potestatis numeri denarii, quae sit numero dato aequalis.) Ita si habeantur duae sequentes progressiones, prior geometrica, et arithmetica altera:

$\div 10^0 . 10^1 . 10^2 . 10^3 . 10^4 . = \div 1 . 10 . 100 . 1000 . 10000.$

$\div 0.\ 1.\ 2.\ 3.\ 4.$ . . . .

Exponens 0 est logarithmus unitatis ; exponens 1 est logarithmus 10, et ita deinceps. At quia exponentes illi exhibent dumtaxat logarithmos numerorum integrorum in progressione decupla : 1, 10, 100, 1000, 10000 cet. necessum est praeterea, haberi logarithmos numerorum intermediorum, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11, 12 cet. Qua ratione autem formari possint logarithmorum tabulae, breviter exponam; neque enim doctrinam hanc fusius explicare licet pro iniuncta his elementis facilitate.

Vt habeatur numeri alicuius dati, e. g. 3 logarithmus, oportet numerum hunc inveniri in progressione geometrica 1, 10, 100 cet. quod ex dictis patet. Porro quamvis non pateat, numerum 3 locum habere posse in praedicta progressione, evidens tamen est, inserendo inter 1 et 10 terminos medios geometricae proportionales, obtineri numeros inter 1 et 10, eo proximius, quo maior est terminorum insertorum numerus. Vnde fiet, ut horum terminorum mediorum aliquis vel sit numerus 3 accurate, vel inveniantur termini duo contigui, inter quos numerus 3 contineatur quamproxime. *Et quidem tabularum constructores, ut plurimos eiuscemodi terminos medios interponerent, superiorem progressionem geometricam* $\div 10^0 . 10^1 . 10^2 . 10^3 . 10^4$. *ope fractionum decimalium in aequalem converterunt:* $10^{0{,}0000000}$ $10^{1{,}0000000}$ $10^{2{,}0000000}$ $10^{3{,}0000000}$ $10^{4{,}0000000}$ cet. *atque eo pacto inter singulos progressionis exponentes medii termini* 9999999 *inserti fuere, quorum differentia est* $\frac{1}{10000000}$. Iam vero quia exponentes illi semper sunt in progressione arithmetica, ex dictis evidens est, valorem numeri denarii ad illas potestates evecti, quarum indices sunt iidem exponentes, perpetuo manere in progressione geo-

metrica, atque eosdem exponentes esse horum numerorum logarithmos. Habebitur igitur nova progressio geometrica hoc modo: $10^{0{,}0000000}$ $10^{0{,}0000001}$ $10^{0{,}0000002}$ $10^{0{,}0000003}$ $10^{0{,}0000004}$. In qua quidem progressione observandum est, numeros lentissime crescere, *quum ex primo termino* 1 *seu* $10^{0{,}0000000}$ *usque ad* 10, *seu* $10^{1{,}0000000}$ *sint* 9999999 *termini intermedii.* Ergo inter eos erit aliquis intermedius = 2, vel 3, vel 4 cet. Ita 2 inventus est terminus $10^{0{,}3010300}$: $3=10^{0{,}4771213}$: $4=10^{0{,}6020600}$. Quare exponentes illi sunt logarithmi numerorum 2, 3, 4 cet. Hoc artificio et patientissimo multorum annorum labore supputatae sunt logarithmorum tabulae.

Commodissimae sunt tabulae illae. Etenim quum demonstratum sit (*cap. V. §. IV. ad calcem*) logarithmum producti ex duobus numeris, logarithmorum summae aequalem esse; logarithmorum vero differentiae aequalem esse logarithmum quoti; per solam additionem et subtractionem compendiose absolvi possunt multiplicatio et divisio. Sumantur datorum numerorum 3 et 5 logarithmi, iique addantur, numerus summae respondens in logarithmorum tabulis erit logarithmus producti 15. Contra autem logarithmorum differentia erit logarithmus quoti. Ita si a logarithmo numeri 15 subtrahatur in tabulis logarithmus numeri 5, differentia erit logarithmus numeri 3. Simili ratione patet, numerum quemlibet ad datam potestatem evehi, si sumatur numeri dati logarithmus, et per exponentem potestatis multiplicetur; productum enim erit quaesiti numeri logarithmus. Contra autem si numeri dati logarithmus per exponentem radicis dividatur; quotus erit quaesitus radicis logarithmus.

APPENDIX.

De aequationibus.

I.

AEquatio dicitur: *propositio duarum quantitatum aequalitatem adfirmans, interposito aequalitatis signo* $=$ AEquatio valorem quantitatis alicuius repraesentat, si ex una aequationis parte habeatur quantitas sola quaesita, in parte autem altera occurrant quantitates, quae omnes sint cognitae. Ita si habeatur $x = \frac{4 \times 6}{3} = 8$, notus est valor ipsius x. Itaque in omni resolvenda aequatione id curandum est, ut nempe quantitas, cuius valor quaeritur, in una aequationis parte sola contineatur, pars autem altera solas quantitates cognitas contineat. In hac autem appendice duplex dumtaxat aequationum genus considerabimus, eas scilicet, in quibus quantitas incognita vel unius est dimensionis seu primi gradus, vel ad secundam dimensionem seu secundum gradum evehitur. Quod ad primi gradus aequationes spectat, totum artificium regulis quibusdam explicabimus variisque numeris distinguemus. I.° Ex una aequationis parte in alteram transfertur quantitas aliqua, facta signorum permutatione, ut in hoc

exemplo: $5x + 50 = 4x + 56$; $5x - 4x = 56 - 50$, et $x = 6$. II.° Si quantitas incognita quantitatibus aliis per multiplicationem aut divisionem permixta sit, ab iis liberari debet in primo casu per divisionem, in casu altero per multiplicationem. Sit $3x + 12 = 27$, erit $3x = 27 - 12 = 15$, et $x = \frac{15}{3} = 5$. Sit autem $\frac{x}{5} + 4 = 10$ seu $\frac{x + 20}{5} = 10$; erit $x + 20 = 50$, et $x = 50 - 20 = 30$. III.° Proportio quaelibet geometrica converti potest in aequationem, facta extremorum et mediorum multiplicatione. Sit $12 - x : \frac{x}{2} = 4 : 1$, erit $12 - x = 2x$; quare $3x = 12$, et $x = 4$. Simili ratione proportio arithmetica in aequationem per additionem mutari potest. IV.° Loco quantitatis cuiuslibet in aequatione alia eiusdem valoris substitui potest. Sit $3x + y = 24$, et $y = 9$, erit $3x + 9 = 24$, $x = \frac{24 - 9}{3} = 5$. V.° Si pars aequationis quantitatem quaesitam continens signo aliquo radicali adficiatur, delendum est signum radicale, et altera pars aequationis ad eam evehi debet potestatem, quam indicat ipsum signum radicale. Sit $= \sqrt{ax + b^2} - c = d$, erit $\sqrt{ax + b^2} = d + c$, et $ax + b^2 = d^2 + 2cd + c^2$;

autem si numeri dati logarithmus per exponentem radicis dividatur; quotus erit quaesitus radicis logarithmus.

APPENDIX.

De aequationibus.

I.

AEquatio dicitur: *propositio duarum quantitatum aequalitatem adfirmans, interposito aequalitatis signo* = AEquatio valorem quantitatis alicuius repraesentat, si ex una aequationis parte habeatur quantitas sola quaesita, in parte autem altera occurrant quantitates, quae omnes sint cognitae. Ita si habeatur $x = \frac{4\times 6}{3} = 8$, notus est valor ipsius x. Itaque in omni resolvenda aequatione id curandum est, ut nempe quantitas, cuius valor quaeritur, in una aequationis parte sola contineatur, pars autem altera solas quantitates cognitas contineat. In hac autem appendice duplex dumtaxat aequationum genus considerabimus, eas scilicet, in quibus quantitas incognita vel unius est dimensionis seu primi gradus, vel ad secundam dimensionem seu secundum gradum evehitur. Quod ad primi gradus aequationes spectat, totum artificium regulis quibusdam explicabimus variisque numeris distinguemus. I.° Ex una aequationis parte in alteram transfertur quantitas aliqua, facta signorum permutatione, ut in hoc

exemplo: $5x + 50 = 4x + 56$; $5x - 4x = 56 - 50$, et $x = 6$. II.° Si quantitas incognita quantitatibus aliis per multiplicationem aut divisionem permixta sit, ab iis liberari debet in primo casu per divisionem, in casu altero per multiplicationem. Sit $3x + 12 = 27$, erit $3x = 27 - 12 = 15$, et $x = \frac{15}{3} = 5$. Sit autem $\frac{x}{5} + 4 = 10$ seu $\frac{x + 20}{5} = 10$; erit $x + 20 = 50$, et $x = 50 - 20 = 30$. III.° Proportio quaelibet geometrica converti potest in aequationem, facta extremorum et mediorum multiplicatione. Sit $12 - x : \frac{x}{2} = 4 : 1$, erit $12 - x = 2x$; quare $3x = 12$, et $x = 4$. Simili ratione proportio arithmetica in aequationem per additionem mutari potest. IV.° Loco quantitatis cuiuslibet in aequatione alia eiusdem valoris substitui potest. Sit $3x + y = 24$, et $y = 9$, erit $3x + 9 = 24$, $x = \frac{24 - 9}{3} = 5$. V.° Si pars aequationis quantitatem quaesitam continens signo aliquo radicali adficiatur, delendum est signum radicale, et altera pars aequationis ad eam evehi debet potestatem, quam indicat ipsum signum radicale. Sit $= \sqrt{ax + b^2} - c = d$, erit $\sqrt{ax + b^2} = d + c$, et $ax + b^2 = d^2 + 2cd + c^2$;

quare $x = \dfrac{d^2 + 2cd + c^2 - b^2}{a}$.

II. His praemissis permutationum regulis, quae ex antea demonstratis facile intelliguntur, iam problema aliquod unius dimensionis solvendum ponemus. Et primo quidem quaestionis propositae distincta habeatur notio, et singulae conditiones attente considerentur. Si alicuius problematis conditiones ita exprimantur, ut tot habeantur incognitae, quot aequationes; poterit semper deveniri ad unicam aequationem, quae unicam incognitam habeant. Nam sint e. g. 10 aequationes et totidem incognitae; poterit conferendo primam cum secunda eliminari per regulas praescriptas una ex iis incognitis inveniendo novam aequationem, quae illa careat: tum idem praestari poterit conferendo primam cum tertia, et ita porro, ac habebuntur iam novem aequationes cum novem incognitis; quae eodem artificio ad octo reduci poterunt cum octo incognitis; et ita porro, donec perveniatur ad unicam aequationem cum unica incognita. Hinc si habeantur tot aequationes, quot incognitae, problema dicitur *determinatum;* et unicam vel finitas numero solutiones admittit. Si fuerint plures incognitae quam aequationes, problema dicitur *indeterminatum*, et solutiones habet infinitas. AEquatio $3x + \frac{1}{2}x = 20$ est aequatio determinata, sed $x + y = 12$ est indeterminata. Etenim si ponatur $x = 1$, et $y = 11$, vel $x = 2$, et $y = 10$, et ita porro, semper

invenietur $x + y = 12$, ita ut infiniti sint valores, qui pro x et y positi numerum datum restituant. Regulas hactenus explicatas ad facile exemplum transferamus. Mercator quidam nummos quotannis triente adauget, demtis 100 nummis; quos annuatim impendit in sumtus, et post tres annos sit duplo ditior, quaeruntur nummi, *quos ab initio habet indeque etiam innotescent, quos habet post annos tres.* In hoc problemate plures latent conditiones sic evolvendae, et enuntiandae. Quantitates incognitae ultimis alphabeti litteris designari solent. Itaque mercator habet certam nummorum summam; quae dicatur x. Anno primo expendit nummos 100. Quare residuum est $x - 100$, quod adauget triente, *seu tertia parte.* Ideoque *pecunia mercatoris sub fine primi anni* est, $x - 100 + \dfrac{x-100}{3} = \dfrac{4x-400}{3}$. Anno secundo expendit nummos 100, quare residuum $\dfrac{4x-400}{3} - 100 = \dfrac{4x-400}{3}$, quod adauget triente, *seu tertia parte.* Ideoque fit *pecunia mercatoris sub* fine secundi anni, $\dfrac{4x-700}{3} + \dfrac{4x-700}{9}$ $= \dfrac{16x-2800}{9}$. Anno tertio expendit nummos 100.

ideoque residuum est $\frac{16x-2800}{9}-100=\frac{16x-3700}{9}$, quod adauget triente *seu tertia parte*. Quare fiunt *mercatoris nummi sub anni tertii fine* $\frac{16x-3700}{9}+\frac{16x-3700}{27}=\frac{64x-14800}{27}$. Tandem ex conditione problematis post tres annos fit duplo ditior. Ergo $\frac{64x-14800}{27}=2x$. Quaestio itaque ad aequationem reducitur, ex qua erui debet x. Vtramque aequationis partem multiplica per 27, productum fit $64x-14800=54x$. Aufer ex utroque aequationis membro $54x$; residuum est $10x-14800=0$, seu $10x=14800$; dividas per 10, habetur $x=1480$. Quare habentur nummi sub initio, et ipsum lucrum.

III. Si in aliquo solvendo problemate perveniatur ad aequationem, quae ipsum quantitatis incognitae quadratum, et praeterea productum ex ipsa quantitate incognita in aliquam datam quantitatem involvat, haec aequatio dicitur *secundi gradus* vel *quadratica*. In talibus autem aequationibus hac regula utendum est. Singulos aequationis terminos, qui incognitam quantitatem continent, ad unam partem transferas ita, ut singuli termini cogniti ex parte altera maneant. Si quantitatis incognite quadratum coëfficiente aliquo adficiatur, per hunc coëfficientem singuli aequationis termini dividantur. Tandem dimidii

coëfficientis quantitati incognitae praefixi sumatur quadratum, quod ex utraque parte addatur. Iam pars aequationis, quae incognitam quantitatem continet, ad perfectum quadratum reducta habebitur; ex qua proinde radix quadrata extrahi poterit, et deinde per regulas praescriptas quantitatis incognitae valor erueretur. Ponamus $y^2+ay=b^2$: addatur hinc et inde quadratum dimidii coëfficientis a; erit $y^2+ay+\frac{1}{4}a^2=b^2+\frac{1}{4}a^2$; extractaque radice fiet $y+\frac{a}{2}=\pm\sqrt{b^2+\frac{1}{4}a^2}$, et tandem $y=+\sqrt{b^2+\frac{1}{4}a^2}-\frac{a}{2}$. Diligenter observandum est, radici quadratae praefixum fuisse signum $\pm$, hoc est, $+$ vel $-$. Etenim radix quadrata cuiuslibet quantitatis, ut a^2 potest esse $+a$, vel $-a$, ideoque $y+\frac{a}{2}=+\sqrt{b^2+\frac{1}{4}aa}$ vel $-\sqrt{b^2+\frac{1}{4}a^2}$; quum $-\sqrt{b^2+\frac{a^2}{4}}\times-\sqrt{b^2+\frac{a^2}{4}}$ restituat quadratum $b^2+\frac{a^2}{4}$, non secus ac facit $+\sqrt{b^2+\frac{a^2}{4}}\times+\sqrt{b^2+\frac{a^2}{4}}$. Quare aequationes quadraticae duas admittunt solutiones. Sic in praesenti exemplo duo sunt valores radicis y, unus nempe $y = +\sqrt{b^2 + \frac{a^2}{4}} - \frac{a}{2}$; alter autem $y = -\sqrt{b^2 + \frac{a^2}{4}} - \frac{a}{2}$.

De quantitatibus imaginariis.

Scholion. At quoniam positiva sunt omnium quantitatum quadrata, hinc patet, quantitatis negativae radicem esse impossibilem, seu adsignari non posse, quae ideo dicitur *imaginaria.* Aliquando contingit, aequationes nullam solutionem admittere. Exemplo sit $y^2 - ay + 3a^2 = 0$, erit $y^2 - ay = -3a^2$, et $y^2 - ay + \frac{a^2}{4} = -3a^2 + \frac{a^2}{4} = -\frac{11a^2}{4}$. Extractaque radice habebitur $y - \frac{a}{2} = \pm\sqrt{-\frac{11a^2}{4}}$, et $y = \frac{a}{2} \pm \sqrt{-\frac{11a^2}{4}}$. Ex quibus manifestum est, duos valoris radicis y esse imaginarios, quum adsignari non possit radix quantitatis $-\frac{11a^2}{4}$. Si ergo in solutione problematum deveniatur ad quantitates imaginarias,

signum est admodum manifestum, vel problema esse impossibile, vel adhibitam esse methodum, quae aliquid impossibile involvit, prorsus ut fit in argumentatione, dum res ad absurdum reducitur.

IV. Radices imaginariae, quae eamdem sub signo radicali quantitatem habent, ut $\sqrt{-a}$, $-\sqrt{-a}$, per multiplicationem efficere possunt productum reale, in quo nullum supersit signum radicale, dummodo radices illae numero pari semper multiplicentur. Etenim evanescere non potest signum radicale, nisi terminus hoc signo, adfectus multiplicetur per alium terminum, qui idem signum radicale habeat, et eamdem quantitatem signo inclusam. Iam vero ita sublato signo radicali, si productum ex prima multiplicatione per idem signum radicale multiplicetur, novum productum adficietur quoque signo radicali; at si rursus multiplicetur per idem signum radicale, iterum evanescet signum radicale, et ita deinceps. Si polynomii terminus aliquis contineat radicem imaginariam, quale est polynomium $x - a - \sqrt{-b}$, evanescere non potest signum radicale, nisi polynomium datum multiplicetur per aliud, quod a primo differat tantum, quod ad signum vinculo radicali praefixum. Ita in polynomio proposito solum productum ex $x - a - \sqrt{-b}$ in $x - a + \sqrt{-b}$ delere potest signum radicale, factaque multiplicatione habetur $xx - 2ax + aa + b$. In hoc enim solo casu producta singula ex unoquoque termino reali in $\sqrt{-b}$ sese mutuo signis contrariis elidunt, atque hinc patet, et terminum b, qui continet productum ex duobus radicalibus $+\sqrt{-b}\times-\sqrt{-b}$, esse necessario positivum. Itaque quantitatum imaginariarum frequens usus occurrere potest; ipsa enim impossibilitas non solum per multiplicationem aliquando tollitur, sed etiam summa binarum quantitatum, quae ex realibus et imaginariis sunt mixtae, realis esse potest. Ita quantitatum $3+\sqrt{-1}$, et $8-\sqrt{-1}$ summa est realis, nimirum 11, atque etiam realis est differentia, nempe 5, *si* $3+\sqrt{-1}$ *subtrahenda sit ex quantitate* $8+\sqrt{-1}$.

V. AEquationes omnes secundi gradus repraesentari solent hac formula $x^2-px=q$, in qua p et q designant quantitates quaslibet vel positivas vel negativas. Inde autem statim concluditur $x-\frac{p}{2}=\pm\sqrt{\frac{pp}{4}+q}$. Hinc autem difficultates aliquae suboriri possent ex praecedentibus facile explicandae. Quaeri etenim potest, cur quantitas possitiva $x-\frac{p}{2}$ aequalis fiat negativae $-\sqrt{\frac{pp}{4}+q}$. Re quidem vera duo quadrata ae-

qualia praebent aequales radices, sed radices illae eiusdem signi esse debent. Etenim ex eo, quod $4=4$, concludi non potest $2=-2$. Praeterea $\frac{p}{2}-x$ tam est radix ipsius $xx-px+\frac{pp}{4}$, quam $x-\frac{p}{2}$. Quare scribendum videretur $+x\pm\frac{p}{2}$ $=\pm\sqrt{\frac{pp}{4}+q}$. Has difficultates facile solvemus, si observetur, hanc ultimam aequationem in quattuor sequentes resolvi posse, $x-\frac{p}{2}=\sqrt{\frac{pp}{4}+q}$. $x-\frac{p}{2}=-\sqrt{\frac{pp}{4}+q}$; $\frac{p}{2}-x=\sqrt{\frac{pp}{4}+q}$; $\frac{p}{2}-x=-\sqrt{\frac{pp}{4}+q}$. Ex his quatuor *aequationibus prima et quarta; secunda et tertia per transpositionem in eamdem recidunt*; quare satis est duplex signum $\pm$ in una aequationis generalis parte adhibere, ut fieri solet. Praeterea aequationis resolutio hoc modo institui posset. Radix quadrata aequationis $xx-px+\frac{pp}{4}$ est

$x - \frac{p}{2}$, si x sit maior quam $\frac{p}{2}$; fitque $\frac{p}{2} - x$, si x sit minor, quam $\frac{p}{2}$. In 1.° casu habetur $x - \frac{p}{2} = \sqrt{\frac{pp}{4} + q}$; in altero autem erit $\frac{p}{2} - x = \sqrt{\frac{pp}{4} + q}$. Hi ergo sunt duo casus distincte expressi, qui duplici signo in formula generali *implicite* enuntiantur hoc modo $x - \frac{p}{2} = \pm \sqrt{\frac{pp}{4} + q}$. Si haberetur $xx + px = q$, per ratiocinationem praecedentem invenitur $x + \frac{p}{2} = \sqrt{\frac{pp}{4} + q}$, sola nempe radix positiva; tum vero inutilis est radix negativa, quum problematis solutionem non praebeat. Haec tamen radix haberetur quoque, mutata aequatione per regula explicatas: prodiret nempe $xx - px = q$, et $\frac{p}{2} - x$, vel $x - \frac{p}{2} = \sqrt{\frac{pp}{4} + q}$. Hac igitur methodo radices positivas necessarias a superfluis, veras a falsis separare liceret.

Æquationum quadraticarum doctrina facili

exemplo illustrabimus. Itaque hoc sit problema, invenire scilicet in linea duo quaecumque luminaria coniungente, punctum tale, ut luminaria illa ex hoc puncto aequali luce fulgeant. Distantia inter duo luminaria dicatur a, sitque illuminationis ratio, ut m ad n. Praeterea dicatur x distantia minoris luminaris a puncto quaesito; erit distantia luminaris alterius ab eodem puncto $a - x$. Iam ponatur luminarium effectus seu lucis intensitatem esse in ratione reciproca duplicata distantiarum a puncto lucido, ut vulgo statuitur a physicis. Sumtis distantiarum quadratis, erunt intensitates lucis ut $\frac{1}{xx}$ et $\frac{1}{xx - 2ax + aa}$. Res ita se haberet, si aequalia forent luminaria. At quia (*ex hypoth.*) lucis quantitates absolutae sunt, ut m ad n; erunt luminarium effectus, ut $\frac{m}{xx}$ ad $\frac{n}{xx - 2ax + aa}$. Itaque ut habeatur punctum quaesitum, instituenda est aequatio inter $\frac{m}{xx}$ et $\frac{n}{xx - 2ax + aa}$ ex qua per reductionem regulas eruitur $xx + \frac{2amx}{n - m} = \frac{aam}{n - m}$, et addito, ut moris est dimidii coëfficientis quadrato, habetur $x^2 + \frac{2amx}{n-m} + \frac{aamm}{(n-m)^2} = \frac{aam}{n-m} + \frac{aamm}{(n-m)^2}$.* Huius aequationis radices duae sequenti formula exprimuntur, ut patet, nempe $x = -\frac{am}{n-m} + \frac{a}{n-m}\sqrt{mn}$, vel $x = -\frac{am}{n-m} - \frac{a}{n-m}\sqrt{mn}$. Ex his evidens est, unius radicis valorem esse negativum, alterius autem positivum. Etenim si quantitas radicalis signo — adficiatur, iam quantitas tota fit negativa; si autem adficiatur signo positivo +, iam quantitas $-m+\sqrt{mn}$ erit positiva, quum sit (*ex hypoth.*) n maior, quam m; ideoque $\sqrt{mn}$ maior quam m.

Superest, ut radicis negativae usum explicemus. In memoriam revocanda sunt, quae de quantitatibus negativis iam dicta sunt, scilicet quanti-

* *In gratiam tironum lubet intermedias operationes extricare:* $x + \frac{am}{n-m} = \pm\sqrt{\frac{aam}{n-m} + \frac{a^2m^2}{(n-m)^2}}$. *Hinc* $x + \frac{am}{n-m} = \pm\sqrt{\frac{a^2nm - a^2m^2 + a^2m^2}{(n-m)^2}}$, *et per reductionem:* $x = -\frac{am}{n-m} \pm \frac{a}{n-m}\sqrt{mn}$.

tates negativas secundum directionem positivis oppositam sumendas esse. In praesente problemate quantitatis x valor negativus facile intelligetur, si observemus, punctum quaesitum a nobis considerari tamquam inter duo luminaria constitutum. At si attendatur ad alterius casus possibilitatem, ponendo nempe punctum quaesitum in lineas producta ultra luminaria, iam valor radicis prodit positivus. Et quidem si distantia puncti a minori luminari dicatur x, ut antea; erit luminaris maioris distantia $a+x$; quadrata autem distantiarum erunt xx, et $aa+2ax+xx$, quae per conditiones problematis in aequationem reducta, praebent $maa+2amx+mxx=nxx$ resoluta aequatione, habetur $x=\frac{am}{n-m}\pm\frac{a}{n-m}\sqrt{nm}$.

Valor $\frac{am}{n-m}+\frac{a}{n-m}\sqrt{nm}$, erit positivus, hicque solus problemati satisfaciet in casu proposito. Alter autem valor negativus $\frac{am}{n-m}-\frac{a}{n-m}\sqrt{nm}$ significat, sumendam esse directionem oppositam, punctumque non in linea producta ultra luminaria, sed in ipsa linea iungente constituendum esse. Problema ad casum particularem transferamus. Ponatur $n=4m$ et $m=1$: praecedens formula $x=\frac{a}{n-m}\times(-m\pm\sqrt{mn})$ in hanc abit

$x = \frac{a}{3} \times (-1 \pm 2)$. Quare duplex valor radicis x erit $+\frac{1}{3}a$ et $-a$, qui quidem duo valores determinant puncta duo, quae problemati aeque satisfaciunt. Punctum unum locatur inter duo luminaria, illiusque distantia a lumine vividiori duplo maior erit, quam a debiliori. Punctum alterum constituetur in linea producta, illiusque a lumine debiliori distantia aequalis erit ipsi luminarium distantiae. Facile autem sine ullo algebrae auxilio intelligitur, utrumque punctum problemati satisfacere; quum duo illa puncta lumini debiliori duplo proximiora sint, quam vividiori, quae vim habent quadruplo maiorem. Hoc exemplo illustrantur, quae de quantitatibus negativis breviter antea attigimus. Haec sunt arithmeticae et algebrae elementa brevissima quidem, sed tamen rerum varietate copiosa, quantum ad nostras institutiones physicas satis esse iudicavimus.

FINIS ALGEBRAE.

ELEMENTA GEOMETRIAE.

PROOEMIVM.

De definitione et divisione geometriae.

DEFINITIO I.

Geometria est: scientia magnitudinum; *solidorum* nempe, *superficierum* et *linearum*.

Def. II. Solidum est magnitudo in longum, latum et profundum extensa.

Schol. Quamvis autem nihil sit in rerum natura continuum, quod tres illas dimensiones simul non habeat, illae tamen seorsum considerari possunt, vel etiam duas tantum concipere possumus, de tertia minime cogitantes; atque hinc intelligitur notio superficiei et lineae.

Def. III. Superficies est: magnitudo tantum in longum et latum extensa. Linea autem est: magnitudo extensa tantum in longum.

Schol. Et re quidem ipsa itineris longitudinem nobis repraesentamus, non attenta eius latitudine; et planitiei latitudinem intelligimus, terrarum profunditatem nequaquam considerantes.

$x = \frac{a}{3} \times (-1 \pm 2)$. Quare duplex valor radicis x erit $+\frac{1}{3}a$ et $-a$, qui quidem duo valores determinant puncta duo, quae problemati aeque satisfaciunt. Punctum unum locatur inter duo luminaria, illiusque distantia a lumine vividiori duplo maior erit, quam a debiliori. Punctum alterum constituetur in linea producta, illiusque a lumine debiliori distantia aequalis erit ipsi luminarium distantiae. Facile autem sine ullo algebrae auxilio intelligitur, utrumque punctum problemati satisfacere; quum duo illa puncta lumini debiliori duplo proximiora sint, quam vividiori, quae vim habent quadruplo maiorem. Hoc exemplo illustrantur, quae de quantitatibus negativis breviter antea attigimus. Haec sunt arithmeticae et algebrae elementa brevissima quidem, sed tamen rerum varietate copiosa, quantum ad nostras institutiones physicas satis esse iudicavimus.

FINIS ALGEBRAE.

ELEMENTA GEOMETRIAE.

PROOEMIVM.

De definitione et divisione geometriae.

DEFINITIO I.

Geometria est: scientia magnitudinum; *solidorum* nempe, *superficierum* et *linearum.*

Def. II. Solidum est magnitudo in longum, latum et profundum extensa.

Schol. Quamvis autem nihil sit in rerum natura continuum, quod tres illas dimensiones simul non habeat, illae tamen seorsum considerari possunt, vel etiam duas tantum concipere possumus, de tertia minime cogitantes; atque hinc intelligitur notio superficiei et lineae.

Def. III. Superficies est: magnitudo tantum in longum et latum extensa. Linea autem est: magnitudo extensa tantum in longum.

Schol. Et re quidem ipsa itineris longitudinem nobis repraesentamus, non attenta eius latitudine; et planitiei latitudinem intelligimus, terrarum profunditatem nequaquam considerantes.

Def. IV. Denique si concipiamus lineae terminum, cuius nulla pars sit, nulla extensio, iam terminus ille *punctum* dicitur.

Schol. I. Itaque ad explicandum tironibus geometriae definitionem, id primum ostendi debet, quomodo per varios abstractionum gradus ex corporis *physici*, et prout est in se, consideratione ad corporis *geometrici* et simpliciter extensi contemplationem perveniamus, ac deinde ad superficiei et lineae notionem progrediamur, atque tandem notionem puncti formemus. Neque methodo satis philosophica utuntur, qui statim superficiem definiunt terminum solidi, lineam terminum superficiei, et punctum terminum lineae.

Schol. II. Ex praecedenti definitione nascitur divisio geometriae in geometriam linearum, superficierum et solidorum. Quare tres erunt geometriae sectiones. I.ª De lineis. II.ª De superficiebus. III.ª De solidis. In prima sectione linearum positionem illarumque mutuam relationem expendemus. Porro linearum nomine non solum intelligimus lineam rectam, sed etiam lineam circularem, cuius utilitas est maxima in consideranda linearum rectarum mutua positione. Quare ad geometriae elementa pertinent quoque circuli proprietates. In secunda autem sectione superficierum proprietates et mensuram considerabimus. In tertia tandem sectione proprietates solidorum illorumque mensuram demonstrabimus. Ad recta methodus postulat, ut rerum demonstrandarum varietatem in unaquaque sectione variis capitibus distinguamus.

Fig.

Def. V. Lineam repraesentare solent geometrae tamquam genitam motu puncti. Si punctum directionem non mutat, linea hoc motu descripta *recta* dicitur, uti AB; *curva* autem appellatur, si punctum perpetuo mutet directionem, uti OGQ. 1.

Schol. At fatendum est, ita simplicem esse lineae rectae et curvae notionem, ut ad clariorem ideam magisque *elementarem* reduci vix possit. Rectam definiunt alii, lineam omnium inter duos terminos ductarum brevissimam.

Corol. I. Ceterum inde evidens est, datis in linea recta punctis duobus, datam esse huius lineae positionem ita, ut unica dumtaxat recta per haec duo puncta transire possit.

Corol. II. Ex his etiam intelligitur, quid sit superficies plana, scilicet omnium superficierum eosdem terminos habentium brevissima, vel cui linea recta undequaque adaptari potest.

Def. VI. *Circulus* definitur: figura plana CEGFOH, unica curva linea comprehensa, quae 2.
peripheria dicitur sive *circumferentia* CGFOH, ad quam omnes rectae lineae a puncto medio E, quod *centrum* dicitur, ductae aequales sunt inter se.

Def. VII. Circumferentiae pars quaelibet CG *arcus* vocatur. Linea recta per centrum ducta, et utrinque in peripheria terminata RO *diameter* dicitur; rectae autem a centro ad circumferentiam ductae EF, EG *semidiametri* vel *radii* appellantur.

Def. VIII. Anguli notio ope circuli facillime concipitur. Duae lineae CE, RE in aliquo puncto E concurrentes, angulum efficere dicuntur. Angulorum mensura est arcus, quem ipsorum latera comprehendunt, in peripheria circuli ex anguli vertice, tamquam centro, descripti. Sic arcus CR est mensura anguli CER.

Schol. I. Porro dum dicitur, anguli mensuram esse arcum circuli, nihil aliud significatur, nisi aequales esse angulos, si aequales sint arcus ex angulorum vertice et eodem radio descripti. Ita dum dicitur, angulum esse alterius duplum, nihil aliud intelligitur, nisi arcum unum altero esse duplo maiorem. Itaque anguli natura in maiori aut minori inclinatione unius lineae ad aliam consistit. Igitur angulus quum sit mera linearum inclinatio et apertura; extensio vel quantitas proprie loquendo dici non potest; ac proinde, abstractione facta ab omni extensionis consideratione, angulum alterius duplum dicere non possumus, quum id dici possit dumtaxat de quantitate, comparata cum alia quantitate homogenea. Quia vero mera linearum apertura partes non habet, angulus non est quantitas proprie dicta *.

Atque hinc factum est, ut anguli mensura cum circuli arcu comparaverint geometrae.

Schol. II. Circulus dividi solet in partes aequales 360, quae *gradus* dicuntur; singuli gradus dividuntur in 60 minuta prima, quodlibet minutum primum dividitur in 60 secunda; et sic in infinitum. Gradus per o designari solent, minuta autem per lineolas numeris superimpositas. Ita si forte occurrant 45°; $25'$, $36''$, $42'''$, lege

* *Celeberrimae quaestioni sese interponit Auctor, quae inter magni nominis mathematicos Clavium et Peletarium exagitata est, ut aliam de natura anguli contactus resolverent. Sed Jacquierius Tacqueto adsentiri videtur, aiecti in sua adversum illos disquisitione, angulum non esse quantitatem; sed quantitatis modum. Nos vero, qui adolescentes ab omni cavillandi studio in physica alienos esse volumus, eos sedulo monere debemus, ne in mathesim elementarem, quae non cavillationes modo, sed et quaestionum pruritum aversatur, praesentem quaestionem intrudant, quae, nondum satis eliquato calculo infinitesimali, scholaticisque nimio adhuc disputationum aestu ferventibus, mathematicos in varia traxit. Hoc unum, velim, animadvertant, angulum, ut veram accuratamque quantitatem a mathematicis tractari, idque satis superque esse, ut vera et genuina sit quantitas in geometria, qua talis scientia est. Quod si ideo quantitatem esse negandum est, quod non sit, nisi quantitatum seu linearum relatio aut inclinatio; pariter spatium quantitatem esse, negandum erit, quum nihil aliud illud sit, quam punctorum, linearum, superficierumve coëxsistentium mutua relatio. Ex eo autem, quod mensura anguli sit heterogenea, seu arcus ad radium suum relatus, concludi nequit, angulum non esse quantum, quemadmodum non infertur, celeritatem non esse veram quantitatem, etsi celeritatis mensura sit heterogenea, spatium nempe ad tempus relatum.*

Fig. 45 gradus, 25 minuta prima, 36 secunda 42 tertia.

Corol. Ex angulorum notione pendet linearum mutua positio.

8. *Def.* IX. Linea DA dicitur alteri lineae EB *perpendicularis*, quando in ipsam incidens facit angulos hinc et inde aequales DAE, DAB. Angulus eiusmodi dicitur *rectus*. At si recta una CA super alteram EB cadens duos angulus efficiat CAB, CAE, ita ut unus CAE sit recto maior, alter autem CAB minor: primus dicitur *obtusus*, alius autem *acutus*.

8. *Def.* X. Si talis sit rectarum BA, CD positio, ut eamdem semper a se invicem servent distantiam, evidens est, nullam esse linearum illarum mutuam inclinationem; ac proinde in infinitum etiam protractae non concurrent, seu angulum non efficient. Tales lineae dicuntur *parallelae*.

Corol. Ex lineae rectae definitione evidens est, duas lineas rectas in unico dumtaxat puncto concurrere posse. Quum enim omni careant latitudine: communis intersectio in unico tantum puncto fieri potest. Neque ad aliam deinde intersectionem transire possunt; alterutra enim linea directionem mutaret, ac proinde non forent ambae rectae, quod est contra hyp. Id pro axiomate habent geometrae, et ita exprimi solet. *Duae rectae nec segmentum commune habere, nec spatium claudere possunt.* Itaque tres saltem lineae requiruntur, ut spatium undique claudatur.

Def. XI. Spatium undique clausum *figura* dici-
9. tur. *Triangulum* est, figura ABC terminata tribus

lineis AB, BC, CA, quae eiusdem *latera* vocantur. Fig.

Def. XII. Haec autem latera si fuerint aequalia, uti AB, BC, CA, triangulum dicitur *aequi-* 17.
laterum. Si duo tantum latera sint aequalia, uti AB, BC, triangulum vocatur *aequicrurum* seu 18.
isosceles. Demum si latera omnia fuerint inaequalia, uti AB, BC, CA, triangulum *scalenum* dicitur. 9.

Def. XIII. Rursus autem triangulum ratione angulorum considerari potest. Si unum habeat angulum rectum, uti ACB, *rectangulum* dicitur. 15.
Acutangulum si omnes habeat angulos acutos, uti ACB. Tandem *obtusangulum* vocatur, si angu- 17.
lum unum habuerit obtusum, uti ACB. 9.

Def. XIV. Figura quattuor lateribus terminata, *quadrilaterum* generatim appellatur. Appellatur autem in specie *parallelogrammum*, cuius bina opposita latera sunt mutuo parallela, etiamsi anguli lateribus comprehensi non sint recti.

Def. XV. Si parallelogrammum aequalia habuerit latera AB, BC, CD, DA, et ad angulos 11.
rectos iuncta, *quadratum* dicitur. At simpliciter *parallelogrammum rectangulum* vocatur, si latera duo opposita et aequalia AD, BC, duobus reliquis aequalibus item et oppositis BA, CD maiora 12.
sint, manentibus tamen angulis rectis.

Def. XVI. Si parallelogrammum sit aequilaterum, 13.
anguli tamen lateribus comprehensi non sint recti; *rhombus* dicitur. At *rhomboides* vocatur, si latera opposita AC, BD, atque AB, DC, aequalia 14
habuerit. Tandem quodlibet quadrilaterum ab iis quae iam enumeravimus, diversum ABCD, *tra-* 16
pezium appellatur.

Fig. *Def. XVII.* Figura *polygona* dicitur, quae pluribus quam quattuor angulis constat, adeoque pluribus quam quattuor lateribus terminatur. Si latera fuerint quinque, dicitur *pentagonum*, uti
29. ADGIL.

Schol. Axiomata et postulata plurima praemittere solent geometrae, quae quidem nos omittimus. ¿Quae enim est axiomatum de toto et parte utilitas, ut intelligamus, dimidiam lineam tota minorem esse? ¿Ecquis statim non videt, rectam lineam produci posse: circulum dato intervallo posse describi, et reliqua huiusmodi? Verum inter axiomata unum de figurarum *superimpositione* legitur, simplicissimum quidem et in universa geometria utilissimum, quod sine aliqua explicatione praetermittere nolumus. Dicunt nempe *ea esse aequalia, quae sibi mutuo superimposita, perfecte congruunt.* Principium illud *superimpositionis* non ita crasse intelligendum est, quasi in mutua figurarum applicatione consisteret, non secus ac artifex mensuram aliquam datae longitudini applicat, ut inde veram longitudinem concludat: talis demonstrandi ratio minime foret geometrica. In eo positum est praedictum principium, ut figuram alteri impositam imaginemur, et deinde concludamus. I.° Ex partium datarum aequalitate ipsum earumdem partium convenientiam sive *coincidentiam.* . . . II.° Ex hac coincidentia ipsam reliquarum partium coincidentiam, ac proinde et perfectam duarum figurarum aequalitatem et similitudinem. Itaque *superimpositionis* principio intelligenda non est dumtaxat mu-

tua figurarum applicatio, sed partis unius alteri Fig.
parti impositio, ut deinde figuras illas inter se comparemus. Vnde evidens est, idem valere principium ad demonstrandam figurarum inaequalitatem. Ceterum hoc unico principio cum angulorum mensura per arcus circulares coniuncto, demonstrari possunt propositiones omnes, quae ad elementarem linearum geometriam pertinent.

SECTIO I.

De geometria linearum.

CAPVT I.

De lineis rectis, quod ad mutuam positionem consideratis, nullum tamen spatium, seu nullam figuram terminantibus.

THEOREMA I.

RECTA QVAELIBET IN RECTAM CADENS, VEL DVOS ANGVLOS EFFICIT RECTOS, VEL DVOBVS RECTIS AEQVALES.

Etenim recta insistat perpendiculariter ut GE 2.
vel oblique ut RE. In primo casu patet (*ex def. IX.*) angulos GEF, GEC esse rectos; in casu altero anguli duo CER, REF simul sumti aequales sunt duobus angulis CEF, GEF, hoc est duobus rectis.

Corol. 1. Producta linea RE in O, simili ratione patet, angulos FEO, OEC duobus rectis aequales esse, ac proinde duae rectae sese invicem secantes, efficiunt angulos hinc et inde quattuor rectis aquales. Iam ex centro E describatur circulus: mensura angulorum quattuor erit integra circuli circumferentia, hoc est 360°. Igitur angulus rectus erit quarta pars circumferentiae, nempe 90°.

Corol. II. Rectae GH, RO efficiunt angulos GER, HEO, qui dicuntur *ad verticem oppositi.* Illos autem angulos aequales esse, manifestum est. Quum enim sit dimidium peripheriae RFO aequale dimidio peripheriae GFH; sublata communi parte GO, erunt arcus reliqui GR, HO aequales inter se. *Adeoque et aequales erunt anguli* GER, HEO, *quos praedicti arcus metiuntur.*

Corol. III. Recta GE ad alteram CF perpendicularis est, si puncta duo quaelibet G, E a punctis duobus quibuslibet, ut C, F aequaliter distent, hoc est, si GC = GF et CE = EF. Etenim puncta duo E et G non magis inclinant versus C, quam versus F; ac proinde, quum duo puncta lineae rectae positionem determinent (*cor. I. def. V.*) aequalis est rectae totius GE hinc et inde ad rectam CF inclinatio; ideoque ob angulos utrinque aequales recta GE perpendicularis est ad CF. (*def. IX.*) Patet autem, puncta *c* et *f* sumi posse pro arbitrio inter E et F.

Corol. IV. Ex puncto quolibet E in recta CF dato erigi potest ad eamdem rectam perpendicularis EG. Etenim centro E, et dato quolibet aequali intervallo E*c*, E*f* describantur eodem ra-

dio arcus circuli sese invicem secantes in *g*: recta per *g* et E ducta, erit perpendicularis quaesita ob distantias *gc*, *gf* et E*c*, E*f* aequales.

Si punctum *h* extra rectam CF datum sit, simili ratione ducitur *ex puncto* h *ad rectam* CF perpendicularis *h*E. Etenim ex puncto *h tamquam centro, et ope intersectionum, seu arcuum aequali ratio factorum* sumantur aequalia intervalla *hc*, *hf*, deinde ex punctis *c* et *f*, tamquam centris; et eodem intervallo describantur arcus circuli se mutuo secantes in *g*, ducaturque *hg*, haec erit perpendicularis ob aequales *hc*, *hf* et *gc*, *gf* distantias. Evidens autem est, in utroque casu unicam perpendicularem duci posse. Vnica enim est recta transiens per punctum E vel *h*, quae cum recta CF aequales hinc et inde efficiat angulos. Patet autem, lineam perpendicularem esse omnium, quae ex puncto dato ad lineam datam duci possunt, brevissimam; quum recta perpendicularis non magis propendat in unam partem quam in aliam: ac proinde neque ad dexteram declinet, neque ad sinistram, ideoque brevissima est via a puncto dato ad lineam datam. Item evidens est, ex puncto dato ad lineam datam unicam perpendicularem duci posse.

Eadem omnino est operatio, si recta *cf* in duas partes aequales dividenda proponatur. Ex punctis *c* et *f* tamquam centris, et eodem radio describantur arcus circuli, sese secantes in *g*. Deinde ex iisdem punctis, et sumto quolibet eodem intervallo describantur arcus se invicem secantes in *h*, recta *hg* dividet *cf* aequaliter in E, ut pa-

Fig. tet; quum singula puncta rectae gh aequaliter distent a punctis c et f, ac proinde $Ec = Ef$.

THEOREMA II.

3. SI LINEAE AB, DC SINT PARALLELAE, ERIT: I.° ANGVLVS OFD, QVI EXTERNVS DICITVR, AEQVALIS ANGVLO OGB, QVI INTERNVS ET OPPOSITVS VOCATVR: II.° AEQVALES ERVNT ANGVLI BGF, GFC, QVI DICVNTVR ALTERNI: III.° ANGVLI INTERNI, ET AD EAMDEM PARTEM POSITI DFG, FGB AEQVALES ERVNT DVOBVS RECTIS.

Quum lineae parallelae eodem inter se ubique distent intervallo (*ex def. x.*), evidens est, eamdem fore parallelae utriusque BA, DC inclinationem ad rectam EO, ac proinde angulus OFD aequalis est angulo OGB: quod erat primum. Praeterea quum angulus GFC aequetur angulo DFO ad verticem opposito (*corol. II. theor. I.*); erunt etiam aequales anguli BGF, GFC: quod erat secundum. Tandem quum anguli OFD, GFD aequentur duobus rectis (*theor. I.*) aequales itidem erunt duobus rectis DFG, FGB; quod erat tertium.

Versa vice si angulus externus OFD aequalis sit interno et opposito FGB, erit eadem inclinatio rectarum CD, AB ad rectam EO; ac proinde rectae illae parallelae sunt inter se. Rursus si aequales sint anguli alterni BGF, GFC; vel si duobus rectis simul aequales sint interni ad eamdem partem positi BGF, GFD; angulus externus DFO semper aequalis erit angulo interno et opposito BGF; ac proinde rectae AB, CD erunt parallelae. Itaque ex ipsa parallelismi notione facile colliguntur tres primariae parallelarum adfectiones, necessario nexu inter se coniunctae ita, ut ex una qualibet inferre liceat, rectas illas esse parallelas. Porro in demonstrandis proprietatibus illis nimis laborare videntur quidam geometrae.

Fig. 3.

Corol. I. Si duae rectae AB, HK parallelae sint eidem rectae CD, erunt etiam inter se parallelae. Etenim inclinatio rectarum KH, BA ad rectam EO eadem erit, ac inclinatio rectae CD ad eamdem.

Corol. II. Si per datum punctum F ducere oporteat rectam CD parallelam rectae KH; ex quolibet huius puncto O ducatur recta GFO, et fiat angulus GFD aequalis angulo KOF, descriptis nempe ex punctis O, F, tamquam centris, et eodem radio arcubus aequalibus FM, GN; erit recta FD parallela ipsi KO.

CAPVT II.

De linearum rectarum respectu circuli positione.

THEOREMA I.

DVCTA RECTA FM, AD CIRCVMFERENTIAM VTRIQVE TERMINATA, QVAE CHORDA DICITVR, RECTA EP EX CENTRO CIRCVLI AD 4.

Fig. tet; quum singula puncta rectae gh aequaliter distent a punctis c et f, ac proinde $Ec = Ef$.

THEOREMA II.

3. SI LINEAE AB, DC SINT PARALLELAE, ERIT: I.° ANGVLVS OFD, QVI EXTERNVS DICITVR, AEQVALIS ANGVLO OGB, QVI INTERNVS ET OPPOSITVS VOCATVR: II.° AEQVALES ERVNT ANGVLI BGF, GFC, QVI DICVNTVR ALTERNI: III.° ANGVLI INTERNI, ET AD EAMDEM PARTEM POSITI DFG, FGB AEQVALES ERVNT DVOBVS RECTIS.

Quum lineae parallelae eodem inter se ubique distent intervallo (*ex def. x.*), evidens est, eamdem fore parallelae utriusque BA, DC inclinationem ad rectam EO, ac proinde angulus OFD aequalis est angulo OGB: quod erat primum. Praeterea quum angulus GFC aequetur angulo DFO ad verticem opposito (*corol. II. theor. I.*); erunt etiam aequales anguli BGF, GFC: quod erat secundum. Tandem quum anguli OFD, GFD aequentur duobus rectis (*theor. I.*) aequales itidem erunt duobus rectis DFG, FGB; quod erat tertium.

Versa vice si angulus externus OFD aequalis sit interno et opposito FGB, erit eadem inclinatio rectarum CD, AB ad rectam EO; ac proinde rectae illae parallelae sunt inter se. Rursus si aequales sint anguli alterni BGF, GFC; vel si duobus rectis simul aequales sint interni ad eamdem partem positi BGF, GFD; angulus externus DFO semper aequalis erit angulo interno et opposito BGF; ac proinde rectae AB, CD erunt parallelae. Itaque ex ipsa parallelismi notione facile colliguntur tres primariae parallelarum adfectiones, necessario nexu inter se coniunctae ita, ut ex una qualibet inferre liceat, rectas illas esse parallelas. Porro in demonstrandis proprietatibus illis nimis laborare videntur quidam geometrae.

Fig. 3

Corol. I. Si duae rectae AB, HK parallelae sint eidem rectae CD, erunt etiam inter se parallelae. Etenim inclinatio rectarum KH, BA ad rectam EO eadem erit, ac inclinatio rectae CD ad eamdem.

Corol. II. Si per datum punctum F ducere oporteat rectam CD parallelam rectae KH; ex quolibet huius puncto O ducatur recta GFO, et fiat angulus GFD aequalis angulo KOF, descriptis nempe ex punctis O, F, tamquam centris, et eodem radio arcubus aequalibus FM, GN; erit recta FD parallela ipsi KO.

CAPVT II.

De linearum rectarum respectu circuli positione.

THEOREMA I.

DVCTA RECTA FM, AD CIRCVMFERENTIAM VTRIQVE TERMINATA, QVAE CHORDA DICITVR, RECTA EP EX CENTRO CIRCVLI AD 4.

CHORDAM PERPENDICVLARITER DVCTA, EAMDEM SECAT IN DVAS PARTES AEQVALES.

Quum enim recta EP e centro ducatur; punctum E aequaliter distat a punctis extremis chordae F et M (*ex def. VII. proem.*). Praeterea quum recta EP sit perpendicularis ad chordam, singula alia puncta aequalem habent ab iisdem extremis distantiam (*corol. III. theor. I. cap. I.*). Quare punctum P aequaliter etiam distat a punctis F et M; *adeoque in eo puncto chorda* FM *in duas aequales partes secatur.*

Et versa vice recta quaelibet EP per centrum transiens, et chordam FM aequaliter dividens, eam quoque perpendicularis secat. Etenim quum recta EP chordam dividat aequaliter, punctum P aequaliter distat ab extremis F et M. Quia vero recta EP transit etiam per centrum; punctum E aequaliter distat ab extremis F et M. Quare puncta P et E aequaliter distat a punctis F et M; ac proinde EP perpendicularis est ad FM (*corol. III. theor. I. cap. I.*).

Rursus si recta EP perpendicularis sit ad chordam, eamque aequaliter dividat, recta illa transit per centrum. Quum enim chordam dividat aequaliter; punctum P aequaliter distat ab extremis F et M. Praeterea quum sit perpendicularis, singula illius puncta aequaliter etiam distant a punctis F et M. Erit ergo centrum E huius perpendicularis punctum aliquod.

THEOREMA II.

SI RECTA EH TRANSIENS PER CENTRVM DIVIDAT AEQVALITER CHORDAM FM, AEQVALITER QVOQVE DIVIDET ARCVM FHM.

Etenim quum singula puncta rectae EH aequaliter distent a punctis F et M; aequalis erit puncti H ac extremis F et M distantia. Iam si semicirculus GMH semicirculo GFH imponatur, congruent *duo semicirculi*, *adeoque et semiperipheria* GMH *congruet cum semiperipheria* GFH, et punctum M cum puncto F, *igitur arcus* MH *aequalis erit arcui* FH. *Deinde* ob punctum H commune congruent et chordae HM, FH, *quae sunt punctorum F et M a puncto H distantiae.*

Corol. I. In eodem circulo vel in circulis aequalibus, chordae aequales aequalibus arcubus respondent; inaequales autem, arcubus inaequalibus. Praeterea chordae aequales aequaliter distant a centro, chordae autem inaequales distant inaequaliter. Quod evidens est, ex *superimpositionis* principio. Nam chorda aequalis cum aequali chorda semper congruet, nec cum chorda inaequali congruere umquam poterit.

Corol. II. In eodem semicirculo vel in semicirculis aequalibus, quo maiores sunt vel minores arcus, eo maiores vel minores sunt chordae, et centro magis vel minus proximae. Vice versa quo maiores sunt vel minores chordae, et centro magis vel minus proximae, eo etiam maiores sunt vel minores arcus subtensi.

Fig. *Corol. III.* Ducta chorda FM diametro AB parallela intercipit aequales arcus AF et BM. Etenim, ceteris manentibus ut antea, arcus AH = arcui BH, et arcus FH = arcui HM: quare demtis arcubus aequalibus, remanet AF = BM. Evidens est eamdem esse demonstrationem, si parallela NQ ad oppositas diametri partes iaceat; erit nempe arcus FN arcui MQ.

Defin. Si ponatur, rectam NQ motu sibi semper parallelo a centro recedere, donec puncta duo N et Q coëant in G; chorda NQ abit in *tangentem*, quae nempe circulum in unico puncto tangit; evidens autem est, in hoc etiam casu esse GN=GQ. *Hoc est, chorda tangenti parallela intercipit arcus hinc et inde aequales.*

PROBLEMA I.

Ex corollariis praecedentibus patet, qua
10. ratione per tria data puncta circulus describi possit.

Dummodo tamen puncta illa in eadem recta non iaceant. Agantur rectae duae AB, BC, quae iungant tria puncta data A, B, C, hae erunt chordae circuli quaesiti. Quare ductis perpendicularibus DE, FG, quae chordas dividant aequaliter, utraque perpendicularis transit per centrum H; quod proinde erit in communi utriusque perpendicularis intersectione. *Itaque ex H tamquam centro et distantia ex eo ad quodlibet datum punctum, tamquam radio, describatur circulus, qui per tria data puncta transibit.* Simili ratione, dato circuli arcu, centrum invenitur, totaque circumferentia describitur.

Corol. Hinc arcus circuli datus in duos aequales arcus dividi potest. Ducatur enim chorda, arcum datum subtendens, haecque aequaliter per rectam perpendicularem dividatur; eadem perpendicularis etiam angulum, quem arcus metitur, aequaliter in duas partes dividet.

Schol. Ex hoc corollario patet, facile dividi posse angulum quemlibet in partes 2, 4, 8, 16, 32, et ita deinceps, secundum terminos progressionis geometriae duplae. Sed per geometriam elementarem angulos in tres partes aequales dividi non potest. Atque haec est anguli *trisectio* a geometris per *circinum* et *regulam*, ut dicunt, hoc est, per lineae rectae et circuli constructionem frustra quaesita. Demonstrant enim geometrae, problema illud ad tertii gradus aequationem necessario pertinere, quae quidem aequationes per solum circulum construi non possunt. Neque ob eamdem rationem per sola geometriae elementa angulus dividi potest in partes 5, 6, 7, 9, cet. Talis enim divisio pro diverso partium aequalium numero ad alteriores aequationem gradus adsurgit. Id autem, quamvis ad elementa non pertineat, breviter monuisse voluimus.

THEOREMA III.

Radius EG in puncto contactus G ad tangentem RT perpendicularis est.

Etenim quoniam tangens circulum in unico

Fig. 4. puncto tangit (*ex def. ad theor. II.*), radius EG minima est tangentis a centro distantia, *quodlibet enim aliud tangentis punctum extra circulum cadit, unde eius a centro* E *distantia maior erit quam radius, adeoque maior quam* EG. Proinde radius EG ad tangentem RT in puncto contactus G perpendicularis est (*corol. IV. theorema I cap. I.*)

Versa vice recta RT perpendicularis ad extremitatem radii G circulum tangit in unico puncto G. Etenim quum sit EG minima rectae RT a centro E distantia, alia quaelibet puncta rectae RT magis distant a centro, quam punctum G, ergo singula puncta praeter G extra circumferentiam iacent, ac proinde recta RT tangens est.

Corol. I. Recta RT circumferentiam tangit in unico puncto, quum ex centro E ad rectam datam unica perpendicularis duci possit (*corol. IV. theor. I. cap. I.*)

Corol. II. Hinc facile ducitur tangens ad punctum datum G. Ducto scilicet radio EG, erectaque in G perpendiculari RT.

Corol. III. Ad punctum datum in circumferentia unica tangens duci potest (*loc. cit.*); ac proinde si per punctum contactus agatur recta quaelibet, haec coincidit cum tangente, vel circumferentiam secat.

Corol. IV. Si duo circuli GNA, GOQ eamdem habeant tangentem; recta HG eidem perpendicularis per utriusque centrum, puta E et P, transibit. Iam vero si ducatur ES, iungaturque PS, quae producta secabit in O circulum GOQ, et

in R tangentem RT; erit semper in triangulo ESP latus SP minus duobus reliquis ES, EP (*ex def. lineae rectae*). Quare quum radii ES, EG aequales sint, erit recta PS minor quam PG, sive PO. Ergo quodlibet punctum S circuli GSF erit intra circulum GOQ; ac propterea illi circuli se mutuo contingent in unico puncto G, in quo scilicet rectam RT tangunt.

Schol. Quum inter tangentem et circulum nulla duci possit linea recta, angulus, quem arcus circuli efficit cum tangente, minor est quolibet rectilineo, licet hic in infinitum minuatur. Huius propositionis utilitas est in physica, ubi agitur de divisibilitate in infinitum. Id vero maximam admirationem concertationesque maximas excitavit: nempe angulus contactus, quem fecit arcus cum tangente, ab infinita circulorum serie in infinitas partes dividitur, licet ipse quovis angulo rectilineo minor sit. Huius autem paradoxi geometrici causam inde repetunt nonnulli, quod nempe anguli rectilinei natura diversa omnino sit a natura anguli curvilinei in puncto contactus. Etenim quemadmodum infinitae lineae numquam superficiem efficiunt, nec ulla inter has quantitates ratio potest adsignari, licet in partes infinitas dividi possint; ita etiam infiniti anguli contactus quovis rectilineo minores sunt, licet sint divisibiles in infinitum. Verum in hac lite geometrica *logomachia* aliqua latere videtur. Si anguli nomine intelligatur portio finita spatii curva et tangente comprehensi; nullum dubium est, quin spatium illud comparari possit cum portio-ne finita spatii rectarum duarum concursu intercepti. At si anguli rectilinei notio vulgaris adhibeatur, evidens est, notionem illam absolute consideratam angulo contactus convenire non posse, quum in hoc angulo latus unum sit curvilineum. Itaque huius anguli adferri debet propria definitio, atque hac definitione, quae arbitraria omnino est, semel constituta et explicata, iam nihil difficultatis superesse potest. Et re quidem ipsa de solo nomine heic litigari, demonstrat summa geometrarum consensio circa anguli huius proprietates. Sed quidquid sit, quicumque geometricarum demonstrationum vim percipiet, pro evidenti habebit, angulum contactus, et minorem esse quovis rectilineo, et in infinitos curvilineos dividi posse *.

* *Quaestionem de natura anguli contactus, quam innuimus adnotatione in prooemio geom. fusiori calamo persequitur heic Auctor. Sed ne adolescentes in re, quae magni momenti est in physicae studio, logomachia laborent; amabo, sequentia perpendant. Circulus est linea curva, cuius proinde partes infinitesimae sunt rectae. Est proinde in circulo recta quaedam infinite parva cum tangente omni ex parte congruens: huic circuli lineolae proxima est alia cum priori ad angulum iuncta quae proinde etiam angulum faciet cum tangente. Hic est igitur proprie angulus contactus, nempe, qui efformatur ab hac secunda lineola cum tangente: idem profecto exstitutus, si lineola isthaec protenderetur, usque dum foret finita. Quapropter angulus contactus proprie rectilineus est, non vero a rectilineo natura diversus, ut aliqui contendunt. Porro angulus ille est infinitesimus, seu quod idem est, habet pro mensura arcum infinitesimum secundi ordinis divisum per radiolum seu lineolam infinitesimam primi ordinis. Si crus anguli infinitesimum in infinitum protendatur, angulus non variabit. Tunc autem erit illius mensura arcus infinitesimus primi ordinis, divisus per lineam seu radium finitum, atque ita deinceps eo pacto, ut arcus uno infinitorum ordine inferior sit radio suo. Ex his autem nullo negotio intelligitur, angulum contactus, quum minor sit quolibet finito, posse esse maiorem minoremve; quantitas enim infinitessima intra ordinem suum augmenti et decrementi capax est; etsi ipsa nulla sit, si cum finita comparetur.*

THEOREMA IV.

(ANGULUS BAD TANGENTE BA, ET CHORDA AD COMPREHENSUS HABET PRO MENSURA DIMIDIUM ARCUM AFD.)

Etenim ducta per centum C diametro EG chordae AD parallela, ductaque alia diametro fF eidem chordae perpendiculari; rectus erit angulus BAC tangente et radio comprehensus (*theor. prae.*), itemque rectus est angulus FCG, ac proinde utriusque anguli mensura est arcus FG. Sed angulus BAD$=$ABC$-$DAC, *ergo quum angulus* DAC

Fig. *aequalis sit angulo* ACG *ob parallelas* AD, GE (theor. I. cap. I.) *erit etiam angulus* BAD=FCG —ACG=FCA. *Quare habebit pro mensura arcum* FA, *qui dimidius est integri arcus* AD (theor. II. cap. II.).

THEOREMA V.

6. (ANGVLVS CAD AD CIRCVMFERENTIAM HABET PRO MENSVRA DIMIDIVM ARCVM CD LATERIBVS AC ET AD INTERCEPTVM.)

Etenim ex anguli vertice A ducatur tangens EB. Summa trium angulorum BAC+CAD+DAE=180° (*theor. I. cap. I.*) $=\frac{1}{2}AC+\frac{1}{2}CD+\frac{1}{2}DA$. Sed angulum BAC metitur $\frac{1}{2}$ AC, et angulum EAD metitur $\frac{1}{2}$ AD (*ex theor. praeced.*) ergo angu-
A lus CBD metietur etiam $\frac{1}{2}$ CD.

Corol. I. Angulus DFC ad centrum duplus est anguli DAC ad circumferentiam eodem arcu CD subtensi. *Etenim illius mensura dupla est, seu integer arcus* CD.

Corol. II. Angulus rectus, *cuius vertex est* in circumferentia circuli, semicircumferentiam lateribus suis comprehendit, totaque diametro subtenditur. Angulus acutus arcum semicircumferentia minorem, obtusus autem maiorem intercipit: uterque chorda subtenditur. *Atque versa vice: angulus, cuius vertix est in circumferentia circuli rectus est, si eius crura semicircumferentiam comprehendant, seu diametro subtendantur: acutus, si arcum semiperipheria minorem, et obtúsus, si*

semicircumferentia maiorem comprehendant. Fig.

Corol. III. Angulus BAD vel intra vel extra 7.
circulum pro mensura habet $\frac{1}{2}BD+\frac{1}{2}CE$ pro an- 19.
gulo intra circulum, vel $\frac{1}{2}BD-\frac{1}{2}EC$ pro angulo extra illum. Per E agatur chorda EF rectae AD parallela; erit angulus BEF=BAD (ob parallelas). Sed mensura anguli BEF est $\frac{1}{2}$BF, et $\frac{1}{2}BF=\frac{1}{2}BD+\frac{1}{2}DF$. (*In angulo intra circulum* (fig. 7.)
B *et* $\frac{1}{2}BF=\frac{1}{2}BD-\frac{1}{2}DF$, *in angulo extra circulum* (fig. 19.) et DF=CE (*cor. III. theor. II.*). Ergo $\frac{1}{2}BF=\frac{1}{2}BD+\frac{1}{2}CE$. (*In angulo intra circulum, et* $\frac{1}{2}BF=\frac{1}{2}BD-\frac{1}{2}CE$ *in angulo, cuius vertex extra circulum cadat*).

Corol. IV. Angulus *b*AD tangente A*b* et se- 19.
cante AD interceptus $=\frac{1}{2}Db-\frac{1}{2}bC$. Si enim circa punctum A revolvi intelligatur recta AB, donec tangens evadat in *b*, puncta *b* et B convenient in *b*. Simili ratione angulus *d*A*b* inter duas tangentes A*d* et A*b* comprehensus pro mensura habet $\frac{1}{2}dFb-\frac{1}{2}dCb$. *Itaque eadem omnino demonstratio in his casibus locum tenet, quae in corollario praecedenti.*

CAPVT III.

De lineis rectis, quae spatium claudunt, seu de figurarum rectilinearum proprietatibus.

THEOREMA I.

(IN TRIANGVLO QVOLIBET SVMMA TRIVM ANGVLORVM AEQVALIS EST DVOBVS RECTIS.)

Fig. *aequalis sit angulo* ACG *ob parallelas* AD, GE (theor. I. cap. I.) *erit etiam angulus* BAD=FCG —ACG=FCA. *Quare habebit pro mensura arcum* FA, *qui dimidius est integri arcus* AD (theor. II. cap. II.).

THEOREMA V.

6. (ANGVLVS CAD AD CIRCVMFERENTIAM HABET PRO MENSVRA DIMIDIVM ARCVM CD LATERIBVS AC ET AD INTERCEPTVM.)

Etenim ex anguli vertice A ducatur tangens EB. Summa trium angulorum BAC+CAD+DAE=180° (*theor. I. cap. I.*) $= \frac{1}{2}$AC $+ \frac{1}{2}$CD $+ \frac{1}{2}$DA. Sed angulum BAC metitur $\frac{1}{2}$ AC, et angulum EAD metitur $\frac{1}{2}$ AD (*ex theor. praeced.*) ergo angulus CBD metietur etiam $\frac{1}{2}$ CD.

Corol. I. Angulus DFC ad centrum duplus est anguli DAC ad circumferentiam eodem arcu CD subtensi. *Etenim illius mensura dupla est, seu integer arcus* CD.

Corol. II. Angulus rectus, *cuius vertex est* in circumferentia circuli, semicircumferentiam lateribus suis comprehendit, totaque diametro subtenditur. Angulus acutus arcum semicircumferentia minorem, obtusus autem maiorem intercipit: uterque chorda subtenditur. *Atque versa vice: angulus, cuius vertix est in circumferentia circuli rectus est, si eius crura semicircumferentiam comprehendant, seu diametro subtendantur: acutus, si arcum semiperipheria minorem, et obtusus, si semicircumferentia maiorem comprehendant.* Fig.

Corol. III. Angulus BAD vel intra vel extra 7.
circulum pro mensura habet $\frac{1}{2}$BD $+ \frac{1}{2}$CE pro an- 19.
gulo intra circulum, vel $\frac{1}{2}$BD $- \frac{1}{2}$EC pro angulo extra illum. Per E agatur chorda EF rectae AD parallela; erit angulus BEF=BAD (ob parallelas). Sed mensura anguli BEF est $\frac{1}{2}$BF, et $\frac{1}{2}$BF $= \frac{1}{2}$BD $+ \frac{1}{2}$DF. (*In angulo intra circulum* (fig. 7.) *et* $\frac{1}{2}$BF $= \frac{1}{2}$BD $- \frac{1}{2}$DF, *in angulo extra circulum* (fig. 19.) et DF=CE (*cor. III. theor. II.*). Ergo $\frac{1}{2}$BF $= \frac{1}{2}$BD $+ \frac{1}{2}$CE. (*In angulo intra circulum, et* $\frac{1}{2}$BF $= \frac{1}{2}$BD $- \frac{1}{2}$CE *in angulo, cuius vertex extra circulum cadat*).

Corol. IV. Angulus *b*AD tangente A*b* et se- 19.
cante AD interceptus $= \frac{1}{2}$D*b* $- \frac{1}{2}$*b*C. Si enim circa punctum A revolvi intelligatur recta AB, donec tangens evadat in *b*, puncta *b* et B convenient in *b*. Simili ratione angulus *d*A*b* inter duas tangentes A*d* et A*b* comprehensus pro mensura habet $\frac{1}{2}$*d*F*b* $- \frac{1}{2}$*d*C*b*. *Itaque eadem omnino demonstratio in his casibus locum tenet, quae in corollario praecedenti.*

CAPVT III.

De lineis rectis, quae spatium claudunt, seu de figurarum rectilinearum proprietatibus.

THEOREMA I.

(IN TRIANGVLO QVOLIBET SVMMA TRIVM ANGVLORVM AEQVALIS EST DVOBVS RECTIS.)

Fig. Etenim per tres angulorum vertices describa-
10. tur circulus ABC (*probl. I. cap. II.*), triangulum erit inscriptum circulo, cuius chordae erunt tria latera AB, BC, CA. Anguli autem habent pro mensura dimidium arcum lateribus oppositis subtensum (*theor. V. cap. II.*). Quare trium angulorum summa aequalis est dimidiae trium arcuum summae, hoc est, dimidiae circumferentiae, seu 180°.

Corol. I. In triangulo unicus esse potest angulus rectus vel obtusus, reliqui duo sunt acuti. Quare in triangulo rectangulo angulus acutus est *complementum* alterius *acuti* ad rectum.

Corol. II. Datis duobus angulis in triangulo, datur et tertius, qui est differentia inter datam duorum angulorum summam, et 180°. Si autem unicus datus sit angulus, data est reliquorum duorum summa, quae est *complementum* ad duos rectos, et *supplementum* simpliciter appellari solet. *Complementum enim proprie dicitur ad unum rectum.*

15. *Corol. III.* In triangulo quolibet ABC producto latere CB in I, angulus externus ABI aequalis est duobus angulis internis oppositis ACB, CAB. Etenim summa anguli externi ABI, et interni contigui ABC aequalis est duobus rectis (*theor. I. cap. I.*); sed summa trium angulorum ACB, CAB, ABC aequalis etiam est duobus rectis; ergo angulus externus ABI aequalis est duobus internis oppositis ACB, et CAB, demto scilicet communi angulo ABC.

THEOREMA II.

(IN OMNI TRIANGVLO MAIVS LATVS OPPONITVR MAIORI ANGVLO, MINVS AVTEM MINORI: ET VICE VERSA ANGVLVS MAIOR MAIORI LATERI, ET MINOR MINORI OPPONITVR.)

Triangulum circulo inscribatur, maiorem angulum metitur arcus maior, et maiorem arcum subtendit maior chorda, et contra (*probl. I. cap. I.*).

Corol. I. In triangulo aequilatero singuli anguli aequales sunt inter se, et vice versa si tres anguli sunt aequales inter se, triangulum est aequilaterum. Inscripto enim, ut antea, triangulo in circulo, tria latera aequalia AB, BC, CA sunt 10.
tres aequales circuli chordae, quae proinde tres arcus aequales subtendent, ideoque et tres anguli aequales sunt (*theor. V. cap. II.*). Evidens autem est, unumquemque angulum esse tertiam partem 180°, hoc est, 60°.

Corol. II. In triangulo isoscele aequales sunt anguli lateribus aequalibus oppositi *seu anguli ad basim;* et contra si duo anguli *ad basim* in triangulo aequales sunt, triangulum est isosceles. Patet, ut in corol. praec.

THEOREMA III.

(SI IN DVOBVS TRIANGVLIS TRIA LATERA AEQVALIA SINT, TOTA TRIANGVLA ERVNT AEQVALIA.)

Sit AB = *ab*, AC = *ac*, BC = *bc*. Ex 17.

punctis A et B tamquam centris, describantur arcus FCG, DCE se invicem secantes in C. Triangulum *abc* ita imponatur triangulo ABC, ut punctum A conveniat cum *a*, punctum *b* cadet etiam in B, ob $AB = ab$, et ob $ac = AC$, recta *ac* terminabitur in aliquo puncto arcus FCG. Similiter ob $bc = BC$ recta *bc* terminabitur in aliquo puncto arcus DCE. Quia vero rectae *ac*, *bc in unico puncto coniungi debent; punctum istud necessario esse debet illud*, *quod sit utrique arcui commune*, *ac proinde* utraque terminabitur in puncto intersectionis C. Ergo *ac* congruet cum AC, *bc* cum BC totumque triangulum *abc* cum triangulo ABC.

Corol. I. Si sit angulus $A = a$, $B = b$, et latus $AB = ab$; erit triangulum $ABC =$ triangulo *abc*. Latus *ab* imponatur lateri AB; ob angulum $a = A$, et $b = B$, cadet latus *ac* in latus AC, et latus *bc* in latus *bc* in BC; quare latera duo *ac* et AC, *bc* et BC in eodem puncto iungentur, hoc est, *c* cadet in C, totumque triangulum *abc* congruet cum triangulo ABC, *ac proinde aequalia erunt.* (Latera duo *ac* et AC, *atque etiam bc et* BC, quae *opponuntur* angulis aequalibus *b* et B, *c* et C dicuntur *homologa.*) Quare aequalia sunt triangula duo, si anguli unius aequales sint angulis alterius; et praeterea si triangula latus unum aequale habeant.

Corol. II. Si duo triangula latera duo habuerint aequalia, et angulum his lateribus interceptum aequalem, tota triangula erunt aequalia. Sit $AC = ac$, $AB = ab$, et angulus $A = a$. Im-

ponatur latus AB lateri *ab*, et latus AC lateri *ac*: ob angulum A et *a* aequalem, latera illa congruent. Praeterea quum sit $AC = ac$, et $AB = ab$, punctum *c* cadet in C, et *b* in B; ac proinde *bc* congruet cum BC; *quum inter duo puncta aequaliter distantia non nisi unica et eadem linea cadere possit.* Fig.

THEOREMA IV.

(SI DVO TRIANGVLA INAEQVALIA AEQVALES HABENT ANGVLOS, PONATVRQVE ANGVLVS VNVS SVPRA ALTERVM AEQVALEM ANGVLVM, ITEMQVE SIBI MVTVO IMPONANVR DVO LATERA HOMOLOGA *, ERIT TERTIVM LATVS TERTIO LATERI PARALLELVM.)

Ponatur angulus D supra angulum aequalem B, 18.
latus DF supra latus homologum BC, et latus DE supra latus BA itidem homologum; erit latus FE, vel *fe* parallelum lateri AC. Quum enim angulus *fe*B aequalis sit angulo CAB, erit recta *fe* rectae AC parallela (*theor. II. cap. I.*). Si angu-

* *Latera homologa in triangulis dicuntur, quae aequalibus angulis ad se invicem opponuntur, sive ea fuerit aequalia sive inaequalia. Et universim dimensiones homologae in figuris appellantur eae, que sunt eiusdem denominationis, seu quae in cunctis eodem modo generantur. E. g. in circulo radii, diametri, circumferentiae, arcus eorumdem graduum, eorumque chordae.*

Fig. lus F poneretur supra angulum aequalem C; simili modo demonstratur, rectam DE esse rectae AB parallelam. Idem dicendum de rectis FD et BC.

Vice versa si per punctum *f* pro arbitrio sumtum in latere trianguli agatur recta *fe* parallela rectae AC, aequales sunt anguli B*fe*, BCA, et B*ef*, BAC (*loc. cit.*).

Definit. Triangula illa, quae angulos habent respective aequales, dicuntur *similia.*

THEOREMA V.

28. QVODLIBET POLYGONVM ABDEFGA RESOLVI POTEST IN TOT TRIANGVLA, QVOT SVNT POLYGONI LATERA.

Etenim ex puncto C intra polygonum ad singulos angulos duci possunt rectae. Evidens autem est, tot esse triangula ABC, BCD, DCE, ECF, FCG, GCA, quod polygoni latera AB, BD, DE, EF, GF, GA.

30. Alia ratione in triangula dividi possunt polygona: si nempe ex polygoni angulis A, C, D, atque F, H, I, ducantur tot rectae AC, AD vel FH, FI, quot duci possunt, quae tamen se mutuo non secent. Illae autem rectae, quae ab angulo polygoni ad alium ducuntur, *diagonales* vocantur. Patet, in hoc casu tot esse triangula quot latera polygoni, demtis duobus.

Corol. I. Summa angulorun polygoni aequalis est producto ex 180°. In numerum laterum, demtis 360°. Etenim anguli polygoni simul sumti Fig. aequales sunt angulis omnibus triangulorum, in quae reductum est polygonum, demtis angulis, quorum vertex est in C. Sed tot sunt 28. triangula, quot latera; quare summa omnium 29. angulorum polygoni aequalis est producto ex 180° in numerum laterum. *Ad vero anguli effformati circa centrum ad polygonum non pertinent. Est autem illorum summa* 360°. (theorem. I. cap. V.) *Quare ex priori summa haec subtrahi debet.* Ita si polygonum habuerit septem latera, summa angulorum est $= 180° \times 7 - 360° = 900°$.

Idem omnino valor angulorum polygoni eruitur, si polygonum per diagonales in triangula 30. *dividatur. Erit nempe praedicta summa aequalis producto* 180° *in numerum laterum, demtis duobus. Etenim polygonum per diagonales in tot triangula resolvitur, quot sunt latera, demtis duobus. Quare summa illa aequalis erit producto ex* 180° *in numerum triangulorum, hoc est, in numerum laterum polygoni, demtis duobus. Ita summa angulorum heptagoni erit*

$$= 180° \times \overline{7-2} = 180° \times 5 = 900°.$$

Corol. II. Polygonum quodlibet regulare circulo inscribi potest. Dividantur in duas partes aequales anguli polygoni per rectas AC, BC, DC, 28. EC cet. rectae illae se mutuo secabunt in C, et erunt inter se aequales. Etenim rectae AC et BC sibi occurrentes in puncto aliquo C, efficiunt triangulum ACB; itemque rectae BC et DC aliud

Fig. efformant triangulum BCD. Sed triangula illa sunt aequalia: nam quum anguli polygoni regularis aequales sint, et bifariam aequaliter dividantur, aequales sunt anguli CAB, CBA inter se, et angulis CBD, CDB. Praeterea aequalia sunt latera AB, BD; ergo isoscelia sunt et aequalia triangula ACB, BCD (*corol. II. theor. III.*). Quare AC = DC = BC; et propter latus commune BC punctum intersectionis C rectarum AC, BC cadet in punctum intersectionis C rectarum BC, DC. Idem valet de aliis rectis EC, FC. *Quare punctum commune intersectionis omnium linearum aequaliter distat a punctis* A, B, D, E, F, G; *adeoque ex eo puncto describi potest circulus, qui per alia omnia pertranseat. Punctum illud dicitur centrum polygoni.*

Corol. III. Radii e centro polygoni regularis ad angulos ducti, polygonum dividunt in tot
28. triangula isoscelia et aequalia, quot sunt polygoni latera; et quodlibet polygoni latus fit chorda arcus, qui aequalis est quotu ex 360 per nu-
29. merum laterum divisis. Ita latus decagoni est arcus $\frac{360°}{10} = 36°$.

28. *Corol. IV.* Latus hexagoni regularis ABDEFG circulo inscripti aequale est circuli radio. Nam si ex centro C in sex triangula dividatur hexagonum *erit angulus* ACB $= 60°$, *adeoque summa duorum reliquorum* ABC, CAB $= 120°$ (theor. I. cap. III.) *At vero triangula illa sunt isoscelia* (cor. praec.) *ac proinde anguli* ABC, CAB *aequa-*

les sunt (corol. II. theor. II. cap. III.) *Igitur* Fig.
quilibet angulus $= \frac{120°}{2} = 60°$. *Quare singuli anguli sunt* 60°, *et triangula sunt aequilatera* (corol. I. theor. II. cap. III.) *ac proinde* CA = AB.

Corol. V. Quodlibet polygonum regulare circulo circumscribi potest, hoc est, intra polygonum regulare describi potest circulus, qui singula tangat polygoni latera. Etenim quum latera polygoni regularis circulo inscripti totidem sint chordae aequales, chordae illae a centro aequaliter distant (*cor. I. theor. II. cap. II.*). Quare si ex centro C agantur perpendiculares CI, CK, 28.
hae chordas aequaliter divident, atque aequales erunt. Ergo per singulas perpendicularium extremitates describi poterit circulus, qui singula polygoni latera in puncto medio tanget (*corol. I. theor. III. cap. II.*).

Corol. VI. Hinc polygono regulari dato circulus circumscribi potest. Quaeratur polygoni centrum (*corol. II.*): quo invento, circulus facile ciscumscribitur. Item polygono regulari circulus facile inscribitur invento polygoni centro: ad latus aliquod demittatur perpendicularis, haec erit circuli radius.

Versa vice polygonum regulare circulo dato circumscribi potest. Dividantur 360° per duplum numerum laterum polygoni, sumtoque arcu iK, 28.
qui sit quoto aequalis, per extremitates K et i ducantur radii CK et Ci, agaturque recta indeterminata CB: ad punctum K erigatur perpen-

dicularis DKB, occurrens CB in puncto B: transferatur KB in KD; erit BD latus polygoni quaesiti. Simili modo inveniuntur alia latera. Vel etiam ratio CB describatur circulus, et per totam circumferentiam transferatur chorda DB, atque inscribatur polygonum DBAGFE, quod erit circulo dato circumscriptum, ut patet; quum per constructionem tot habeantur tangentes aequales, et aequaliter divisae in puncto contactus, quot sunt latera in polygoni quaesito.

Simili constructione, circulo dato polygonum regulare inscribitur. Dividatur numerus 360° per numerum laterum polygoni quaesiti: sumatur in circulo dato arcus huic quoto aequalis; chorda huius arcus erit latus polygoni: transferatur chorda illa per totam circumferentiam, habebitur polygonum quaesitum.

Heic autem diligenter observandum est, per geometriam elementarem circulo inscribi posse dumtaxat triangulum aequilaterum, quadratum, pentagonum, pentedecagonum, hoc est, figuram quindecim laterum, et polygona regularia, in quibus numerus laterum se habet ad praedicta in progressione geometrica dupla. Ita triangulum aequilaterum praebet polygona regularia laterum 6, 12, 24, 48 cet. quadratum praebet polygona laterum 8, 16, 32, 64 cet. Ex pentagono oriuntur polygona laterum 10, 20, 40, 80 cet. Tandem ex pentedecagono oriuntur polygona laterum 30, 60, 120, 240 cet. Alia polygona, ut heptagonum, enneagonum, endecagonum cet. describi non possunt geometrice, nisi per constructio-

nem aequationem, quae ad sublimiorem gradum adsurgunt.

Schol. Quum polygonum regulare circulo inscribi et circumscribi possit, quo maior est in polygono inscripto vel circumscripto laterum numerus, eo magis polygonum ad circulum accedit. Itaque augeatur numerus laterum polygoni in infinitum ita, ut differentia inter polygonum et circulum sit data quavis differentia minor; iam circulus considerari potest tamquam polygonum regulare, ex lateribus numero infinitis et infinite parvis compositum. Haec circuli consideratio pendet ex principio omnino evidenti. Si nempe duarum quantitatum A et B differentia sit qualibet adsignabili minor, quantitates illae velut aequales haberi debent. Etenim ponatur inter illas quantitates differentia aliqua data, iam quantitatum illarum differentia non est qualibet adsignabili minor, quod est contra hyp. Quantitas autem, quae ad aliam accedit pro differentia qualibet data minori, huius alterius quantitatis limes appellatur. Methodus autem illa vocatur methodus *exhaustionum*, seu *primarium* et *ultimarum* rationum. Hanc methodum, quam fusius explicabimus in prima parte physices, ubi sermo erit de extensionis divisibilitate, in proximo capite, quantum hactenus nobis satis est, breviter exponemus.

Fig.

CAPVT IV.

De linearum ratione, seu de lineis proportionalibus.

THEOREMA I.

21. In trianguLis similibus acb, ACB latera homologa sunt proportionalia.

Ponatur ab pars dimidia rectae AB; nempe sit Ab aequalis rectae ab, agaturque cb parallela CB, et cg parallela rectae AB; erit $cg = bA$. Quod evidens est ex linearum parallelismo. Ducta enim linea bg, erit ob angulos inter parallelas aequales, et ob latus communi bg, triangulum bcg aequale triangulo bgB et latus $cg = bB$ (*cor. I. theor. III. cap. praec.*). Ergo $cg = bB = Ab$. Praeterea triangulum Ccg aequale est triangulo cAb (*loc. cit.*). Ergo $Cc = Ac$, et $Cg = cb = gB$. Quare Ac, vel Cc erit pars dimidia rectae AC, sicut cb est pars dimidia rectae CB. *Erit igitur* $ac : AC = ab : AB$.

22. Si ab sit tertia vel quarta, aut quaelibet alia pars rectae AB, simili modo evidens est, rectas ac et cb esse tertiam, quartam cet. partem rectarum AC, CB. Etenim ex divisionum punctis b, f in recta AB ducantur bc, fh cet. rectae BC parallelae, et eadem ratiocinatione patet, triangula Acb, chg, hCi cet. aequalia esse *inter se, adeoque et aequalia triangulo acb. Igitur latus*

$Ac = ch = hC$, *atque etiam latus* $Ab = bf = fB$: *si igitur in triangulo abc latus ab sit tertia vel quarta, vel quaelibet pars lateris* AB, *etiam ac erit tertia vel quarta cet. pars lateris* AC. *Proindeque erit* $ab : AB = ac : AC$.

Si recta ab accurate non contineatur in AB, sed cum fractione aliqua, e. g. bis cum dimidio; simili ratione ac bis cum dimidio continebitur in AC, et bc in BC. Etenim factis duobus triangulis Acb, chg aequalibus triangulo acb, inter parallelas hf et CB construi poterit triangulum hCi, cuius latera erunt dimidia pars laterum trianguli cAb; quod est evidens, quum sit fB pars dimidia rectae Ab (*per hyp.*), et recta ih aequalis recta fB ob parallelas hf et CB. *Et generatim triangula quaelibet similia habent latera homologa proportionalia.*

Corol. Si in triangulo ACB *ducantur parallelae ad basim hi, em; numerus partium interceptarum a linea hi in lateribus* AC, CB, *erit, ut quilibet alius numerus partium inter duas parallelas hi, cm interceptarum, atque numerus partium erit etiam, ut latera trianguli. Hoc est* : $Ch : Ci = hc : im = CA : CB$. *Etenim* (ex demonstr.) $Ch : Ci = hc : im = cA : mB$. *Ergo* (§. v. cap. vi. arith. et alg.) $Ch + hc + cA : Ch = Ci + im + mB : Ci = hc : im$. *Sed quod idem est* $CA : CB = Ch : Ci = hc : im$. *Quare* CA *est ad* CB, *ut numerus quilibet partium interceptarum in* CA *ad numerum interceptarum partium in* CB.

Fig.

CAPVT IV.

De linearum ratione, seu de lineis proportionalibus.

THEOREMA I.

21. IN TRIANGVLIS SIMILIBVS acb, ACB LATERA HOMOLOGA SVNT PROPORTIONALIA.

Ponatur ab pars dimidia rectae AB; nempe sit Ab aequalis rectae ab, agaturque cb parallela CB, et cg parallela rectae AB; erit $cg = bA$. Quod evidens est ex linearum parallelismo. Ducta enim linea bg, erit ob angulos inter parallelas aequales, et ob latus communi bg, triangulum bcg aequale triangulo bgB et latus $cg = bB$ (*cor. I. theor. III. cap. praec.*). Ergo $cg = bB = Ab$. Praeterea triangulum Ccg aequale est triangulo cAb (*loc. cit.*). Ergo $Cc = Ac$, et $Cg = cb = gB$. Quare Ac, vel Cc erit pars dimidia rectae AC, sicut cb est pars dimidia rectae CB. *Erit igitur* $ac : AC = ab : AB$.

22. Si ab sit tertia vel quarta, aut quaelibet alia pars rectae AB, simili modo evidens est, rectas ac et cb esse tertiam, quartam cet. partem rectarum AC, CB. Etenim ex divisionum punctis b, f in recta AB ducantur bc, fh cet. rectae BC parallelae, et eadem ratiocinatione patet, triangula Acb, chg, hCi cet. aequalia esse *inter se, adeoque et aequalia triangulo acb. Igitur latus*

$Ac = ch = hC$, *atque etiam latus* $Ab = bf = fB$: *si igitur in triangulo abc latus ab sit tertia vel quarta, vel quaelibet pars lateris* AB, *etiam ac erit tertia vel quarta cet. pars lateris* AC. *Proindeque erit* $ab : AB = ac : AC$.

Si recta ab accurate non contineatur in AB, sed cum fractione aliqua, e. g. bis cum dimidio; simili ratione ac bis cum dimidio continebitur in AC, et bc in BC. Etenim factis duobus triangulis Acb, chg aequalibus triangulo acb, inter parallelas hf et CB construi poterit triangulum hCi, cuius latera erunt dimidia pars laterum trianguli cAb; quod est evidens, quum sit fB pars dimidia rectae Ab (*per hyp.*), et recta ih aequalis recta fB ob parallelas hf et CB. *Et generatim triangula quaelibet similia habent latera homologa proportionalia.*

Corol. Si in triangulo ACB *ducantur parallelae ad basim hi, em; numerus partium interceptarum a linea hi in lateribus* AC, CB, *erit, ut quilibet alius numerus partium inter duas parallelas hi, cm interceptarum, atque numerus partium erit etiam, ut latera trianguli. Hoc est* : $Ch : Ci = hc : im = CA : CB$. *Etenim* (ex demonstr.) $Ch : Ci = hc : im = cA : mB$. *Ergo* (§. V. cap. VI. arith. et alg.) $Ch + hc + cA : Ch = Ci + im + mB : Ci = hc : im$. *Sed quod idem est* $CA : CB = Ch : Ci = hc : im$. *Quare* CA *est ad* CB, *ut numerus quilibet partium interceptarum in* CA *ad numerum interceptarum partium in* CB.

THEOREMA II.

DVO TRIANGVLA, IN QVIBVS LATERA SVNT PROPORTIONALIA, AEQVIANGVLA SVNT.

18. Si ponatur AC : CB = EF : FD, et AC : AB = EF : ED, aequiangula erunt triangula ABC et EDF. Nam super EF construatur triangulum FGE triangulo ABC aequiangulum; facto scilicet angulo GEF = BAC, et angulo GFE = ACB, erit etiam tertius EGF aequalis ABC; indeque erit AC : BC = FE : FG: sed (*per hypoth.*) AC : BC = FE : FD; ac proinde FD = FG. Similiter ob triangula ABC, FGE similia, erit AC : AB = FE : EG : sed (*ex hyp.*) AC : AB = FE : ED; ergo FE : EG = FE : ED; ac proinde EG = ED. Quare triangula duo FED et FEG aequiangula sunt et aequalia, ob latus commune FE, et latera FD, FG, et EG, ED aequalia (*theor. III. cap. praeced.*). Sed (*per constr.*) triangulum FGE triangulo ABC est aequiangulum; ergo triangulum FED ipsi quoque est aequiangulum.

Corol. I. Si in triangulis ABC et EDF sit angulus D = B, et praeterea DE : DF = BA : BC; erit triangulum EDF triangulo ABC aequiangulum. Nam super AB capiatur B*e* = DE, ducaturque *ec* parallela rectae AC; triangula ABC et *e*B*c* sunt aequiangula, quum ob parallelam *ec* angulus *ce*B = A, *ec*B = C, et ob angulum B communem. Ergo B*e* : B*c* = BA : BC. Sed (*ex hyp.*) DE : DF = BA : BC, ergo B*e* : B*c* = DE : DF;

at B*e* = DE; ergo B*c* = DF. Ac proinde duo triangula B*ec*, DEF sunt aequalia et similia. Sed B*ec* est triangulo BAC aequiangulum, ergo triangulum EDF est aequiangulum triangulo ABC, ac proinde generatim triangula, quorum latera duo circa aequalem angulum sunt proportionalia, sunt aequiangula.

Corol. II. Si recta AD angulum BAC bifariam 23.
et aequaliter dividat in triangulo BAC; eadem recta latus oppositum BC dividit quoque in duas partes BD et DC lateribus AB et AC proportionales. Etenim producta recta CA in E, per punctum B agatur BE rectae AD parallela: triangula ECB, DAC erunt similia (*def. ad theor. IV. cap. III.*) ac proinde BD : DC = AE : AC (*corolar. ad theor. I.*); sed ob parallelas angulus BEA = DAC = DAB = ABE; ergo triangulum BAE est isosceles (*cor. II. theor. II. cap. praec.*): quare AE = AB: ideoque BD : DC = AB : AC.

Corol. III. Si ex angulo recto A trianguli rectanguli BAC demittatur perpendicularis AD in basim BC, quae angulo recto imminet, et *hypothenusa* dicitur, haec divídet triangulum in duo alia triangula BAD, DAC inter se, et triangulo BAC similia. Et quidem triangula BDA, DAC praeter angulum rectum habent quoque cum triangulo BAC angulum communem, *scilicet triangulum* ABD *et angulum* B, *triangulum* ADC *angulum* C. Ac proinde similia sunt inter se, et toti triangulo (*def. ad theor. IV. cap. III.*). Hinc BD : DA = DA : DC et BD : BA = BA : BC, ac tandem DC : CA = CA : CB.

Corol. IV. Dum fit $BD : BA = BA : BC$, erit $BA^2 = BD \times BC$ (ob productum mediorum aequale producto extremorum). Similiter quum sit $DC : AC = AC : CB$, erit $AC^2 = DC \times BC$. Ergo $BA^2 + AC^2 = BD \times BC + DC \times BC = \overline{BD + DC} \times BC = BC \times BC = BC^2$. Quare quadratum hypothenusae in triangulo rectangulo aequale est quadratis laterum, seu cathetorum.

Corol. V. Diagonalis quadrati est lateri *incommensurabilis.* Quum enim diagonalis sit hypothenusa trianguli rectanguli, cuius latera sunt aequalia, quadratum diagonalis aequale est duplo quadrato lateris. Sed numeris exprimi non potest radix quadrati dupli, seu radix 2 *ex demonstratis in arithmetica*). Ergo si latus quadrati numeris exprimatur, exprimi non poterit diagonalis, et contra *.

24. *Corol. VI.* Perpendicularis EO ex circumferentiae circuli puncto quolibet in diametrum demissa, est media proportionalis inter duo segmenta CO et OL. Nam si ex puncto E ad diametri extremitates agantur rectae EC, EL; triangulum CEL est rectangulum in E, ac proinde (*corol. II.*) $CO : EO = EO : OL$; et $EO^2 = CO \times OL$. Recta perpendicularis EO, dici solet *ordinata; abscissa* autem vocatur pars CO diametri inter perpendicularem et circumferentiam comprehensa.

* *Conferantur, quae in arithmetica de incommensurabilibus dicta sunt, et observabitur auxilium, quod geometria praestat arithmeticae in exhibendis veris quantitatibus, quas, utpote surdas seu irrationales, haec numquam exprimere valet.*

THEOREMA III.

SI DUCANTUR IN CIRCULO CHORDAE DUAE BC ET DA, SE MUTUO SECANTES IN E, CHORDARUM SEGMENTA ERUNT RECIPROCE PROPORTIONALIA. 26.

Si enim ducantur BA et CD, triangula BEA et DEC sunt similia, ob angulos in E aequales, atque ob angulos C, A, et B, D iisdem arcubus subtensos. Quare $AE : BE = CE : DE$ (*theor. I.*).

Cor. I. Si duae lineae EB, EC ex eodem puncto extra circulum ductae, ad superficiem concavam terminentur, partes externae EA, ED rectis integris EB, EC sunt reciproce proportionales. Ductis enim chordis AC, DB, triangula EBD, EAC similia sunt ob angulum E communem, et angulos B, C eodem arcu AD subtensos; ergo $EA : ED = EC : EB$ (*theor. I.*). 25.

Corol. II. Si recta EB sit secans, altera autem E*d* tangens; erit $EB : Ed = Ed : EA$. Nam ductis *d*B, *d*A, similia erunt triangula E*d*B, E*d*A ob angulum E communem, et angulos EB*d*, A*d*E aequales, quorum communis mensura est dimidius arcus A*d* (*theor. IV. cap. II.*). Ergo angulus $dAE = EdB$, ac proinde $EB : Ed = Ed : EA$, hoc est, tangens est media proportionalis inter

Fig. rectam totam EB, et partem externam EA.

Corol. III. Hinc facile dividitur recta data bifariam, ea conditione, ut maior pars sit media proportionalis inter totam rectam, et eiusdem
27. rectae partem alteram. Nam super datae rectae AB extremitatem erigatur perpendicularis AE dimidiae AB aequalis, et centro E, radio AE describatus circulus DAF. Deinde per B et E agatur recta BF, et centro B, radio BD describatur arcus DC; hic occurret rectae AC in puncto quaesito. Etenim ob tangentem BA erit $BF : BA = BA : BD$; ac proinde $BF - BA : BA = BA - BD : BD$ (§. *V. cap. VI. alg.*) Sed $BF - BA = BD = BC$; quum sit $FD = BA$, utpote duplae ipsius EA, quae est dimidia rectae AB. Simili modo $BA - BD = AC$; ergo substitutione facta, $BC : BA = AC : BC$, vel $BA : BC = BC : AC$. In hoc corollario continetur problema, quod his verbis proponere solent geometrae: ***rectam dividere in media et extrema ratione.***

Alia etiam problemata proponi solent, qualia sunt: ***tribus datis rectis, quartam proportionalem invenire. Inter duas rectas, invenire mediam proportionalem.*** Sed haec manifesta sunt ex praecedentibus.

THEOREMA IV.

SI DVAE FIGVRAE SIMILES IN TRIANGVLA VTCVMQVE DIVIDANTVR PER DIAGONALES EX VERTICE ANGVLORVM AEQVALIVM DVCTAS, TRIANGVLA HOMOLOGA ERVNT SIMILIA.

Etenim sint duo polygona ABCDE et FGHIK, Fig.
in quibus angulus $A = F$, $B = G$, $C = H$, 30.
$D = I$, $E = K$, sitque praeterea $AB : FG = BC : GH = CD : HI = DE : IK = EA : KF$. Ductis diagonalibus AC, AD, FH, FI; similia erunt triangula ABC, FGH, et ACD, FHI, atque ADE, FIK. Nam quum anguli B et G, E et K aequales sint, et lateribus proportionalibus comprehensi, similia erunt triangula ABC, FGH, et ADE, FIK (*corol. I. theor. II. cap. IV.*). Itaque angulus $BAC = GFH$, $DAE = IFK$. Ergo $BAE - BAC - DAE = CAD = GFK - GFH - IFK = HFI$. Igitur angulus CAD = angulo HFI. Simili modo ostenditur, angulus ACD, FHI, et ADC, FIH aequales esse. Quare triangula ACD et FHI sunt aequiangula.

Versa vice duae figurae quaelibet similes sunt, si in triangula aequiangulae resolvi possint. Nam ob angulos aequales in triangulis aequiangulis aequales sunt anguli in unaquaque figura. Quare quum latera figurarum sint triangulorum aequiangulorum latera proportionalia, figurae similes sunt.

Corol. IV. Si dividatur BC in L, latusque homologum GH in M in eadem ratione; ita ut sit $BC : GH = LC : MH$; deinde si ducantur rectae duae ad arbitrium LN et MO, quae angulos CLN HMO aequales efficiant, vel quae dividant latera homologa ED et KI in eadem ratione; ita ut sit $ED : KI = DN : IO$; erit $LN : MO = CD : HI = BC : GH$ cet. Nam ductis NC et OH, triangula NCD, OHI similia sunt ob angulos D, I aequales, lateribus proportionalibus ND, DC, et

OI, IH comprehensos. Quare CD : HI = CN : HO, et angulus DCN = IHO. Si ergo anguli illi auferantur ex angulis aequalibus DCL, IHM, remanebunt aequales anguli NCL, OHM; ac proinde triangula NCL; OHM similia sunt: ideoque LN : MO = LC : MH = BC : GH = CD : HI cet. Quare generatim si in duobus polygonis similibus ducantur lineae, quae dividant latera homologa vel angulos aequales in eadem ratione, lineae illae erunt proportionales inter se, atque etiam eorumdem polygonorum lateribus quibuscumque homologis.

Schol. Linearum rationem iam consideravimus in quantitatibus finitis. Superest, ut pauca, quantum nobis necesse est, explicemus de ratione quantitatum, quas *infinite magnas* et *infinite parvas* appellant. Et in primis quidem observandum est, nullam quantitatem in se spectatam, et sine nostro cogitandi modo aut infinite parvam esse, aut infinite magnam, sed magnitudo quaelibet in se determinata est. Et quidem data quavis magnitudine, utcumque parva vel utcumque magna, alia semper minor in primo casu, et alia semper maior in casu altero haberi potest. Nobis enim licet quantitatem exiguam vel ingentem considerare, primamque minuere, alteram augere, abstrahendo animum a quovis limite determinato. Priorem quantitatem dicimus *infinitesimam* vel *infinite parvam;* quantitatem alteram appellamus *infinitam* vel *infinite magnam.* Rationem, quam duae quantitates finitae habent ad se invicem *rationem finitam* vocamus. Patet autem, diversos esse infinitorum et infinitesimorum ordines. Licet

enim magnitudo aliqua concipiatur infinita vel infinitesima; semper tamen quantitas manet, ac proinde ultra quoscumque limites augeri potest et minui. Si quantitatem aliquam finitam ultra quoscumque limites minui concipiamus, hanc dicimus infinitesimam *ordinis primi.* Si autem quantitas alia ad hanc infinitesimam habeat rationem, quam ipsa infinitesima habet ad quantitatem finitam, dicimus infinitesimam *secundi ordinis*, et ita deinceps. Vice versa, si quaedam quantitas sit ad infinitam quantitatem, ut quantitas finita ad infinitesimam ordinis primi, eam dicimus infinitam *ordinis primi;* et ita deinceps superiores infinitorum ordines intelligere licet. Exemplum sit in circulo, cuius diameter est ad chordam, ut est chorda ipsa ad abscissam, ac proinde si fingatur chorda infinite parva primi ordinis, erit abscissa infinitesima ordinis secundi.

Ex his patet, calculo subiici posse quantitates infinitas et infinitesimas. Infinitum hac nota exprimi solet ∞. Quare numerorum series infinita hoc modo repraesentari potest $0, 1, 2, 3, 4, 5 \ldots \infty$. Pari modo quantitas quaelibet finita concipi potest divisa in partes perpetuo decrescentes, donec perveniatur ad quantitatem infinitesimam. Talis est series, $\frac{1}{1} . \frac{1}{2} . \frac{1}{3} . \frac{1}{4} . \frac{1}{5} \ldots \frac{1}{\infty}$.

Evidens autem est, quantitatem infinitam finitae quantitates additione vel subtractione maiorem vel minorem non fieri; quum infinita quantitas ad quantitatem infinitam rationem habeat qualibet data minorem. Simili ratione quantitas infinite parva quantitatem finitam augere vel minuere non potest. Itaque $\infty = \infty \pm 1$, et $1 = 1 \pm \frac{1}{\infty}$. Eodem modo si diversi infinitorum ordines per diversos exponentes designantur, erit $\infty^2 \pm a = \infty^2$, et $\frac{1}{\infty} \pm \frac{1}{\infty^2} = \frac{1}{\infty}$. Verum si quantitates eiusdem generis considerentur sive infinitae sive infinitesimae, ex notione quantitatum illarum manifestum est, eas non secus ac quantitates finitas tractari debere. Probe enim recordandum est, quantitates illas non absolute, sed relative dumtaxat et secundum nostrum concipiendi modum esse infinitas vel infinitesimas. Quare $\infty + \infty = 2\infty$; $\frac{1}{\infty} \times 3\infty = \frac{3\infty}{\infty} = 3$; $\frac{2\infty^2}{\infty} : \frac{2}{\infty} = \infty \times \infty = \infty^2$; $\frac{\infty^3}{\infty^2} = \infty$; $\frac{\infty^2}{\infty^3} = \frac{1}{\infty}$; $\frac{1}{\infty} \times \frac{1}{\infty} = \frac{1}{\infty^2}$; $\frac{1}{\infty} : \frac{1}{\infty^2} = \frac{\infty^2}{\infty} = \infty$.

Ex his multa colligere licet.

(Quantitates infinitae vel infinitesimae eiusdem ordinis adduntur vel subtrahuntur non secus, ac vulgares quantitates. Quantitas infinita primi ordinis per quantitatem infinitam eiusdem ordinis multiplicata producit quantitatem infinitam ordinis secundi. At quantitas infinita ordinis cuiuscumque per quantitatem finitam multiplicata producit quantitatem infinitam eiusdem ordinis. Et generatim quantitas infinita cuiusvis ordinis per aliam quantitatem ordinis cuiuscumque multiplicata evehitur ad illum infiniti gradum, cuius exponens est ipsa exponentium summa. Contraria autem ratione, si quantitas infinita ordinis cuiuscumque per quantitatem infinitam ordinis cuiuslibet dividatur, habetur quantitas, cuius gradus designatur per ipsam exponentium differentiam. At si quantitas infinitessima cuiuslibet gradus per quantitatem infinitessimam ordinis cuiuscumque multiplicetur aut dividatur; in primo casu quantitas infinitessima ad eum deprimetur gradum, qui per exponentium summam exhibetur: in casu autem altero quantitas infinitessima ad eum gradum evehitur, qui per ipsam exponentium differentiam repraesentatur ita, ut quantitas infinitessima per divisionem fieri possit finita, atque etiam infinita. Haec pauca dicta sint *de primarum et ultimarum rationum* methodo, quam quidem ad methodum *exhaustionum* revocari posse intelligitur.)

APPENDIX.

De proportionum usu in triangulorum resolutione, sive de Trigonometria.

Ex linearum proportione tota pendet *trigonometria*, quae est ars resolvendi triangula. In trianquantitatem finitam augere vel minuere non potest. Itaque $\infty = \infty \pm 1$, et $1 = 1 \pm \frac{1}{\infty}$. Eodem modo si diversi infinitorum ordines per diversos exponentes designantur, erit $\infty^2 \pm a = \infty^2$, et $\frac{1}{\infty} + \frac{1}{\infty^2} = \frac{1}{\infty}$. Verum si quantitates eiusdem generis considerentur sive infinitae sive infinitesimae, ex notione quantitatum illarum manifestum est, eas non secus ac quantitates finitas tractari debere. Probe enim recordandum est, quantitates illas non absolute, sed relative dumtaxat et secundum nostrum concipiendi modum esse infinitas vel infinitesimas. Quare $\infty + \infty = 2\infty$; $\frac{1}{\infty} \times 3\infty = \frac{3\infty}{\infty} = 3$; $\frac{2\infty^2}{\infty} : \frac{2}{\infty} = \infty \times \infty = \infty^2$; $\frac{\infty^3}{\infty^2} = \infty$; $\frac{\infty^2}{\infty^3} = \frac{1}{\infty}$; $\frac{1}{\infty} \times \frac{1}{\infty} = \frac{1}{\infty^2}$; $\frac{1}{\infty} : \frac{1}{\infty^2} = \frac{\infty^2}{\infty} = \infty$.

Ex his multa colligere licet.

(Quantitates infinitae vel infinitesimae eiusdem ordinis adduntur vel subtrahuntur non secus, ac vulgares quantitates. Quantitas infinita primi ordinis per quantitatem infinitam eiusdem ordinis multiplicata producit quantitatem infinitam ordinis secundi. At quantitas infinita ordinis cuiuscumque per quantitatem finitam multiplicata producit quantitatem infinitam eiusdem ordinis. Et generatim quantitas infinita cuiusvis ordinis per aliam quantitatem ordinis cuiuscumque multiplicata evehitur ad illum infiniti gradum, cuius exponens est ipsa exponentium summa. Contraria autem ratione, si quantitas infinita ordinis cuiuscumque per quantitatem infinitam ordinis cuiuslibet dividatur, habetur quantitas, cuius gradus designatur per ipsam exponentium differentiam. At si quantitas infinitessima cuiuslibet gradus per quantitatem infinitessimam ordinis cuiuscumque multiplicetur aut dividatur; in primo casu quantitas infinitessima ad eum deprimetur gradum, qui per exponentium summam exhibetur: in casu autem altero quantitas infinitessima ad eum gradum evehitur, qui per ipsam exponentium differentiam repraesentatur ita, ut quantitas infinitessima per divisionem fieri possit finita, atque etiam infinita. Haec pauca dicta sint *de primarum et ultimarum rationum* methodo, quam quidem ad methodum *exhaustionum* revocari posse intelligitur.)

APPENDIX.

De proportionum usu in triangulorum resolutione, sive de Trigonometria.

Ex linearum proportione tota pendet *trigonometria*, quae est ars resolvendi triangula. In trian-

Fig. gulo autem sex partes considerari possunt, nempe tres anguli, et tria latera. Huc autem refertur trigonometriae praxis, ut datis tribus ex sex partibus trianguli, *quarum saltem una latus sit*, partes reliquae inveniantur: ac proinde tres partes datae constituere debent tres primos proportionis terminos, et terminus quartus erit pars quaesita. Verum quia latera trianguli expressam rationem non habent cum angulis, quorum mensura sunt arcus circuli; angulis vel arcubus circuli substituuntur lineae rectae, quae arcus illos exhibeant, et trianguli lateribus proportionales sint. Harum linearum definitiones adferemus, et proprietates demonstrabimus.

31. *Def. I.* Sit angulus quibus ACB, ex cuius vertice C, tamquam centro: et radio ad arbitrium sumto describatur circulus AHaG Producatur AC in *a*, erigaturque in C perpendicularis CH. Evidens est, angulum BCH vel arcum HB esse *complementum* anguli ACB vel arcus AB. Angulus BC*a* vel arcus BH*a* est *supplementum* anguli ACB vel arcus AB, et vice versa BA est *complementum* ipsius HB, et *supplementum* ipsius *a*HB.

Def. II. Recta BD ex radii extremitate B ad radium CA perpendiculariter ducta dicitur *sinus* arcus AB vel anguli ACB.

Def. III. Recta AE ex radii extremitate A perpendiculariter ducta, et radio alteri producto occurrens in E, vocatur *tangens* arcus AB; recta autem CE eiusdem arcus *secans* appellatur.

Def. IV. Pars AD radii inter arcum et sinum comprehensa, dicitur *sinus versus* arcus AB. Perpendicularis BI dicitur *sinus complementi* arcus AB. Perpendicularis HK *tangens complementi*, et HI *sinus versus complementi* arcus AB.

Schol. Compendii ergo sinus complementi, tangens complementi cet. dicuntur *cosinus*, *cotangens*, *cosecans*, *cosinus versus*. Brevitatis causa scribuntur R pro radio: sin. pro sinu: tang. pro tangente: sin. v. pro sinu verso.

Corol. I. Ex his definitionibus multa colliguntur. Nempe sinus, cosinus, tangens, cotangens cet. anguli obtusi BC*a* sunt etiam sinus, cosinus cet. anguli acuti ACB, qui est anguli obtusi supplementum. Nam ex radii alterutrius extremitatibus B vel *a* demitti non potest perpendicularis, quae non cadat in radium alterum productum. Tales sunt perpendiculares DB, *ad*. Similiter tangens alia esse non potest quam *ae*; sed ob triangula *aCd*, BCD, et C*ae*, CAE aequalia habetur *ad* = BD, et *ae* = AE. *Ergo sinus et tangentes sunt aequales in angulis acutis atque in obtusis, qui sint illorum supplementa.* Quum autem sit arcus BH complementum arcus AB, evidens est BI esse cosinum arcus AB, et HK illius cotangentem.

Corol. II. Sinus BD arcus AB est dimidium chordae BG, arcum duplum BAG subtendentis (*theorem. I. cap. II.*). Sinus crescunt crescentibus angulis a 0° usque ad 90°, et eodem modo decrescunt a 90° usque ad 180°.

Cor. III. Sinus arcus 30° dimidio radio aequalis est. Est enim radius aequalis chordae arcus 60° (*corol. IV. theor. V. cap. III.*) et eiusdem arcus sinus est dimidia chorda arcus dupli. Itaque in triangulo rectangulo latus oppositum angulo 30° est dimidia hypothenusa huius trianguli. Nam si $ACB = 30^\circ$, erit $BG = BC$, et $BD = \frac{1}{2} BC$.

Corol. IV. Tangentes crescunt, crescentibus angulis a 0° usque ad 90° ita, ut tangens arcus 90° sit infinita. Nam radius CH in angulo recto HCA non potest concurrere cum tangente, *quum tangens et radius* CH *sint eidem radio* CA *perpendiculares, adeoque inter se parallelae.*

Corol. V. Tangens arcus 45° aequalis est radio. Nam si angulus ACB sit 45°, triangulum rectangulum CAE erit isosceles, et $AE = AC$.

Cor. VI. Sinus versus AD arcus AB, qui minor est 90°, aequalis est differentiae inter radium CA et cosinum $CD = BI$. Praeterea cosinus versus HI est differentia inter radium CH et sinum $CI = BD$; at sinus versus supplementi, nempe D*a* aequalis est summae radii et cosinus.

Corol. VII. Ob triangula rectangula similia CDB, CAE, CIB, CHK, erit $CA : CD$ vel $BI = AE : BD$, nempe radius est ad cosinum, ut tangens ad sinum, hoc est, $R : \text{cos.} = \text{tang.} : \text{sin.}$ Deinde haec alia habetur analogia $CH : CI$, vel $BD = HK : IB$, hoc est, radius ad sinum, ut cotangens ad cosinum, seu $R : \text{sin.} = \text{cot.} : \text{cos.}$ Tandem $AE : CA = CH$, vel $CA : HK$; hoc est tangens ad radium, ut radius ad cotangentem, seu $\text{tang.} : R = R : \text{cot.}$

Corol. VIII. Ex praecedentibus analogiis derivant formulae, quarum ope sinus substituuntur

tangentibus, et vice versa. Sit $R = 1$; erit

$$\text{sin.} = \text{cos.} \times \text{tang.} = \frac{\text{cos.}}{\text{cot.}}\,;\ \text{cos.} = \text{sin.} \times \text{cot.}$$

$$= \frac{\text{sin.}}{\text{tang.}}\,;\ \text{tang.} = \frac{\text{sin.}}{\text{cos.}} = \frac{1}{\text{cot.}}\,;\ \text{cot.} = \frac{\text{cos.}}{\text{sin.}}$$

$$= \frac{1}{\text{tang.}}\,;\ \text{cot. } A \times \text{tang. } A = 1 = \text{cot. } B \times \text{tang. } B.$$

THEOREMA I.

IN OMNI TRIANGVLO SINVS ANGVLORVM SVNT VT LATERA ANGVLIS OPPOSITA.

Etenim triangulum circulo inscribatur: singula latera sunt chordae arcus dupli, qui est mensura anguli oppositi. Quare dimidium latus est sinus anguli oppositi. Sed semisses sunt inter se, ut tota; ergo latera sunt, ut sinus angulorum oppositorum.

Corol. I. Hinc quum sinus anguli recti sit radius, et latus oppositum sit hypothenusa, erit in triangulo rectangulo radius ad hypothenusam, ut sinus anguli unius acuti ad latus eidem angulo oppositum.

Corol. II. In triangulo rectangulo cosinus anguli unius acuti est sinus anguli alterius; ergo sinus anguli unius acuti est ad suum cosinum, et latus huic angulo oppositum est ad latus alterum; sed sinus est ad cosinum, ut tangens ad

Fig radium; ergo in triangulo rectangulo tangens anguli unius acuti est ad radium, ut latus huic angulo acuto oppositum est ad latus alterum.

THEOREMA II.

32. IN TRIANGVLO QVOLIBET ABC HAEC SEMPER HABETVR ANALOGIA: MAIVS LATVS AC EST AD SVMMAM DVORVM ALIORVM LATERVM $AB + BC$, VT EORVMDEM LATERVM DIFFERENTIA $AB - BC$ AD DIFFERENTIAM SEGMENTORVM AE ET CE, QVAE FIVNT DVCTA EX ANGVLO MAIORI B IN MAIVS LATVS AC PERPENDICVLARI BE.

Nam si ex anguli vertice B tamquam centro, et radio BC, qui sit minori lateri aequalis, describatur circulus GCO, producto latere AB in G; erit $AG = AB + BC$, et $AP = AB - BC$; atque ob $CE = EO$, erit $EA - CE = AD$. *Iam triangula* ACG *et* AOP *sunt similia. Habent nempe communem angulum* A: *praeterea angulus* GCO *aequalis est angulo* OPA; *nam angulus* $GPO + OPA = 180° = \frac{1}{2}CPGC$; *sed angulus* $GPO = \frac{1}{2}GDE$; *ergo angulus* $OPA = \frac{1}{2}GPD$. *At vero haec eadem est mensura anguli* GCO (theor. v. cap. II.): *proinde erunt anguli* OPA, GCO *aequales. Igitur triangula* ACG, AOP *sunt similia, et latera homologa proportionalia:* $AC : AG = AP : AD$, *seu* $AC : AB + BC = AB - BC : EA - CE$.

PROBLEMA I.

DATO SINV ET COSINV ARCVS, INVENIRE SINVS ET COSINVS ARCVS DIMIDII, ATQVE ETIAM ARCVS DVPLI.

Sit AM arcus datus, cuius sinus MP, et co- 33.
sinus CP dati sint: ducta chorda AM, et ad eam demissa perpendicularis CQN, erit AQ vel MQ sinus, et CQ cosinus dimidii arcus. Praeterea agatur chorda MB, quae erit dupla CQ ob triangula ACQ, AMB similia, atque ob AB duplam ipsius AC. Sed $AP : AM = AM : AB$. Quare $AM^2 = AB \times AP$, et $AM \sqrt{AB \times AP}$. Ideoque MQ sinus dimidii arcus $= \frac{1}{2}\sqrt{AB \times AP} = \sqrt{\frac{1}{4} AB \times AP} = \sqrt{\frac{1}{2} AC \times AP}$. Simili modo quum sit $AB : BM = BM : BP$, erit $BM = AB \times BP$, et $BM = \sqrt{AB \times BP}$, ergo CQ vel cosinus dimidii arcus $= \frac{1}{2}\sqrt{AB \times BP} = \sqrt{\frac{1}{4} AB \times BP} = \sqrt{\frac{1}{2} AC \times BP}$.

Iam vero si invenire oporteat sinum et cosinum arcus dupli, sit AN arcus simplex, cuius sinus AQ vel MQ, et cosinus CQ; erit MP sinus, et CP cosinus arcus dupli. Sed ob triangula rectangula AQC, AMP similia, erit $CA : CQ = AM : MP$. Quare si radius dicatur R, et arcus AN dicatur A, erit $R : \cos. A = 2 \sin. A : \sin. 2A$. Tandem ob eorumdem triangulorum similitudinem erit $CA : AQ = AM : AP$, vel

Fig. $R : \text{sin. } A = 2 \text{ sin. } A : R - \text{cos. } 2A$: ideoque $RR - R \times \text{cos. } 2A = 2 \text{ sin. } A \times \text{sin. } A$. Ac proinde

$$\text{cos. } 2A = \frac{RR - 2 \text{sin} A \times \text{sin. } A}{R}.$$

PROBLEMA II.

DATO SINV ET COSINV DVORVM ARCVVM, INVENIRE SINVS ET COSINVS EORVMDEM SVMMAE VEL EORVM DIFFERENTIAE.

Sint arcus AM, DM, quorum sinus et cosinus
34. dati. Agatur chorda FD ad radium CM perpendicularis, et ex punctis D, F demittantur perpendiculares DQ, FP ad radium CA, quarum linearum una erit sinus summae, altera autem sinus differentiae arcuum AM, DM, ideoque recta CQ erit cosinus summae, et CP cosinus differentiae. Iam vero ducantur rectae GK, FL perpendiculares ad DQ, itemque rectae MN, GI perpendiculares ad radium CA, fiatque arcus $AM = A$, et arcus DM, vel $FM = B$. His positis, patet, sinum DQ summae arcuum esse $= QK + DK = GI + DK$, et sinum FP differentiae eorumdem arcuum esse $= GI - KL = GI - DK$, quum sit $DK = KL$. Quare inveniendae sunt duae illae rectae. Sed ob triangula CMN, CGI similia, erit $CM : CG = MN : GI$,

vel $R : \text{cos. } B = \text{sin. } A : GI = \dfrac{\text{sin. } A \times \text{cos. } B}{R}$

Item ob triangula CMN, DGK similia, erit $CM : CN = DG : DK$, vel $R : \text{cos. } A = \text{sin. } B : DK$

$= \dfrac{\text{sin. } B \times \text{cos. } A}{R}$, factaque summa, erit DQ, vel

$\text{sin. } (A + B) = \dfrac{\text{sin. } A \times \text{cos. } B + \text{sin. } B \times \text{cos. } A}{R}$. Factaque subtractione, erit $GI - DK$, vel $FP =$

$$\text{sin. } (A - B) = \frac{\text{sin. } A \times \text{cos. } B - \text{sin. } B \times \text{cos. } A}{R}.$$

PROBLEMA III.

SIMILI MODO INVENIRE COSINVM CQ SVMMAE, 34.
ET COSINVM CP DIFFERENTIAE ARCVVM.

Inveniantur nempe rectae CI, et $GK = PI$, subtrahanturque ex CI, vel huic addantur. Iam vero ob triangula CMN, CGI similia, erit $CM : CG = CN : CI$, vel $R : \text{cos. } B = \text{cos. } A : CI$

$= \dfrac{\text{cos. } A \times \text{cos. } B}{R}$. Itemque ob triangula DGK, CMN similia, erit $CM : MN = DG : GK$

$= \dfrac{\text{sin. } A \times \text{sin. } B}{R}$. Ideoque CQ, vel cos. $(A + B)$

$= \dfrac{\text{cos. } A \times \text{cos. } B - \text{sin. } A \times \text{sin. } B}{R}$, et CP, vel

$$\text{cos. } (A - B) = \frac{\text{cos. } A \times \text{cos. } B + \text{sin. } A \times \text{sin. } B}{R}.$$

Fig. 34. Sit arcus $AM=30^\circ$, et $FM=MD$. Ob triangula rectangula similia DGO, LSO, erit angulus $GDO=LSO=ACM=30^\circ$. Ergo angulus $GDO=30^\circ$. Quare $FL=\frac{1}{2}FD$ (*cor. III.*) $=FG=GD$. Sed $DF^2=FL^2+DL^2$ vel $DF^2-FL^2=DL^2$, vel $4FG^2-FG^2=DL^2$. Ergo $3FG^2=DL^2$, vel $FG^2\times 3=DL^2$. Quare $FG\times\sqrt{3}=DL$, et $FG\times\sqrt{3}+FP=MQ$, hoc est, sinus FP arcus FA minoris scilicet quam 30°, et sinus FG, differentiae scilicet inter hunc arcum et 30° per $\sqrt{3}$ multiplicatus, simul sunt aequales sinui DQ arcus DA, qui tanto maior est arcu 30°, quanto arcus FA minor est. Ob arcum $DG=FL$, erit $DT+DG=FH$. Nempe sinus DT arcus DB minoris quam 60°, et sinus DG, differentiae scilicet inter hunc arcum et 60°, simul aequantur sinui FH arcus BF, qui tanto maior est arcu 60°, quanto FD minor est. Itaque demonstravimus principia, quorum ope formari possunt sinuum et tangentium tabulae. Illae autem tabulae commoditatis ergo per logarithmos construuntur, cuius quidem constructionis ratio ex logarithmorum doctrina iam explicata intelligitur.

LEMMA.

SI AD SEMISVMMAM DVARVM QVANTITATVM ADDATVR SEMIDIFFERENTIA, PRODIT NVMERVS MAIOR; SI VERO HAEC AB ILLA SVBTRAHATVR, RELINQVITVR NVMERVS MINOR.

Etenim numerus maior componitur ex minore

et differentia; ergo summa componitur ex minore bis sumto et differentia. Quare quum semisumma componatur ex minore et semidifferentia, prodit numerus maior, si ad semisummam semidifferentia addatur; contra relinquitur minor, si haec ab illa subtrahatur.

THEOREMA III.

IN OMNI TRIANGVLO ABC SVMMA DVORVM LATERVM QVORVMCVMQVE AB+BC EST AD ILLORVM DIFFERENTIAM AB−BC, VT TANGENS SEMISVMMAE DVORVM ANGVLORVM A, ET C, QVI HIS LATERIBVS OPPONVNTVR, AD TANGENTEM SEMIDIFFERENTIAE EORVMDEM ANGVLORVM. Fig. 32.

Etenim sit P semisumma angulorum A et C, et Q illorum semidifferentia. Erit angulus maior $C=P+Q$, et minor $A=P-Q$. (*lemmate praeced.*). Iam (*ex demonst.*) $AB:BC=\sin.C:\sin.A=\sin.(C+Q):\sin.(C-Q)$ $=\sin.P\times\cos.Q+\cos.P\times\sin.Q:\sin.P\times\cos.Q-\cos.P\times\sin.Q$ (*probl. II.*) Radius ponitur $=1$. Ergo $AB\times\sin.P\times\cos.Q-AB\times\cos.P\times\sin.Q=BC\times\sin.P\times\cos.Q+BC\times\cos.P\times\sin.Q$. Et (*per transpositionem*) - - -

$$\overline{AB-BC}\times\sin.P\times\cos.Q=\overline{AB+BC}\times\cos.P\times\sin.Q.$$

Quare dividendo per $\cos.P\times\cos.Q$, factaque reductione, habebitur: $\frac{\overline{AB-BC}\times\sin.P}{\cos.P}=\frac{\overline{AB+BC}\times\sin.Q}{\cos.Q}$.

Sed $\frac{\text{sin.}}{\text{cos.}} = \text{tang.}$ Ergo $AB - BC \times \text{tang.}\, P = -- AB + BC \times \text{tang.}\, Q$. Quare $AB + BC : AB - BC = \text{tang.}\, P : \text{tang.}\, Q = \text{tang.}\, \frac{A+C}{2} : \text{tang.}\, \frac{A-C}{2}$.

His principiis universa innititur trigonometria. Et quidem in triangulorum resolutione vel dantur tria latera, vel duo tantum et angulus, vel duo anguli et latus unum. Porro datis in triangulo tribus, quae iam diximus, reliqua inveniuntur per hactenus demonstrata. At monendum est, datis tribus angulis dumtaxat, inveniri tantum rationem laterum, quae sunt, ut sinus angulorum oppositorum; minime autem invenitur eorum valor, quum infinita possint construi triangula similia inaequalia. Neque etiam sine observatione praetermittendus est casus, in quo dantur duo latera, et angulus alterutri lateri oppositus. Casus ille est ambiguus, et duas solutiones potest admittere; quum (*ex dem.*) sinus anguli acuti sit quoque sinus complementi ad duos rectos. Quare, ut tollatur ambiguitas, nota sit, oportet, anguli species, hoc est, notum esse debet, an angulus sit acutus vel obtusus.

In omnibus trigonometriae libris reperiuntur sinum et tangentium tabulae. Quamvis autem ex hactenus demonstratis manifestum sit, quo artificio construantur; id tamen breviter declarabimus. Dato sinu 30° per antea demonstrata, inveniri possunt sinus 15°, deinde $7^\circ\frac{1}{2}$, postea $2^\circ\frac{3}{4}$,

et ita sinuum semisses, progrediendo usque ad duodecimam operationem, nempe usque ad $52'' \; 44''' \; 3'''' \frac{3}{4}$; qui quidem sinus sine errore sensibili cum arcu confunditur. Quia vero sinus illi minime sunt arcubus proportionales, dici potest: ut arcus ille minimus est ad suum sinum; ita arcus $1'$ est ad suum sinum. Dato autem sinu $1'$, invenietur sinus arcuum $2'$, $3'$, $4'$, cet. et ita deinceps usque ad 30° Tandem a 30° usque ad 60°, et 60° usque ad 90° progredi licebit. Quo facto tangentes ad calculum revocare iam facile erit.

SECTIO II.

De geometria superficierum.

CAPVT I.

De praecipuis planarum superficierum proprietatibus.

THEOREMA I.

TRIA PVNCTA, QVAE IN EADEM RECTA NON IACENT, PLANI POSITIONEM DETERMINANT.

Id patet ex definitione ipsius plani, *quae sic se habet: si concipiatur triangulum rectangulum* ABF *circa perpendicularem im-* 35

Sed $\frac{\text{sin.}}{\text{cos.}} = \text{tang.}$ Ergo $AB - BC \times \text{tang.}\, P = - -$ $AB + BC \times \text{tang.}\, Q$. Quare $AB + BC : AB - BC = \text{tang.}\, P : \text{tang.}\, Q = \text{tang.}\, \frac{A+C}{2} : \text{tang.}\, \frac{A-C}{2}$.

His principiis universa innititur trigonometria. Et quidem in triangulorum resolutione vel dantur tria latera, vel duo tantum et angulus, vel duo anguli et latus unum. Porro datis in triangulo tribus, quae iam diximus, reliqua inveniuntur per hactenus demonstrata. At monendum est, datis tribus angulis dumtaxat, inveniri tantum rationem laterum, quae sunt, ut sinus angulorum oppositorum; minime autem invenitur eorum valor, quum infinita possint construi triangula similia inaequalia. Neque etiam sine observatione praetermittendus est casus, in quo dantur duo latera, et angulus alterutri lateri oppositus. Casus ille est ambiguus, et duas solutiones potest admittere; quum (*ex dem.*) sinus anguli acuti sit quoque sinus complementi ad duos rectos. Quare, ut tollatur ambiguitas, nota sit, oportet, anguli species, hoc est, notum esse debet, an angulus sit acutus vel obtusus.

In omnibus trigonometriae libris reperiuntur sinum et tangentium tabulae. Quamvis autem ex hactenus demonstratis manifestum sit, quo artificio construantur; id tamen breviter declarabimus. Dato sinu 30° per antea demonstrata, inveniri possunt sinus 15°, deinde $7^\circ \frac{1}{2}$, postea $2^\circ \frac{3}{4}$, 3

et ita sinuum semisses, progrediendo usque ad Fig. duodecimam operationem, nempe usque ad $52''$ $44'''$ $3'''' \frac{3}{4}$; qui quidem sinus sine errore sensibili cum arcu confunditur. Quia vero sinus illi minime sunt arcubus proportionales, dici potest: ut arcus ille minimus est ad suum sinum; ita arcus $1'$ est ad suum sinum. Dato autem sinu $1'$, invenietur sinus arcuum $2'$, $3'$, $4'$, cet. et ita deinceps usque ad 30° Tandem a 30° usque ad 60°, et 60° usque ad 90° progredi licebit. Quo facto tangentes ad calculum revocare iam facile erit.

SECTIO II.

De geometria superficierum.

CAPVT I.

De praecipuis planarum superficierum proprietatibus.

THEOREMA I.

TRIA PVNCTA, QVAE IN EADEM RECTA NON IACENT, PLANI POSITIONEM DETERMINANT.

Id patet ex definitione ipsius plani, *quae sic se habet: si concipiatur triangulum rectangulum* ABF *circa perpendicularem im-* 35

Fig. *mobilem* AB *ita in gyrum agi, ut revolutione sua transitus vestigia relinquat; ea exsistent in plano circulari* CDGFLH. *Non ita vestigia lineae obliquae* AF, *quae superficiem concavam designabunt.* Illud vero planum uni-
36. cum esse, manifestum est. *Fingantur enim infinita numero plana, uti* HD, CG *cet. Possunt utique ea plana habere duo puncta* A, B *inter se communia. Sed illud etiam manifestum est, unicum dumtaxat inter ea esse, quod quum transeat per duo praedicta puncta, possit simul transire per aliud determinatum punctum* G. *Igitur tria puncta, quum non possint esse nisi eidem plano communia, ipsius positionem determinant.*

36. *Corol. I.* Duae rectae CA, AD se invicem secantes sunt in eodem plano PQ. Nam punctum intersectionis A, et punctum quodlibet aliud in binis lineis pro arbitrio sumtum C, D, tria sunt puncta in directum non posita, quae proinde determinant positionem plani CAD, in quo iacent duo utriusque lineae puncta, ac proinde et totae binae lineae (*ex def.*).

Corol. II. Si duae rectae iacentes in eodem plano tertia recta secentur, recta secans in eodem quoque iacebit plano. Nam duo eiusdem lineae secantis puncta, duae scilicet intersectiones, sunt in eodem plano, *quum sint communia aliis duobus lineis.* Si autem ponamus, duas rectas se mutuo secare, patet, in hoc casu demonstrationem non valere, nisi tertia linea secans extra punctum intersectionis transeat, alioquin unicum haberetur,

punctum, quod rectae positionem non determinat. Fig.

Corol. III. Duorum planorum CG, DH intersectio est linea AB, cuius singula puncta iacent in utroque plano. *Quum enim plana nullam crassitudinem habere censeantur; apertum est, eorum intersectionem* AB *unicam dumtaxat dimensionem habere posse, scilicet longitudinem, adeoque lineam rectam.* Quare planorum duorum CG, DH, intersectio est linea recta AB 36.

Corol. IV. Recta AB ad planum perpendicularis, insistit quoque perpendiculariter ad rectas singulas in eodem plano iacentes, et per extremitatem perpendicularis transeuntes FB, GB, DB, CB, HB, LB. Etenim ponamus, rectam illam ad planum perpendicularem, non insistere perpendiculariter ad aliquam ex praedictis lineis; iam linea illa infra planum deprimitur vel attollitur supra idem planum; ac proinde non iaceret in eodem plano (*quod est contra hypoth.*) 35.

Corol. V. Duae rectae AB, MN ad idem planum perpendiculares vel aequaliter inclinatae, sunt inter se parallelae, et contra. Etenim rectarum illarum extremitates communi recta BN in plano iungantur; duae illae lineae ad planum perpendiculares, vel aequaliter inclinatae, erunt quoque perpendiculares, vel aequaliter inclinatae ad eamdem lineam iungentem BN; est enim in eodem plano. Quare (*ex parallelarum def.*) rectae illae erunt parallelae, et vice versa. 35.

Fig.

THEOREMA II.

DVO PLANA SIBI MVTVO INCLINATA EASDEM HABENT PROPRIETATES, QVAS DE RECTIS AD SE INVICEM INCLINATIS DEMONSTRAVIMVS.

36. *Ponamus, duo plana* DH *et* CG *se invicem intersecare iuxta rectam* AB. *Ducatur in plano* CG *linea* CA *perpendicularis ad* AB, *atque in plano* DH *ducatur etiam* AD *perpendicularis ad* AB; *tunc angulus* CAD *erit mensura inclinationis planorum* CG, HD. *Vnde constat, eodem pacto haberi mensuram planorum ad se invicem inclinatorum, atque linearum rectarum. Vnde prono alveo fluunt sequentia.*

Corol. I. Planum plano occurrens vel duos angulos rectos facit, vel duobus rectis aequales (*theor. I. cap. I. sect. I.*).

Corol. II. In planorum intersectione aequales sunt anguli ad verticem oppositi (*corol. II. theorem. I. cap. I. sect. I.*).

Corol. III. Si plana quodlibet eamdem habeant communem intersectionem, summa angulorum omnium est 360° (*corol. I. theor. I. cap. I. sect. I.*)

Corol. IV. Ex puncto dato extra planum vel intra planum, unica perpendicularis ad planum duci potest (*corol. IV. theor. I. cap. I. sect. I.*)

Corol. V. Distantia puncti alicuius a plano dato, est perpendicularis ex puncto dato ad planum ducta (*ex def.*).

Corol. VI. Planum secans duo vel plura plana parallela efficit angulos alternos externos aequales, item aequales angulos alternos internos. Praeterea angulus internus alterius interni supplementum est, atque etiam angulus externus est supplementum alterius (*theor. II. cap. I. sec. I.*)

Fig.

Corol. VII. Si duo aut plura plana parallela alio plano secentur, communes intersectiones erunt parellelae. Si enim non sint parallelae, sibi occurrere possunt, ac proinde et plana ipsa, in quibus hae lineae iacent; ideoque plana non forent parallela, quod est contra hypoth.

CAPVT II.

De superficierum mensura.

THEOREMA I.

SVPERFICIES PARALLELOGRAMMI RECTANGVLI AEQVALIS EST PRODVCTO EX BASI IN ALTITVDINEM.

Sit parallelogrammum rectangulum ABCD: 37
cuius altitudo AD certum contineat pedum numerum: e. g. 7; basis autem AB contineat 8. Divisum intelligi poterit parallelogrammum in 7 superficies, ut DM, quae singulae continent octo minores superficies quadratas, sive octo pedes *quadratos*, ut vocant. Quare habebitur parallelogrammi totius superficies, si octo pedes quadrati, qui prima superficie continentur, toties sumantur, quot sunt aequales superficies, ut DM,

Fig.

THEOREMA II.

DVO PLANA SIBI MVTVO INCLINATA EASDEM HABENT PROPRIETATES, QVAS DE RECTIS AD SE INVICEM INCLINATIS DEMONSTRAVIMVS.

36. *Ponamus, duo plana* DH *et* CG *se invicem intersecare iuxta rectam* AB. *Ducatur in plano* CG *linea* CA *perpendicularis ad* AB, *atque in plano* DH *ducatur etiam* AD *perpendicularis ad* AB; *tunc angulus* CAD *erit mensura inclinationis planorum* CG, HD. *Vnde constat, eodem pacto haberi mensuram planorum ad se invicem inclinatorum, atque linearum rectarum. Vnde prono alveo fluunt sequentia.*

Corol. I. Planum plano occurrens vel duos angulos rectos facit, vel duobus rectis aequales (*theor. I. cap. I. sect. I.*).

Corol. II. In planorum intersectione aequales sunt anguli ad verticem oppositi (*corol. II. theorem. I. cap. I. sect. I.*).

Corol. III. Si plana quodlibet eamdem habeant communem intersectionem, summa angulorum omnium est 360° (*corol. I. theor. I. cap. I. sect. I.*)

Corol. IV. Ex puncto dato extra planum vel intra planum, unica perpendicularis ad planum duci potest (*corol. IV. theor. I. cap. I. sect. I.*)

Corol. V. Distantia puncti alicuius a plano dato, est perpendicularis ex puncto dato ad planum ducta (*ex def.*).

Corol. VI. Planum secans duo vel plura plana parallela efficit angulos alternos externos aequales, item aequales angulos alternos internos. Praeterea angulus internus alterius interni supplementum est, atque etiam angulus externus est supplementum alterius (*theor. II. cap. I. sec. I.*)

Fig.

Corol. VII. Si duo aut plura plana parallela alio plano secentur, communes intersectiones erunt parellelae. Si enim non sint parallelae, sibi occurrere possunt, ac proinde et plana ipsa, in quibus hae lineae iacent; ideoque plana non forent parallela, quod est contra hypoth.

CAPVT II.

De superficierum mensura.

THEOREMA I.

SVPERFICIES PARALLELOGRAMMI RECTANGVLI AEQVALIS EST PRODVCTO EX BASI IN ALTITVDINEM.

Sit parallelogrammum rectangulum ABCD: 37
cuius altitudo AD certum contineat pedum numerum: e. g. 7; basis autem AB contineat 8. Divisum intelligi poterit parallelogrammum in 7 superficies, ut DM, quae singulae continent octo minores superficies quadratas, sive octo pedes *quadratos*, ut vocant. Quare habebitur parallelogrammi totius superficies, si octo pedes quadrati, qui prima superficie continentur, toties sumantur, quot sunt aequales superficies, ut DM,

Fig. *at vero* DM *continet* 7 *pedes;* ac proinde superficies tota parallelogrammi erit 7×8, nempe 56 pedum quadratorum. Evidens est, in hac demonstratione fingi posse alium quemlibet partium numerum, atque eadem valet demonstratio, etiamsi altitudo et basis parallelogrammi ponantur *mixtae ex integro et fractione*, ut patet ex *theor. I. cap. IV.*

Corol. I. Si parallelogrammum BD per diagonalem DB dividatur, habebuntur triangula duo rectangula aequalia ABD, BDC, quorum proinde superficies, utpote dimidia parallelogrammi, erit dimidium productum ex basi in altitudinem.

Eadem est demonstratio pro triangulo quolibet, etiam non rectangulo. Sit enim triangulum
38. CAB, non rectangulum. Ex puncto A demittatur perpendicularis AD, compleaturque rectangulum FCBE: erit triangulum CAD dimidium rectanguli FACD, et triangulum DAB dimidium rectanguli DABE; ac proinde $CAB = CDA + ADB = \frac{1}{2} CFAD + \frac{1}{2} AEBD = \frac{1}{2} FCBE = \frac{1}{2} CB \times AD$. Quare, ut antea, superficies trianguli est dimidium productum ex basi in altitudinem.

Idem patet, etiamsi perpendicularis EB trianguli CED cadat extra basim. Nam triangulum DEB est dimidium rectanguli DAEB, et triangulum CEB est dimidium rectanguli CFEB; ergo triangulum CED, seu $CEB - DEB = \frac{1}{2} CBEF - \frac{1}{2} DAEB$

$$= \frac{1}{2} CB \times AD - \frac{1}{2} DB \times AD = \frac{CB - DB}{2} \times AD$$

$= \frac{1}{2} CD \times AD$; ac proinde trianguli cuiuslibet

superficies aequalis est dimidio producto ex basi in altitudinem.

Corol. II. Quum parallelogrammum quodlibet dividi possit in duo triangula aequalia, quae ipsam habeant parallelogrammi basim eamdemque altitudinem; patet generatim, superficiem parallelogrammi cuiuscumque esse productum ex basi in altitudinem.

Corol. III. Quotlibet triangula, ideoque etiam quotlibet parallelogramma inter easdem parallelas, et super eadem vel aequali basi constituta, sunt aequalia. Ergo etiam triangula inter easdem parallelas cum parallelogrammis, et super eadem basi constituta, sunt parallelogrammorum dimidia; ac proinde etiam inter se aequalia. Ex hac propositione pendet vulgaris demonstratio theorematis, quod alio modo iam demonstravimus; nempe *quadratum hypothenusae in triangulo rectangulo aequale esse quadratis laterum seu cathetorum.* Hanc vero geometriae fecunditatem totiusque doctrinae geometricae coniunctionem variis exemplis tironibus saepe ostendere debet peritus magister. Vid. Wolf. *geom. theor. 89. part. I.*

Corol. IV. Quum triangula sint, ut dimidium productum ex basi in altitudinem, erunt etiam, ut productum totum; hoc est, triangulorum superficies sunt in ratione composita basium et altitudinum; ac proinde si bases fuerint aequales, triangula erunt inter se, ut altitudines; si autem altitudines fuerint aequales, erunt inter se, ut bases.

Corol. V. Si altitudo trianguli unius sit ad

Fig. trianguli alterius altitudinem, ut basis secundi trianguli ad basim primi, hoc est, si bases sint in ratione inversa altitudinum, triangula sunt aequalia. In hoc enim casu habetur proportio, in qua productum extremorum aequale est producto mediorum, hoc est productum ex altitudine primi trianguli in basim aequale est producto ex altitudine secundi trianguli in suam basim, ideoque triangula sunt aequalia; et versa vice si triangula sunt aequalia, erunt bases in ratione inversa altitudinum.

Corol. VI. In triangulis similibus superficies sunt in ratione duplicata laterum homologorum. Etenim quum triangula sint in ratione composita basium et altitudinum, atque (*ex hip.*) sint similia, loco basis substitui poterit altitudo, et contra. Quare triangula similia sunt, ut quadrata laterum homologorum.

THEOREMA II.

SVPERFICIES POLYGONI REGVLARIS AEQVALIS EST DIMIDIO PRODVCTO EX PERPENDICVLARI PER CENTRVM POLYGONI AD LATVS VNVM DEMISSA IN POLYGONI CIRCVMFERENTIAM.

Etenim triangula omnia, in quae resolvitur polygonum regulare, sunt aequalia (*theorem. V. cap. III.*) ideoque eamdem habent altitudinem
28. CI; ergo superficies polygoni regularis $= CI \times \frac{1}{2} AB + CI \times \frac{1}{2} BD + CI \times \frac{1}{2} DE$ cet. Quare quum $AB + BD + DE$ cet. sit tota polygoni peripheria; patet, superficiem totam polygoni aequalem esse producto ex altitudine CI in dimidiam polygani peripheriam, vel dimidio producto ex peripheria polygoni in altitudinem.

Corol. I. Superficies circuli aequalis est dimidio producto ex radio in circumferentiam, *quum circulus nihil aliud sit quam polygonum infinitilaterum.*

Corol. II. Si ex centro circuli ad circumferentiam ducantur radii duo, pars circuli duobus radiis et arcu comprehensa, *sector* dicitur. Evidens autem est, huius sectoris superficiem aequalem esse dimidio producto ex arcu in radium.

THEOREMA III.

FIGVRARVM SIMILIVM SVPERFICIES SVNT IN RATIONE DVPLICATA LATERVM HOMOLOGORVM.

Etenim triangula homologa, in quae reducuntur figurae similes, sunt earumdem figurarum partes similes (*theor. IV. cap. IV.*), ac proinde triangula homologa erunt, ut polygona tota; sed triangula similia sunt in ratione duplicata laterum homologorum (*corolar. VI. theorem. I.*); ergo in eadem etiam ratione sunt figurae similes quaelibet.

Corol. I. Superficies circulorum sunt, ut quadrata radiorum vel diametrorum; *quum omnes circuli sint inter se similes.*

Schol. Ex propositionibus praecedentibus nota quidem est ratio, quam habent variae circu-

Fig. lorum superficies ad illorum peripherias et suos radios. At ratio accurata inter circuli circumferentiam illiusque diametrum nondum definiri potuit ita, ut magnitudine diametri numeris expressa, numeris accurate exprimi non possit circuli circumferentia, ac proinde nec ipsa circuli superficies. In hoc sensu intelligi debet, quod vulgo dicitur, nondum scilicet inventam esse circuli *quadraturam*, quod quidem *quadraturae* nomen adhiberi solet, eo quod *quadratum* sit cuiuslibet superficiei communis mensura, ut iam demonstravimus. Eo igitur reducti sunt geometrarum conatus, ut ad illam quadraturam proxime, et quantum voluerint, accedant; hanc tamen accurate non attingant. Qua ratione autem hanc *approximationem* tentare soleant geometrae, ex ipsis elementis licebit intelligere. Divisus concipiatur circulus primo in quattuor partes aequales, deinde in 8, in 16, in 32, in 64, in 128 cet. prout cuique libuerit; et concipiamus per ea divisionum puncta tangentes et chordas respective ductas; habebuntur polygona duo, quo-
28. rum unum *inscriptum* circulo, alterum autem *circumscriptum*. Quae quidem ambo constant triangulis aequalibus. Porro per methodos explicatas, in his triangulis haberi semper poterunt bases, quae in primo casu sunt circulorum chordae, in altero autem tangentes; ac proinde omnium quoque chordarum et tangentium summa innotescet, hoc est, perimeter polygoni inscripti, quae circuli circumferentia proxime minor est, et polygoni circumscripti perimeter, quae proxime maior est, ita ut defectus vel excessus, quantum cuique placuerit, tenuis sit, et intra angustissimos limites contrahatur. Hac methodo Archimedes invenit, diametrum ad peripheriam esse in ratione 7 ad 22 ita, ut exiguus omnino sit peripheriae sic inventae excessus supra veram. Haec eadem ratio subtilius ab aliis quaesita est, et statuitur, ut 1 ad 3, 14159265 cet. perductis decimalibus numeris usque ad notas 127; quae quidem *approximatio* est fere infinita. Sed omnium vulgatissima ratio diametri ad peripheriam ea est, quam exprimunt numeri 113 et 355. Quare data circuli diametro habebitur peripheria, si haec fiat proportio 113 ad 355, ut diameter data ad peripheriam quaesitam. Haec multiplicetur per quartam diametri partem, habebitur superficies circuli, sive, ut vocant, *area*. Haec pauca dicta sint de ratione diametri ad peripheriam, sive de quadratura circuli, quam audacter se invenisse non raro iactitant viri geometriae imperiti, qui ipsum quidem quaestionis statum, ut plurimum, non intelligunt.

Simili methodo figura quaelibet curvilinea generatim dividi potest in partes rectilineas. Aliquando per geometriam sublimiorem figurae curvilineae area accurate haberi potest. Sed commodissima et generalis est praxis, qua figurae curvilineae circumferentia in minimas partes, et *physice* rectilineas dividitur, et deinde figurae totius area investigatur, ut fieri solet in polygonorum mensura.

Porro dum superficierum magnitudinem *pedi-*

bus quadratis aut alia qualibet mensura exprimimus, id nequaquam haberi debet tamquam contrarium iis, quae de numerorum *concretorum* multiplicatione demonstravimus in arithmetica (*schol. ad probl. IV. cap. II. arith.*) non enim pedes per pedes multiplicantur. Ita dum parallelogrammi superficies invenitur, multiplicando basim per altitudinem, hac operatione hoc unum significant geometrae; si nempe habeantur parallelogramma duo, adhibeaturque quantitas *linearis* quaelibet a pro communi basium et altitudinum mensura, et sit B numerus integer aut fractus, rationalis vel irrationalis exprimens, quoties basis parallelogrammi unius contineat quantitatem a: atque H exprimat, quoties altitudo eiusdem parallelogrammi eamdem contineat mensuram. Item sit b numerus exprimens, quoties mensura a contineatur in basi alterius parallelogrammi; h autem exponat, quoties altitudo parallelogrammi eiusdem contineat mensuram a; parallelogrammorum illorum superficies erunt inter se, ut productum ex duobus numeris B et H ad productum ex numeris duobus b et h. Haec est genuina huius operationis notio. Quare dum dicitur, parallelogrammi superficiem aequalem esse producto ex basi in altitudinem, *aequalitas* proprie dicta intelligi non debet; sed mera proportio. *AEqualitas enim non habetur, nisi determinetur absoluta mensura eiusdem speciei, quae pro unitate adsumitur.* Haec eadem observatio ad physicam saepe transferri debet, ubi de spatii, velocitatis et temporis mensura sermo est.

SECTIO III.

De geometria solidorum.

CAPVT I.

De solidorum genesi et proprietatibus.

DEFINITIO I.

Si figura rectilinea AGR supra immotam rectam AE motu sibi semper parallelo feratur; so- 39.
lidum AGROFE inde genitum, *prisma* dicitur, et *rectum* vocatur, si AE describenti plano fuerit perpendicularis; si vero recta *e a* describenti plano *abcd* fuerit obliqua, dicitur *obli-* 50.
quum.

Def. II. Si planum describens fuerit parallelogrammum DCKH, solidum inde genitum 40.
ABGFCDHK dicitur *parallelepipedum.* Si autem planum describens sit quadratum ABCD, solidum ABCDEFGI *cubus* nuncupatur. Basis solidi seu planum describens potest esse quodlibet 41.
polygonum, et solidum inde genitum *prismatis* nomen retinet, si e singulis polygoni angulis extra planum consurgant lineae aequales et parallelae terminantes rectilineam solidi faciem.

Def. III. At si rectae lineae DA, FA, GA, EA, HA ex plani describentis angulis D, F, G, 42.
E, H exeuntes in apicem A coëant, solidum

bus quadratis aut alia qualibet mensura exprimimus, id nequaquam haberi debet tamquam contrarium iis, quae de numerorum *concretorum* multiplicatione demonstravimus in arithmetica (*schol. ad probl. IV. cap. II. arith.*) non enim pedes per pedes multiplicantur. Ita dum parallelogrammi superficies invenitur, multiplicando basim per altitudinem, hac operatione hoc unum significant geometrae; si nempe habeantur parallelogramma duo, adhibeaturque quantitas *linearis* quaelibet *a* pro communi basium et altitudinum mensura, et sit B numerus integer aut fractus, rationalis vel irrationalis exprimens, quoties basis parallelogrammi unius contineat quantitatem *a*: atque H exprimat, quoties altitudo eiusdem parallelogrammi eamdem contineat mensuram. Item sit *b* numerus exprimens, quoties mensura *a* contineatur in basi alterius parallelogrammi; *h* autem exponat, quoties altitudo parallelogrammi eiusdem contineat mensuram *a*; parallelogrammorum illorum superficies erunt inter se, ut productum ex duobus numeris B et H ad productum ex numeris duobus *b* et *h*. Haec est genuina huius operationis notio. Quare dum dicitur, parallelogrammi superficiem aequalem esse producto ex basi in altitudinem, *aequalitas* proprie dicta intelligi non debet; sed mera proportio. *AEqualitas enim non habetur, nisi determinetur absoluta mensura eiusdem speciei, quae pro unitate adsumitur.* Haec eadem observatio ad physicam saepe transferri debet, ubi de spatii, velocitatis et temporis mensura sermo est.

SECTIO III.

De geometria solidorum.

CAPVT I.

De solidorum genesi et proprietatibus.

DEFINITIO I.

Si figura rectilinea AGR supra immotam rectam AE motu sibi semper parallelo feratur; so- 39.
lidum AGROFE inde genitum, *prisma* dicitur,
et *rectum* vocatur, si AE describenti plano fuerit perpendicularis; si vero recta *e a* describenti plano *abcd* fuerit obliqua, dicitur *obli-* 50.
quum.

Def. II. Si planum describens fuerit parallelogrammum DCKH, solidum inde genitum 40.
ABGFCDHK dicitur *parallelepipedum*. Si autem planum describens sit quadratum ABCD, solidum ABCDEFGI *cubus* nuncupatur. Basis solidi 41.
seu planum describens potest esse quodlibet polygonum, et solidum inde genitum *prismatis* nomen retinet, si e singulis polygoni angulis extra planum consurgant lineae aequales et parallelae terminantes rectilineam solidi faciem.

Def. III. At si rectae lineae DA, FA, GA, EA, HA ex plani describentis angulis D, F, G, 42.
E, H exeuntes in apicem A coëant, solidum

Fig. *pyramis* dicitur, quae vocatur *recta*, si perpendicularis AB ex vertice A ad basim ducta transeant per huius centrum; sin minus, pyramis est *obliqua*.

43. *Corol. I.* Prisma igitur oppositas facies AGR,
39. EFO aequales habet, similes et parallelas, quum AGR fluendo per AE motu sibi semper parallelo tandem congruat cum EFO. Praeterea dum planum AGR, motu sibi parallelo describit prisma AGROFE, latera AG, GR, RA motu sibi semper parallelo describunt parallelogramma AEFG, GFOR, ROEA. Ac proinde prisma tot parallelogrammis circumcirca terminatur, quot sunt latera plani describentis.

Corol. II. Parallelepipedum sex parallelogrammis terminatur, cubus autem sex quadratis aequalibus. Nam praeter facies quattuor parallelo laterum motu genitas, sunt etiam facies duae oppositae parallelae basis motu descriptae. Illa autem basis in primo casu est parallelogrammum, in altero autem quadratum.

Corol. III. In pyramide si omnia latera basis
42. DF, FG, GE, EH, HD sunt aequalia inter se, et latera rectilinea ipsius pyramidis DA, FA, GA, EA, HA pariter inter se aequalia, erunt omnes facies triangula isoscelia aequalia.

50. *Corol. IV.* Quaevis sectio prismatis EFGH,
42. vel pyramidis *dfgeh* facta plano basi parallelo est figura prorsus similis basi. Etenim sectionis parallela singula latera sunt singulis lateribus basis parallela; quum sint intersectiones planorum parallelorum cum iisdem planis. Quare singuli

anguli erunt aequales (*theor. II. cap. praeced.*); Fig.
ac proinde sectio basi similis est.

Corol. V. In prismate EFGH sectio basi pa- 50.
rallela ipsi basi aequalis est, in pyramide autem 42.
latera sectionis homologa sunt minora, in ratione distantiae sectionis a vertice, ad distantiam basis ab eodem, *hoc est*, *basis* DFGEH *est ad sectionem dfgeh*, *ut* BA *est ad ba*. In prismate patet aequalitas, quum facies sint parallelogramma, ac proinde latera sectionis homologa aequalia sunt lateribus basis; ideoque sectio prorsus aequalis est basi. In pyramide proportio etiam patet, nam ob sectionem parallelam in unaquaque facie habebuntur triangula similia, DAF, D*af*, et FAG, *fag* cet.

Corol. VI. Omnia prismata collata inter se, si super basibus aequalibus, et inter eadem plana parallela constituantur, solida respective aequalia comprehendunt; idem dicendum est de pyramidibus eodem modo inter se comparatis. Secentur
enim duo prismata ABCDEFGH, *abcdefgh* quot- 50.
cumque planis EFGH, *efgh*, quae sint basibus parallela, sectiones unius prismatis aequales semper erunt sectionibus respondentibus alterius. Nam in prismate omnes sunt aequales basibus. Porro prismata illa concipi possunt tamquam composita ex his omnibus sectionibus, quarum singulae singulis aequales sunt. Numerus autem sectionum altitudini prismatum aequalis est, seu distantiae inter plana parallela; ergo erunt ipsa prismata aequalia. Eadem demonstratio valet de pyramidibus. Nam in pyramide erunt sectiones ipsi basi

similes, et singula latera in una pyramide erunt ad latera homologa in pyramide altera, in eadem data ratione; nempe in ratione distantiae basis a vertice ad distantiam sectionis ab eodem vertice, quae quidem ratio eadem est, ut patet, quum pyramides terminentur plano basium, et alio plano sectionum planis parallelo. Numerus etiam sectionum aequalis est altitudini, seu eidem distantiae inter duo plana terminantia et parallela.

Corol. VII. Pyramides basium aequalium in eumdem apicem desinentes, vel eamdem utcumque altitudinem habentes sunt aequales. Nam per communem verticem ductum intelligatur planum basium planis parallelum; pyramides semper erunt super aequalibus basibus et in iisdem planis parallelis. Similiter si bases in eodem plano constituantur, vertices in eadem altitudine ad idem planum basibus parallelum terminabuntur.

Corol. VIII. Si pyramides eamdem habeant altitudinem; erunt inter se, ut bases. Etenim basis maior divisa intelligatur, si fieri possit, in partes basi minori aequales. Concipi poterit pyramis maior tamquam composita ex diversis pyramidibus, quae basim habeant basi minori aequalem; sed pyramides illae singulae erunt minori pyramidi aequales, ergo pyramis maior est ad minorem, ut pyramidum aequalium numerus in maiori pyramide, ad pyramidem minorem, hoc est, pyramides illae sunt inter se, ut bases.

At si basis maior minorem basim non conti-

neret accurate, sed tamen habeant aliquam communem mensuram; dividi fingantur bases in partes huic mensurae communi aequales. Iam pyramides duae tot alias continebunt pyramides aequales, quot sunt in utraque pyramide partes communes, ac proinde pyramides sunt etiam, ut bases.

Def. IV. Si recta sublimis BD motu sibi sem- 44.
per parallelo, circuli circumferentiam BGEH radat, figura solida hoc motu genita, *cylindrus* dicitur.

Def. V. At si recta AG per aliquod punctum 46.
fixum, et sublime A perpetuo transiens, altera extremitate G radat circuli circumferentiam GFMO, solidum AGM hoc motu genitum, *conus* vocatur. Vtriusque autem figurae *basis* vocatur circulus, cuius circumferentiam recta percurrit. Patet, cylindrum duobus circulis, conum autem circulo unico terminari. Recta per utrisque circuli centrum in cylindro transiens, in cono autem per basis centrum ipsumque coni verticem, *axis* dicitur. Si axis sit perpendicularis basi, cylindrus vel conus *rectus* solidum genitum appellatur, secus autem *obliquus* vocatur. Si autem basis fuerit quaevis alia curva, solidum dicitur *cylindricum* vel *conoidicum*. Figura 44. refert cylindrum rectum, figura autem 46. conum rectum
repraesentat. Si semicirculus AHB circa immo- 47.
tam diametrum AB in orbem ducatur, donec ad pristinum situm redeat, solidum inde genitum *sphaera* dicitur.

Corol. I. Si basis prismatis vel pyramidis, au-

Fig. cto numero laterum et imminuta magnitudine in infinitum, abeat in curvam continuam, prisma abit in solidum cylindricum, pyramis in conoidicum. Item prisma, cuius latera sunt perpendicularia basi, mutatur in cylindrum rectum; pyramis vero, in qua basis latera sunt aequalia, et distantiae a vertice aequales, abit in conum rectum.

47. *Corol. II.* Si sphaera plano quovis secetur, sectio erit circulus HIFO, qui erit omnium maximus, si sectionis planum transeat per centrum sphaerae C, ac deinde erit maior vel minor, prout planum sectionis minus vel magis recedet a centro sphaerae. Sit enim sectio FIH, ad cuius planum ducatur diameter perpendicularis AB, quae plano secanti occurrat in E. Si punctum E congruat cum centro C; patet, rectas EI, EF fore radios sphaerae. Si autem cadat extra centrum, in triangulis CEI, CEF anguli ad E erunt recti, latus CE commune, et basis CI = CF; quare quodvis latus EI = EF, ac proinde in utroque casu sectio erit circulus, cuius centrum E; illud vero centrum in primo casu coincidet cum centro sphaerae. Patet autem, ob angulum rectum in E, radium circuli EF semper minorem fore radio sphaerae CF, nisi radii illi congruant, abeunte E in C. Evidens etiam est, eo minorem fore chordam HF, nempe circuli diametrum, quo maior fuerit distantia CE.

Corol. III. Sphaera considerari potest tamquam composita ex pyramidulis aequalibus numero infinitis et infinite parvis, quarum bases

sunt in ipsa sphaerae superficie, vertex autem communis est ipsum sphaerae centrum.

Schol. In capite praecedenti, ubi prismata et pyramides inter se comparavimus, aliqua dubitatio suboriri posset, quod nempe solida e superficiebus composita habere videamur. Et re quidem vera linea producitur motu continuo puncti, superficies motu continuo lineae, solidum motu continuo superficiei. At linea non ex punctis, sed ex lineolis; superficies ex areolis, non ex lineis; solidum ex spatiolis solidis, non ex superficiebus componitur. Neque genuinam linearum, superficierum et solidorum notionem tironibus proponunt nonnulli magistri, qui lineas tamquam e punctis, superficies ex lineis, solida ex superficiebus composita repraesentant. Itaque dum (*corolar. VI. cap. praeced.*) ex sectionum aequalitate prismatum et pyramidum aequalitatem concludimus, id non debet intelligi, quasi prismata et pyramides ex sectionibus planis componi velimus. Nam loco sectionis unius considerari possent sectiones duae infinite proximae, quarum (*in cit. corol.*) eadem foret distantia sive altitudo, ut patet ex planorum parallelismo. Igitur minima solida duabus sectionibus infinite vicinis comprehensa, forent aequalia in casu proposito, quare communem altitudinem negligere licuit solamque sectionum aequalitatem considerare; id vero facere numquam licet, nisi praeter sectionum aequalitatem ibi aequalis etiam sint binarum quarumcumque indefinite proximarum distantiae. Porro evidens est, hanc metho-

Fig. dum ad *exhaustionum* methodum saepius explicatam reduci, ac proinde ad severitatem geometricam esse omnino compositam.

CAPVT II.

De solidorum mensura.

PROBLEMA I.

39. PRISMATIS AGREFO, CVIVS LATERA RECTILINEA SVNT BASI PERPENDICVLARIA, SVPERFICIEM METIRI.

Singulae prismatis facies in hoc casu sunt rectangula AGFE, GFOR, AEOR sub singulis lateribus basis singulisque prismatis lateribus rectilineis contenta; ideoque omnium huiusmodi rectangulorum summa est tota basis perimeter in latus rectilineum ducta. Quare prismatis superficies, demtis basibus, est producto ex perimetro basis in unum ex lateribus rectilineis. Huic producto addatur dupla basis superficies; habebitur superficies tota prismatis.

Corol. I. Quum sex quadratis aequalibus ter-
41. minetur cubus ACEG, habebitur tota cubi superficies, si quadrati unius superficies sexies su-
40. matur. Quia vero parallelepipedum DK, BG sex terminatur superficiebus, quarum duae quaelibet oppositae sunt aequales; inveniantur tres inaequales superficies, illarumque summa bis sumatur: habebitur tota parallelepipedi superficies.

Corol. II. Quum basis cylindri BGEH consi- Fig.
derari possit, tamquam polygonum regulare ex 44.
lateribus numero infinitis et infinite parvis compositum; cylindrus haberi poterit tamquam prisma *infinitilaterum*: cuius proinde superficies habebitur, si tota basis perimeter seu circuli circumferentia ducatur in altitudinem, et producto addatur dupla basis sive dupla circuli superficies.

PROBLEMA II.

PYRAMIDIS DGA, CVIVS LATERA OMNIA SVNT 42.
AEQVALIA, ET BASIS LATERA SINT ETIAM AEQVALIA, SVPERFICIEM INVENIRE.

Quum facies omnes pyramidis in hoc casu sint triangula isoscelia aequalia DAF, FAG, GAE, EAH, HAD; erit omnium triangulorum summa aequalis dimidio producto ex tota basis perimetro in perpendiculum ex vertice pyramidis ad latus quodlibet basis demissum, quod dicitur vulgo *apathegma*: nam triangulum quodlibet aequatur dimidio producto ex latere basis ducto in suum perpendiculum. Haec autem singula perpendicula sunt aequalia; habebitur ergo in hoc casu pyramidis superficies, demta basi, *si basis perimeter ducatur in apothegma rectum.*

Corol. I. Conus est pyramis *infinitilatera*; ac proinde coni recti superficies aequalis est dimidio producto ex circumferentia basis in longitudinem, sive latus coni, sive in apothegma rectum, demta tamen basi.

Fig. dum ad *exhaustionum* methodum saepius explicatam reduci, ac proinde ad severitatem geometricam esse omnino compositam.

CAPVT II.

De solidorum mensura.

PROBLEMA I.

39. PRISMATIS AGREFO, CVIVS LATERA RECTILINEA SVNT BASI PERPENDICVLARIA, SVPERFICIEM METIRI.

Singulae prismatis facies in hoc casu sunt rectangula AGFE, GFOR, AEOR sub singulis lateribus basis singulisque prismatis lateribus rectilineis contenta; ideoque omnium huiusmodi rectangulorum summa est tota basis perimeter in latus rectilineum ducta. Quare prismatis superficies, demtis basibus, est producto ex perimetro basis in unum ex lateribus rectilineis. Huic producto addatur dupla basis superficies; habebitur superficies tota prismatis.

Corol. I. Quum sex quadratis aequalibus ter-
41. minetur cubus ACEG, habebitur tota cubi superficies, si quadrati unius superficies sexies su-
40. matur. Quia vero parallelepipedum DK, BG sex terminatur superficiebus, quarum duae quaelibet oppositae sunt aequales; inveniantur tres inaequales superficies, illarumque summa bis sumatur: habebitur tota parallelepipedi superficies.

Corol. II. Quum basis cylindri BGEH consi- Fig.
derari possit, tamquam polygonum regulare ex 44.
lateribus numero infinitis et infinite parvis compositum; cylindrus haberi poterit tamquam prisma *infinitilaterum*: cuius proinde superficies habebitur, si tota basis perimeter seu circuli circumferentia ducatur in altitudinem, et producto addatur dupla basis sive dupla circuli superficies.

PROBLEMA II.

PYRAMIDIS DGA, CVIVS LATERA OMNIA SVNT 42.
AEQVALIA, ET BASIS LATERA SINT ETIAM AEQVALIA, SVPERFICIEM INVENIRE.

Quum facies omnes pyramidis in hoc casu sint triangula isoscelia aequalia DAF, FAG, GAE, EAH, HAD; erit omnium triangulorum summa aequalis dimidio producto ex tota basis perimetro in perpendiculum ex vertice pyramidis ad latus quodlibet basis demissum, quod dicitur vulgo *apathegma*: nam triangulum quodlibet aequatur dimidio producto ex latere basis ducto in suum perpendiculum. Haec autem singula perpendicula sunt aequalia; habebitur ergo in hoc casu pyramidis superficies, demta basi, *si basis perimeter ducatur in apothegma rectum.*

Corol. I. Conus est pyramis *infinitilatera*; ac proinde coni recti superficies aequalis est dimidio producto ex circumferentia basis in longitudinem, sive latus coni, sive in apothegma rectum, demta tamen basi.

Fig. *Corol. II.* Si pyramis DAG plano basi paral-
42. lelo *truncata* ponatur, facies omnes reliquae pyramidis versus basim DFdf, FGfg, GEge, EHeh, DHdh, abeunt in trapezia aequalia; haec autem trapezia singula dividi possunt in triangula duo aequalia, quorum bases sunt sectionis et basis latera, altitudo autem communis est ipsarum basium distantia perpendicularis. Quare singulorum triangulorum mensura est dimidium productum ex singulis basibus in ipsam basium distantiam, ac proinde superficies pyramidis truncatae DGdg, aequatur dimidio producto ex summa perimetri basis et sectionis in distantiam perpendicularem basium, *sive in apothegma truncatum.*

46. *Corol. III.* Si conus rectus plano basi parallelo BC truncatus ponatur, coni huius truncati versus basim superficies GMBC, aequalis est dimidio producto ex peripheriarum summa in coni truncata longitudinem sive latus seu apothegma BG. Res autem facilius obtinetur, si inveniatur circulus DE, cuius peripheria aequalis sit semisummae peripheriarum BC, GM. Sumatur nempe punctum D medium inter B et G, ducaturque recta DE parallela sectioni BC, haec erit diameter circuli quaesiti. Etenim ductis perpendicularibus Bf, Dh: erit ob triangulorum DBf, DGh similitudinem Bf : Df = Dh : Gh, ac proinde, ob Bf = Dh, erit etiam Df = Gh; quare eadem est differentia inter diametros BC et DE, quae est inter diametros DE et GM; illa nempe differentia est dupla rectae Df vel Gh; ideoque recta DE est media proportionalis arit-

metica inter BC et GM, seu quod idem est, dia- Fig.
meter DE aequalis est semisummae diametrorum BC et GM. Sed circuli, utpote figurae similes, suas habent peripherias diametris proportionales (*schol. cap. III.*); ergo circumferentia circuli, diametro DE descripti, est media proportionalis arithmetica inter circumferentias diametris BC et GM descriptas. Habebitur ergo coni truncati BCGM superficies, si multiplicetur circuli medii DE circumferentia per latus coni BG, seu per huius apothegma rectum.

Corol. IV. Si concipiatur cylindrus rectus KQTM circumscriptus sphaerae, habens pro axe 48.
diametrum AB, pro basi circulum sphaerae maximum; superficies segmenti sphaerae HAF aequalis erit superficiei cylindri QNRK, et area totius sphaerae erit aequalis areae totius cylindri, demtis basibus. Etenim concipiatur particula quaevis Ff circuli *genitoris* ita parva, ut infinite accedat ad lineam rectam, productaque Ff et BA usque in G, recta FfG generabit superficiem coni recti, et Ff superficiem coni truncati, cuius mensura erit ipsa Ff ducta in semisummam peripheriarum, quarum radii sunt EF et ef. Ducta autem fx in EN perpendiculari, et PO ita, ut peripheria radio PO descripta aequalis sit semisummae peripheriarum praedictarum; erit coni truncati superficies, ut recta Ff ducta in circumferentiam, cuius radius est PO (*corol. praeced.*). Iam vero ob triangula similia rectangula fxF, GEF, Gf, GPO, OPC, erit fx vel Ee vel Nn: Ff = GE : GF = GP : GO = PO : CO vel EN,

ob EN $=$ BT $=$ CO (*sunt enim radii eiusdem circuli*), ideoque $Nn \times EN = fF \times PO$, atque ideo quum peripheriae sint, ut radii; erit productum ex Nn in peripheriam radio EN descriptam aequale producto ex fF in peripheriam radio PO descriptam. Primum autem productum exprimit aream genitam ab Nn, alterum vero aream genitam ab Ff. Quare tota area genita a toto arcu AfF aequatur toti areae genitae a recta QN; et abeunte REN in MBT, tota sphaerae superficies totius cylindri superficie aequalis est, demtis basibus.

Corol. v. Superficies sphaerae aequalis est producto ex circumferentia circuli maximi in axem sive diametrum sphaerae, ac proinde circuli maximi superficie quadruplo maior est (*cor. 1. theorem. 11. cap. 11.*).

Corol. vi. Superficies tota cylindri circumscripti, inclusis basibus, est ad totam sphaerae superficiem, ut 3 ad 2. Nam superficies lateralis cylindri quadruplo maior est area circuli maximi, *cui si addantur duae superficies basium; fit tota superficies cylindri sexies maior sua basi seu circulo maximo.* Superficies autem sphaerae in hoc casu basi cylindri seu circulo maximo quadruplo maior est. *Proinde erit superficies sphaerae ad superficiem cylindri circumscripti,* ut 4, 6, seu ut 2, 3.

PROBLEMA III.

Prismatis soliditatem metiri.

Polygonum, seu quaelibet figura ABCD, quae 50.
prismatis basis est, in ipsam prismatis altitudinem ducatur: habebitur soliditas tota prismatis, ut patet ex genesi ipsius solidi, quod producitur motu parallelo basis, ac proinde basis sive polygoni superficies per altitudinem multiplicari debet. *Nempe sectiones basi parallelae ipsi aequales sunt, atque etiam tot numero exsistunt sectiones, quot in altitudine continentur* (corol. vii. cap. 1.).

Corol. 1. Soliditas cubi ACEG habetur mul- 41.
tiplicando faciem quadratam basis ABCD, per ipsum quadrati latus AE. Parallelepipedi AFDK 40.
soliditas invenitur, si parallelogrammi DCHK superficies per altitudinem AD multiplicetur. Habetur autem soliditas cylindri BF, si basis cir- 44.
culi, nempe superficies BGEH, in altitudinem cylindri BD ducatur.

Corol. 11. Eadem in solidorum mensura ratiocinatione instituta, quam in metiendis superficiebus adhibuimus (*schol. ad theor. 111. cap. 11.*), evidens est, cubum esse communem solidorum mensuram, non secus ac quadratum est mensura superficierum. Itaque pes solidus continet pollices cubicos 1728, nempe tres habet dimensiones, quarum singulae 1 pedi sive 12 pollicibus aequantur: et ita dicendum de alia qualibet mensura.

Fig.

PROBLEMA IV.

PYRAMIDIS SOLIDITATEM INVENIRE.

49. Si ad centrum I cubi GL fiat quadrata pyramis, cuius basis QZLO sit cubi facies quadrata, et altitudo IP dimidia altitudine cubi, evidens est, totam cubi soliditatem dividi in sex huiusmodi pyramides quadrilateras aeque altas et aequalium basium; ac proinde aequales. Igitur pyramis quaelibet erit sexta pars cubi. Sed cubi mensura aequalis est producto ex basi in altitudinem. Ergo illarum pyramidum quaelibet erit aequalis producto ex basi in sextam partem altitudinis HP, vel quod idem est, tertiam partem altitudinis HI. Ergo huiusmodi pyramidis soliditas aequalis est producto ex basi in tertiam partem altitudinis, seu, quod idem est, aequator tertiae parti prismatis eiusdem basis et eiusdem altitudinis.

Generatim pyramis quaelibet aequalis est producto ex basi in tertiam partem altitudinis, sive pyramis quaelibet est tertia pars prismatis eamdem cum ipsa pyramide basim habentis, eamdemque altitudinem. Etenim sit pyramis quaelibet, fingaturque cubus, cuius altitudo sit altitudinis pyramidis dupla. Iam si ex centro cubi alia exeat pyramis, cuius basis sit facies quadrata cubi; evidens est, hanc pyramidem habere eamdem cum proposita pyramide altitudinem, ac proinde pyramides illae sunt inter se, ut bases (*corol. VIII. theor. I. cap. praeced.*). Sed so-

liditas pyramidis cubi basi innixae aequalis est producto ex tertia parte altitudinis in basim; ergo ob altitudinem eamdem in utraque pyramide erit soliditas propositae pyramidis aequalis producto ex tertia parte altitudinis in basim. Ideoque generatim pyramis quaelibet est tertia pars prismatis eiusdem basis et altitudinis.

Corol. I. Quum cylindrus tamquam prisma infinitilaterum, itidemque conus tamquam pyramis infinitilatera considerari possint; erit conus tertia pars cylindri eamdem habentis basim et eamdem altitudinem.

Corol. II. Quum sphaera haberi possit tamquam composita ex infinitis pyramidulis, quarum vertex communis est in centro sphaerae; bases autem omnes simul sumtae totam occupant sphaerae superficiem; singulae illae pyramides aequales sunt producto ex tertia parte radii in suas bases, ac proinde tota pyramidum summa aequalis est producto ex omnibus basibus simul sumtis, hoc est, ex superficie sphaerae in tertiam partem radii. Ergo tota sphaerae soliditas habebitur, multiplicando tertiam radii partem per circuli maximi superficiem quater sumtam.

Corol. III. Quum soliditas cylindri sit productum ex diametro in circulum maximum, soliditas sphaerae aequalis est duabus tertiis partibus cylindri circumscripti. *Si nempe peripheria circuli maximi sit* $= p$, *et radius* $= r$, *erit area circuli maximi* $= \frac{1}{2}\, pr$, *adeoque soliditas cylindri circumscripti* $= pr^2$. *Soliditas vero sphaerae est* $= 2pr \times \frac{1}{3}\, r = \frac{2}{3}\, pr^2$. *Proinde erit soli-*

ditas sphaerae ad soliditatem cylindri circumscripti $= \frac{2}{3} pr^2 : pr^2 = \frac{2}{3} : 1 = 2 : 3$.

THEOREMA I.

SOLIDA DVO SIMILIA SVNT IN RATIONE TRIPLICATA LATERVM HOMOLOGORVM.

Ex solidorum definitione et ex praecedentibus propositionibus evidens est, corporis cuiuslibet soliditatem esse semper, ut productum ex aliqua superficie in aliquem axem vel aliquam altitudinem. Superficies autem ex duabus dimensionibus componitur. Ergo solidum quodlibet est in ratione composita trium dimensionum homologarum seu eiusdem nominis; sed solida similia ea dicuntur, quae singulas dimensiones homologas habent proportionales; ergo solida similia sunt in ratione composita ex tribus dimensionibus proportionalibus; ac proinde in ratione triplicata unius cuiuslibet dimensionis homologae.

Corol. I. Sphaerae sunt in ratione triplicata diametrorum. Etenim sphaerarum soliditates sunt inter se, ut circuli maximi superficies in radium ducta * (*corol. II. theor. praeced.*). Sed circulorum superficies sunt in ratione duplicata semidiametrorum (*corol. I. theor. III. sect. praeced.*); ergo sphaerae sunt in ratione triplicata semidiametrorum vel diametrorum. Idem facile patet ex sphaerarum similitudine. Quum enim sphaerarum soliditates per circuli maximi superficiem determinentur, sintque circuli figurae similes; evidens est, sphaeras esse solida similia, ac proinde in ratione triplicata diametrorum.

Corol. II. Cubi sunt solida similia, itemque similes sunt cylindri sphaeris circumscripti (*corol. III. probl. praeced.*). Ergo cubi sunt in ratione triplicata laterum, et cylindri sphaeris circumscripti sunt in ratione triplicata diametrorum.

Corol. III. Prismata omnia, si inter se comparentur, ac pyramides omnes inter se erunt ut producta ex basibus et altitudinibus. Quare si bases fuerint aequales, erunt solida ut solae altitudines; si autem altitudines fuerint aequales, erunt ut solae bases. Si ea solida fuerint aequalia, altitudines erunt basibus reciproce proportionales. Et versa vice, si bases fuerint altitudinibus reciproce proportionales, solida erunt aequalia. Tandem si bases fuerint similes, et altitudines lateribus basium homologis proportionales, solida erunt in ratione triplicata laterum homologorum vel altitudinum.

Schol. De solidorum rectorum superficiebus in capite praecedenti sermonem habuimus. Verum si solida fuerint obliqua, superficierum mensura sublimiorem geometriam aliquando postulat. Quod spectat ad solida superficiebus planis terminata, res est nullius difficultatis. Quum enim solidorum

* *Hoc est, soliditates sphaerarum sunt, ut quattuor circuli maximi superficies ductae in* $\frac{1}{3}$ *radii; sed quantitatum partes determinatae sunt, ut quantitates ipsae: proinde valet etiam proportio Auctoris.*

Fig. illorum facies sint polygona rectilinea, ad triangulorum superficiem reduci semper poterit illorum mensura. Prismatis cuiusvis exemplo rem illustrabimus. Per punctum quodlibet in aliquo prismatis latere traductum intelligatur planum ad latus illud perpendiculare; idem planum alia omnia prismatis latera, utpote parallela, perpendiculariter quoque secabit (*cor v. theor. I. cap. I. sect. II.*), atque sectio erit polygonum, cuius unumquodque latus ad duo parallela prismatis latera erit perpendiculare. Quare superficies uniuscuiusque faciei aequabitur producto ex unoquoque sectionis latere in prismatis latus quodlibet, ob laterum omnium aequalitatem; ac proinde prismatis superficies aequatur producto ex omnibus lateribus sectionis, hoc est, ex tota sectionis perimetro in prismatis latus quodlibet seu eius oporhegma. Iam si prisma rectum ponatur, planum lateri perpendiculare coincidit cum basi, ideoque superficies prismatis aequalis est producto ex perimetro basis in altitudinem, ut antea, quod idem valet in superficie cylindri, qui potest considerari tamquam prisma infinitilaterum. At si rectus non fuerit cylindrus AC,
45. planum per cylindri axem vel latus quodlibet perpendiculariter traductum GMIM sectione sua cum cylindro obliquo generabit curvam, quae *ellipsis* vocatur a geometris, de qua in append. mox addenda pauca dicemus. Erit autem cylindri obliqui superficies aequalis producto ex ellipsis GMIM circumferentia in latus cylindri seu apothegma AB. Quod spectat ad coni obliqui superficiem, patet, eam ad sectoris circularis su-

perficiem, ut fit in cono recto, reduci non posse, quum in cono obliquo aequales non sint lineae omnes ductae ex vertice coni in basim. Sed haec pauca monuisse satis sit; haec enim ad geometriae elementa non pertinent.

APPENDIX.

De lineis curvis.

Lineae curvae notionem ita simplicem esse iam observavimus, ut explicatione ulla vix clarior effici possit. Quare praetermissa definitione, de lineis curvis generatim, et deinde de parabola et ellipsi pauca exponemus, alia deinde, ubi necessitas occurret, demonstraturi.

Def. I. In curva qualibet recta AD lineas parallelas, ut Mm; Nn, aequaliter dividens, *diameter* curvae appellatur. *Axis* autem vocatur, si easdem parallelas ad angulos rectos secet. 52.

Def. II. Punctum A in axe *vertex* curvae dicitur: rectae autem parallelae Mm, Nn dicuntur *ordinatae:* pars diametri vel axis inter punctum A et ordinatam comprehensa, dicitur *abscissa. AEquatio* curvae appellatur formula algebraica, quae relationem inter semiordinatas et abscissas exprimit. Ita demonstratum est, in circulo quadratum rectae EO aequale esse produ- 24.
cto ex CO in OL. Iam diameter CL dicatur a, sitque CO $= x$, et EO $= y$. Erit OL $= a - x$; ac proinde $y^2 = ax - x^2$, quae est aequatio ad circulum.

Fig. illorum facies sint polygona rectilinea, ad triangulorum superficiem reduci semper poterit illorum mensura. Prismatis cuiusvis exemplo rem illustrabimus. Per punctum quodlibet in aliquo prismatis latere traductum intelligatur planum ad latus illud perpendiculare; idem planum alia omnia prismatis latera, utpote parallela, perpendiculariter quoque secabit (*cor v. theor. I. cap. I. sect. II.*), atque sectio erit polygonum, cuius unumquodque latus ad duo parallela prismatis latera erit perpendiculare. Quare superficies uniuscuiusque faciei aequabitur producto ex unoquoque sectionis latere in prismatis latus quodlibet, ob laterum omnium aequalitatem; ac proinde prismatis superficies aequatur producto ex omnibus lateribus sectionis, hoc est, ex tota sectionis perimetro in prismatis latus quodlibet seu eius oporhegma. Iam si prisma rectum ponatur, planum lateri perpendiculare coincidit cum basi, ideoque superficies prismatis aequalis est producto ex perimetro basis in altitudinem, ut antea, quod idem valet in superficie cylindri, qui potest considerari tamquam prisma infinitilaterum. At si rectus non fuerit cylindrus AC,
45. planum per cylindri axem vel latus quodlibet perpendiculariter traductum GMIM sectione sua cum cylindro obliquo generabit curvam, quae *ellipsis* vocatur a geometris, de qua in append. mox addenda pauca dicemus. Erit autem cylindri obliqui superficies aequalis producto ex ellipsis GMIM circumferentia in latus cylindri seu apothegma AB. Quod spectat ad coni obliqui superficiem, patet, eam ad sectoris circularis su-

perficiem, ut fit in cono recto, reduci non posse, quum in cono obliquo aequales non sint lineae omnes ductae ex vertice coni in basim Sed haec pauca monuisse satis sit; haec enim ad geometriae elementa non pertinent.

APPENDIX.

De lineis curvis.

Lineae curvae notionem ita simplicem esse iam observavimus, ut explicatione ulla vix clarior effici possit. Quare praetermissa definitione, de lineis curvis generatim, et deinde de parabola et ellipsi pauca exponemus, alia deinde, ubi necessitas occurret, demonstraturi.

Def. I. In curva qualibet recta AD lineas parallelas, ut M*m*; N*n*, aequaliter dividens, *diameter* curvae appellatur. *Axis* autem vocatur, si easdem parallelas ad angulos rectos secet. 52.

Def. II. Punctum A in axe *vertex* curvae dicitur: rectae autem parallelae M*m*, N*n* dicuntur *ordinatae*: pars diametri vel axis inter punctum A et ordinatam comprehensa, dicitur *abscissa*. *AEquatio* curvae appellatur formula algebraica, quae relationem inter semiordinatas et abscissas exprimit. Ita demonstratum est, in circulo quadratum rectae EO aequale esse produ- 24.
cto ex CO in OL. Iam diameter CL dicatur a, sitque CO$=x$, et EO$=y$. Erit OL$=a-x$; ac proinde $y^2=ax-x^2$, quae est aequatio ad circulum.

Corol. I. Ex his evidens est, ordinatas et abscissas curvae esse quantitates indeterminatas. Hae autem determinantur, sumtis pro arbitrio alterutrius quantitatis valoribus. Ita si in aequatione ad circulum fiat $x = 0, 1, 2, 3, 4$ cet. Et $a = 10$, invenietur $y = 0, 3, 4, \sqrt{21}, \sqrt{24}$ cet. Quare, si ex singulis punctis erigantur perpendiculares hoc modo determinatae, et per singulas perpendicularium extremitates ducatur curva, haec ad quaesitam curvam eo accuratius accedet, quo plures erunt huiusmodi perpendiculares. Ordinatae non solum ad axem, sed ad quamlibet diametrum referri possunt, atque etiam initium abscissarum non a solo diametri aut axis vertice computari potest, sed etiam ab aliis punctis. Ita in circulo abscissae computari possunt vel ab ipso diametri vertice vel etiam a centro, atque ita prodeunt diversae eiusdem curvae aequationes.

Schol. I. Verum quocumque modo curva consideretur, probe distingui debent rectae ad dexteram vel ad sinistram iacentes, et ideo dicuntur *positivae* vel *negativae*. Has quidem vel illas appellare licet positivas vel negativas *. At ubi appellatio determinata est, haec semper retineri debet. Quare semiordinatae et abscissae possunt esse vel negativae vel positivae. Ratio autem facile patet ex iis, quae de quantitatibus positivis

* *Vsus tamen obtinuit, ut quae ad dexteram diametri iacent, sint positivae; quae ad sinistram, negativae.*

et negativis in algebra observavimus (*schol. ad* Fig.
probl. IV. cap. III.).

Schol. II. Curva quaelibet considerari potest vel tamquam curva *polygona*, vel tamquam curva *accurata*. Primus considerandi modus nihil aliud significat, nisi curvam esse polygoni inscripti et circumscripti *limitem*. Vnum autem probe observandum est in curvarum consideratione; si nempe curvam aliquam velut polygonam quis tractaverit, cavere deinde debet, ne eamdem curvam velut accuratam habeat, et vice versa. Atque etiam eadem regula tenenda est in duarum curvarum consideratione, ambae scilicet vel tamquam polygonae vel tamquam accuratae considerari debent; inde enim in rebus physicis orti sunt errores aliqui. Rem exemplo demonstra-
bimus. In circulo quocumque PQD, ducantur 51.
chordae aequales et infinitesimae PD, DE, producaturque PD in O, donec DO = PD. Praeterea agatur per puncta O et E recta OQ, et per punctum D tangens DN rectae OQ occurrens in N; erit OE = 2NE. Etenim triangulum DOE est isosceles; praeterea anguli ODE mensura est dimidius arcus PDE. *Nam angulus* ODE + PDE = 180° = $\frac{1}{2}$PQEP, *sed mensura anguli* PDE = $\frac{1}{2}$PQE; *ergo mensura anguli* ODE = $\frac{1}{2}$ PDE. Anguli autem NDE mensura est dimidius arcus DE (*theor. IV. cap. II. sect. I.*); ergo recta DN aequaliter dividit angulum ODE (*corol. I. theor. II. cap. II. sect. I.*); ideoque ob DO = DE, erit OE = 2NE. Iam ponatur, corpus aliquod describere arcum circuli infinitesi-

mum PDE, vi aliqua urgente secundum directionem datam, quae in loco D corpus a linea retrahat recta. Si consideratur circulus tamquam polygonum; chorda infinitesima PD erit spatiolum tempore praecedenti infinitesimo percursum, eritque DO lineola aequalis et in directum posita spatiolum alterum tempore subsequenti aequali descriptum. Quare si ducatur OE directioni vis in D agentis parallela, erit haec lineola OE vis huius effectus; vi enim illa corpus ex O transit ad arcum circuli. At si consideretur circulus tamquam accuratus, tangens DN erit lineola vi urgente descripta, ideoque NE vis huius effectus. Itaque in curva polygona vis effectus repraesentatur per OE, et in curva accurata per NE. Quare in virium mensura retinenda est eadem curvarum consideratio, alioquin effectus duplo maior aestimaretur. Verum quia in virium doctrina ipsarum virium effectus dumtaxat comparamus, res perinde se habet, quaecumque adhibeatur curvarum consideratio, *dummodo sit intra eamdem speciem*; eadem enim prodit effectuum proportio. Haec autem, quae modo explicavimus, referuntur ad virium centralium doctrinam in physica generali demonstradam.

Schol. III. Haec eadem doctrina ad curvam quamlibet transferri potest. Quod ut intelligatur, curvarum descriptionem generatim considerabimus. Curva quaelibet plana considerari solet tamquam ex motu puncti, et perpetua directionis mutatione in plano genita. Heic non agimus de

curvis, quarum puncta singula in eodem non sunt plano, et ideo dicuntur *duplicis curvaturae.* Itaque evidens est, curvam quamlibet ad lineas duas in plana positione datas, ordinatas nempe et abscissas, referendam esse; ad determinandam nempe alicuius curvae naturam, oportet, puncti mobilis vestigia secundum certam eamdemque legem ad rectas positione datas referri ita, ut punctum illud secundum eamdem omnino legem in quolibet infinitesimo mutatae directionis angulo moveatur: alioqui non eamdem, sed plures curvas describeret (*contra hyp.*). Ex hac curvarum consideratione aliqua sane utilissima colliguntur.

Corol. I. Recta curvam quamlibet in unico puncto tangit. Ponamus enim, rectam in duobus tribusve punctis contiguis curvam tangere; iam punctum mobile directionem perpetuo non mutaret, quod repugnat.

Corol. II. Si descriptus intelligatur circulus, qui communem cum data curva tangentem in aliquo puncto habeat ita, ut cuiuscumque circuli minoris, eamdem habentis tangentem, arcus aliquis, utrinque circa punctum contactus, sit intra curvam, cuiuscumque vero circuli maioris arcus sit extra curvam; hunc circulum dicimus curvae *osculatorem* in dato puncto, et curvae ipsius *curvaturam* dicimus *circulari curvaturae analogam.* Evidens autem est ex geometriae elementis, circuli osculatoris centrum positum esse in concursu duarum perpendicularium ad eamdem curvam, ubi puncta duo curvae ad se invicem in infinitum accedunt. Haec enim est circuli proprietas, ut rectae a centro ad peripheriam ductae sint ipsi peripheriae perpendiculares; (talis autem recta e centro circuli osculatoris ad curvam ducta vocatur *radius osculator*)

Corol. III. Quamvis inter tangentem et arcum circuli transire possint alii circuli innumeri, attamen inter arcum curvae et arcum circuli osculatoris nullus alius circulus transire potest; nam (*ex def.*) quicumque minor circulus est intra curvam; quicumque maior est extra ipsam. Tota circulorum osculatorum utilitas eo reducitur, ut omnium curvarum arcus infinitesimus considerari possit tamquam circularis. Etenim arcus infinitesimus circuli osculatoris, et arcus infinitesimus curvae easdem habent proprietates, quum radius sit ad circulum osculatorem et ad arcum infinitesimum curvae perpendicularis.

Corol. IV. Hinc definiri potest curvarum in quolibet puncto curvatura. Satis enim erit diversas circulorum osculatorum curvaturas inter se comparare; quod quidem facile fieri potest. Etenim evidens est, diversorum circulorum curvaturas esse in ratione reciproca radiorum. Quod ut intelligatur, fingamus, duas rectas aequales in circulum flecti, unam quidem in totam circumferentiam, alteram vero in semicircumferentiam tantum; manifestum est, semicircumferentiam duplo minus curvam esse quam circumferentiam integram; et duplo maior est radius circuli, ad quem semicircumferentia illa pertinet. Idem simili ratiocinatione patet, si recta eadem

in arcum duplo vel triplo maiorem incurvetur; et ita deinceps. Comparari ergo inter se possunt diversae curvarum curvaturae, atque etiam variae eiusdem curvae in diversis punctis curvaturae. Inveniatur nempe in diversis punctis radius circuli osculatoris, hoc est, circuli, qui curvam in dato puncto tangens cum ipsa curva ita congruat, ut inter curvam et circulum nullus alius circulus transire possit. Et quidem quum aucto vel diminuto circuli radio, minuatur vel augeatur per gradus illius curvatura, si nullus sit circulus, qui propius quam circulus osculator ad curvam accedat, concludendum est, circulum cum ipsa curva in hoc puncto eamdem habere curvaturam. Ex his patet, finitam esse curvae alicuius curvaturam, si finitus sit radius osculator; at si radius osculator sit infinitus, curvatura est nulla; tandem si radius osculator $=0$, curvatura est infinita. Ceterum haec omnia facilius intelligentur, si revocentur in memoriam, quae de methodo *exhaustionum*, et de *primis* ac *ultimis rationibus* iam explicata sunt. Haec pauca, quorum usus in physicis institutionibus recurret, ex sublimiori doctrina delibasse satis sit. Superest, ut parabolae et ellipseos naturam breviter exponamus.

De parabola.

Defin. Si in axe AD sumantur abscissae quotlibet AF, AP, et ad singula puncta erigantur semiordinatae FM, PN, ea lege; ut abscissae sem- 52.

per sint, ut quadrata ordinatarum; curva per singulas ordinatarum extremitates transiens, dicitur *parabola.*) Iam abscissa dicatur x, et ordinata y, erit semper x, ut y^2; ac proinde ratio ordinatarum ad abscissas constans et eadem manet.

Quare si p sit quantitas constans, erit $\frac{yy}{x}=p$, ac proinde $y^2=px$, quae est aequatio ad parabolam. Nempe in omni parabola quadratum ordinatae aequale est producto ex abscissa in quantitatem constantem, haec autem quantitas constans *parameter* dicitur. (Si in axe parabolae abscindatur recta AF, quae sit quartae parametri parti aequalis, punctum F parabolae *focus* appellatur.)

Corol. I. Quoniam crescente abscissa, crescit etiam quadratum ordinatae, evidens est, parabolam non esse curvam in se redeuntem, sed puncta illius singula ab axe perpetuo recedere in infinitum.

Corol. II. Data abscissa qualibet eiusque ordinata, inveniri semper poterit parameter; quum sit tertia proportionalis ad abscissam et ordinatam.

Corol. III. Si abscissa ponatur $=0$, fit quoque ordinata M$m=0$, ac proinde puncta M, m coërunt in A, nempe in axis vertice. Quare si per verticem parabolae ducatur recta ordinatis parallela, haec erit tangens parabolae in puncto A.

Corol. IV. Ducta intelligatur secans per punctum N, quae parabolae occurrant in alio puncto t, ex quo demittatur perpendicularis tp ad

quam ex puncto N demittatur perpendicularis Nq axi parallela. Sit PT$=s$, AP$=x$, PN$=y$; erit PT (s): PN (y) $=$ Nq (f); $qt=\frac{fy}{s}$; ac proinde $bt=$PN$+qt=y+\frac{fy}{s}$, et A$b=x+f$.

Iam sumatur aequatio ad curvam, in puncto t erit $bt^2=$A$b\times p$, hoc est, $y^2+\frac{2fy^2}{s}+\frac{f^2y^2}{s^2}=px+pf$ deletisque in hac aequatione terminis aequalibus: $y^2=px$, fiet $\frac{2fy^2}{s}+\frac{f^2y^2}{s^2}=pf$ et dividendo per f, erit $\frac{2y^2}{s}+\frac{fy^2}{s^2}=p$. Iam puncta N et t ad se invicem accedant in infinitum, mutuoque coëant; secans abit in tangentem, fitque Nq, vel P$b=0$: quare $f=0$, et $\frac{fy^2}{s^2}=0$, ac proinde aequatio praecedens abit in hanc $\frac{2y^2}{s}=p$, et $2y^2=ps$, seu ob $px=y^2$, fiet $2px=ps$, $2x=s=$PT. Igitur in parabola recta PT, quae *subtangens* dicitur, dupla est abscissae AP.

Corol. V. Recta FN ducta ex foco parabolae

Fig. ad extremitatem ordinatae cuiuslibet, aequalis est abscissae AP, et quartae parti parametri. Nam quum sit $PF = AP - AF = x - \frac{1}{4}p$, vel $= \frac{1}{4}p - x$, prout ordinata iacet supra vel infra punctum F; erit $PF^2 = (AP - AF)^2 = x^2 - \frac{1}{2}px + \frac{1}{16}p^2$. Praeterea $PN^2 = px$, ergo $FN^2 = PF^2 + PN^2 = x^2 - \frac{1}{2}px + \frac{1}{16}pp + px = x^2 + \frac{1}{2}px + \frac{1}{16}pp$, et $FN = x + \frac{1}{4}p = AP + AF$.

Corol. VI. Si per punctum contractus ducatur recta QS axi parallela, angulus GNS aequalis est angulo FNT. Nam angulus GNS aequatur angulo FTN: praeterea triangulum FTN est isosceles ob $FN = AP + AF = AT + AF = FT$, ac proinde angulus GNS aequalis est angulo FNT. (*corol. II. theor. II. cap. III. sect. I.*) Haec est tangentis proprietas, quae in physicis institutionibus erit utilitatis maximae.

DE ELLIPSI.

53. *Def.* Si in axe HI sumantur abscissae quotlibet, et ad singula puncta erigantur ordinatae FN et PM ea lege, ut sit semper FN^2 ad PM^2 in ratione $LF \times FI$ ad $LP \times PI$; curva per singularum ordinatarum extremitates transiens vocatur *ellipsis*, quae in circulum abit, si quadrata ordinatarum sint aequalia producto ex segmentis abscissarum. Iam dicatur axis maior $HI = a$, ducaturque per punctum axis medium C recta BCD quae dicitur axis minor, sitque $BD = b$, $HP = x$

$PM = y$, $PI = a - x$, erit $\overline{a-x} \times x : y^2 = a^2 : b^2$

et $y^2 = \dfrac{ab^2x - b^2x^2}{a^2}$, quae est aequatio ad ellipsim, in qua si ponatur $a = b$, fit $y^2 = ax - xx$ aequatio ad circulum. Si abscissae computentur a centro C, sit $CP = x$, $PM = y$, fiatque $HI = 2a$; erit in hoc casu $aa - xx : y^2 = aa : bb$, et $y^2 = b^2 - \dfrac{b^2x^2}{a^2}$. Si ex minoris axis extremitate B, tamquam centro, et intervallo $BF = CL$, tamquam radio, describatur arcus circuli, axi maiori occurrens in punctis F et *f*, puncta illa vocantur ellipseos *foci*. Evidens autem est, haec puncta a centro ellipseos aequaliter distare, nam ob BC axi perpendicularem triangula CBF et CB*f* sunt aequalia.

Corol. I. Quum duo ellipseos axes sint constantes, constans etiam est recta iisdem duobus axibus tertia proportionalis; haec autem linea *parameter* dicitur. Quia autem duo sunt ellipseos axes, duo etiam sunt parametri; si nempe axis maior sit primus proportionis terminus, tertia proportionalis parameter axis maioris dicitur, et contra. Iam si abscissae ab axis extremitate computentur, sit axis maior a, minor b, parameter p; erit $ap = b^2$. Si autem abscissae computentur a centro, sit $2a$ axis maior, et $2b$ axis minor, erit $2ap = 4b^2$. His autem valoribus in utraque aequatione ad ellipsim substitutis, aequatio allipseos in primo casu fit $y^2 = px - \frac{px^2}{a}$; in casu altero habetur $y^2 = \frac{1}{2}ap - \frac{px^2}{2a}$.

Corol. II. Ex ellipseos aequatione evidens est, eam esse curvam in se redeuntem, et undique terminatam. Crescentibus enim abscissis a centro computantis, decrescunt ordinatae; ac tandem omnino evanescunt, si abscissa semiaxi aequalis sumatur. Manifestum est, mutua axium in centro C intersectione ellipsim in quattuor partes similes et aequales dividi, quum eadem sit ad quamlibet partem curvae aequatio; omnesque proprietates per inde se habeant. Quia vero ordinata perpendiculari N*n* perpetuo decrescente, puncta N et *n* coëunt in H; patet, tangentem in H esse perpendicularem.

Corol. III. Distantia focorum a centro facile invenitur. Nam quum sit BF = HC, erit

$$FC^2 = HC^2 - BC^2 = \overline{HC - BC} \times \overline{HC + BC}.$$

Quare distantia foci a centro est media proportionalis inter semiaxium summam illorumque differentiam. Praeterea ob triangulum BCF rectangulum erit $BC^2 = HC^2 - FC^2$, ac proinde HC — FC : BC = BC : HC + FC, seu HF : BC = BC : FI, nempe semiaxis minor est medius proportionalis inter foci unius distantias ab utroque axis maioris vertice.

Corol. IV. Ex ellipseos constructione, summa

rectarum BF et B*f* aequalis est axi maiori; at ponamus, eamdem manere summam in quolibet puncto, sitque RF + R*f* = HI. Dicatur $HC = a$, $BC = b$, ordinata $RS = y$, $CS = x$, $fC = c$; erit $IS = a - x$, $HS = a + x$, $fS = c - x$, $FS = c + x$, HF, vel $If = a - c$, H*f* vel $IF = a + c$. Iam vero quum sit (*per hypoth.*) $FR + fR = 2a$, si differentia inter FR et *f*R dicatur $2z$, erit $fR = a - z$, et $FR = a + z$. Iam ob triangula FRS et *f*RS rectangula erit $fS + SR = fR^2$, hoc est, $cc - 2cx + x^2 + y^2 = a^2 - 2az + z^2$. Praeterea $FS^2 + SR = FR^2$, hoc est $c^2 + 2cx + xx + y^2 = a^2 + 2az + zz$; habentur ergo aequationes duae, quarum prima si a secunda subtrahatur, fiet $4cx = 4az$, et $z = \frac{cx}{a}$, quo valore substituto in prima aequatione loco z, ideoque et $\frac{c^2x^2}{a}$ loco z^2, erit

$$c^2 - 2cx + xx + yy = aa - \frac{2acx}{a} + \frac{c^2x^2}{a^2},$$

factaque, ut moris est, reductione, habebitur $a^2c^2 + a^2x^2 + a^2y^2 = a^4 + c^2x^2$, et $a^2y^2 = a^4 - a^2c^2 - a^2x^2 + c^2x^2$ factaque divisione per $a^2 - c^2$ habetur $\frac{a^2y^2}{a^2 - c^2} = a^2 - x^2$; loco b^2 substituatur $a^2 - c^2$, fiet $\frac{a^2y^2}{b^2} = a^2 - x^2$ et tandem

$y^2 = \frac{a^2b^2 - b^2x^2}{a^2}$; quae est aequatio ad ellipsim antea inventa. Haec ergo est ellipseos proprietas, ut ductis ex utroque foco rectis, ad punctum perimetri quodlibet concurrentibus, rectarum illarum summa sit axi maiori semper aequalis. Hanc eamdem proprietatem ex aequatione ellipseos derivare facile est. Verum ex proprietate ipsa aequationem elicere placuit, ut exemplum esset tironibus, qua ratione ad aequationem curvae ex data aliqua proprietate pervenire liceat. Hinc evidens est, datis duobus ellipseos exibus, ellipsim facili manu describi posse; sumus nempe in axe maiori duobus punctis tamquam focis, his adfixum retineatur filum, atque per fili longitudinem ita promoveatur acus aliqua, ut filum perpetuo tensum maneat, acus motu suo ellipsis peripheriam percurret, ut patet ex perpetua partium fili et axis aequalitate.

Corol. v. Si ex puncto R in ellipseos perimetro ad utrumque focum f, F ducantur rectae FR, fR, et in linea producta FR sumatur RT$=$Rf, ducaturque Tf, ad quam per punctum medium E, et per punctum R agatur ER; haec erit tangens in R. Etenim ponamus, rectam ER ellipsi occurrere in alio puncto r. Ex hoc puncto r in recta RE agantur lineae rT, rf, rF. Quoniam (*per constr.*) TR$=$Rf, et fE$=$ET, erit RE perpendicularis ad fT, ac proinde singula puncta rectae ERr aequaliter distant a punctis f, T, ideoque $rf = r$T. Sed Fr + rT maior est, quam FT; ergo etiam Fr + rf maior est, quam FT; ideoque etiam maior, quam HI; quum (*per constr.*) sit FT $=$ HI. Quare punctum r non pertinet ad ellipsim; ergo recta RE tangit ellipsim in unico puncto R. Haec est utilissima in physicis institutionibus tangentis proprietas, quam quidem ex ellipseos aequatione, non secus ac in parabola fecimus, eruere licebat; sed diversas veritatis inveniendae vias tironibus demonstrare maxime convenit.

Schol. Parabolae et ellipseos aequationem consideravimus, ordinatis ad axem relatis. At ex demonstratis facile erit curvarum illarum aequationes invenire, si ordinatae ad diametrum quamlibet referantur: eadem est in singulis casibus curvarum illarum natura. Primarias dumtaxat proprietates demonstrare satis sit, alias enim, ubi necessitas postulaverit, in physicis institutionibus explicabimus. Praeterea etiam ad exercendum acuendumque ingenium aliquid tironibus relinquere oportunissimum est, idque postulat recta docendi ratio. *Sectiones conicae* appellantur parabolae et ellipsis, quibus etiam adnumerari debet *hyperbola*, de qua nullum verbum fecimus, utpote nullius fere usus in nostris physicis institutionibus futura. Denominationis ratio facile patebit, si tres illas curvas in coni sectione consideremus.

Sit ABC conus circulari basi insistens, et 54.
secetur plano quolibet IEM. Ponatur sectio alia KILM parallela basi, et occurrens priori sectioni in HI, intelligaturque sectio tertia priores duas

in EH, et KL perpendiculariter bisecans, atque etiam conum in triangulo ABC. Iam producto EH, donec ipsi AK occurrat in D, ductisque EF ac DG rectae KL parallelis, et occurrentibus sectioni triangulari in F et G, dicatur $EF = a$, $DG = b$, $ED = c$, $EH = x$, et $HI = y$, ob triangulorum EHL et EDG similitudinem,

erit $ED\ (c) : DG\ (b) = EH\ (x) : HL = \frac{bx}{c}$.

Simili modo, ob triangulorum DEF et DHK similitudinem, erit $DE\ (c) : EF\ (a) = DH\ (c - x)$

(Fig. 54.) vel $c + x$ (Fig. 55.) : $HK = \frac{ac \mp ax}{c}$.

Tandem quum sectio KIL parallela basi sit circulus, ut patet ex genesi ipsius coni, erit

$HK \times HL = HI^2$, hoc est, $\frac{abx}{c} \mp \frac{abxx}{cc} = yy$.

At si ponatur, sectionem ita se habere, ut ED non occurrat lateri AK, sed sit ipsi parallela; tunc erit $HK = EF = a$, ideoque $EF \times HL = HI^2$,

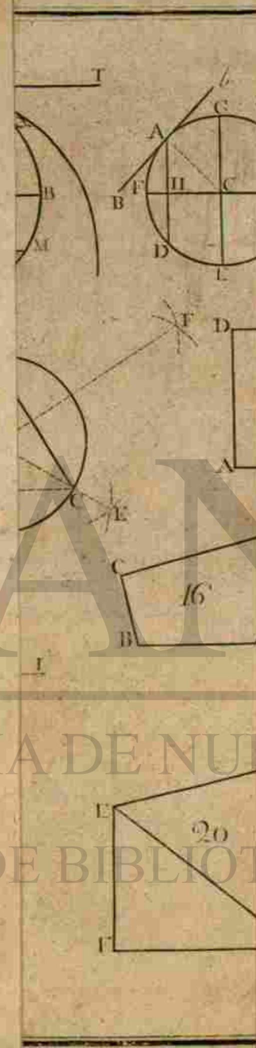
hoc est, $\frac{abx}{c} = y^2$. Si aequationes illas seorsum

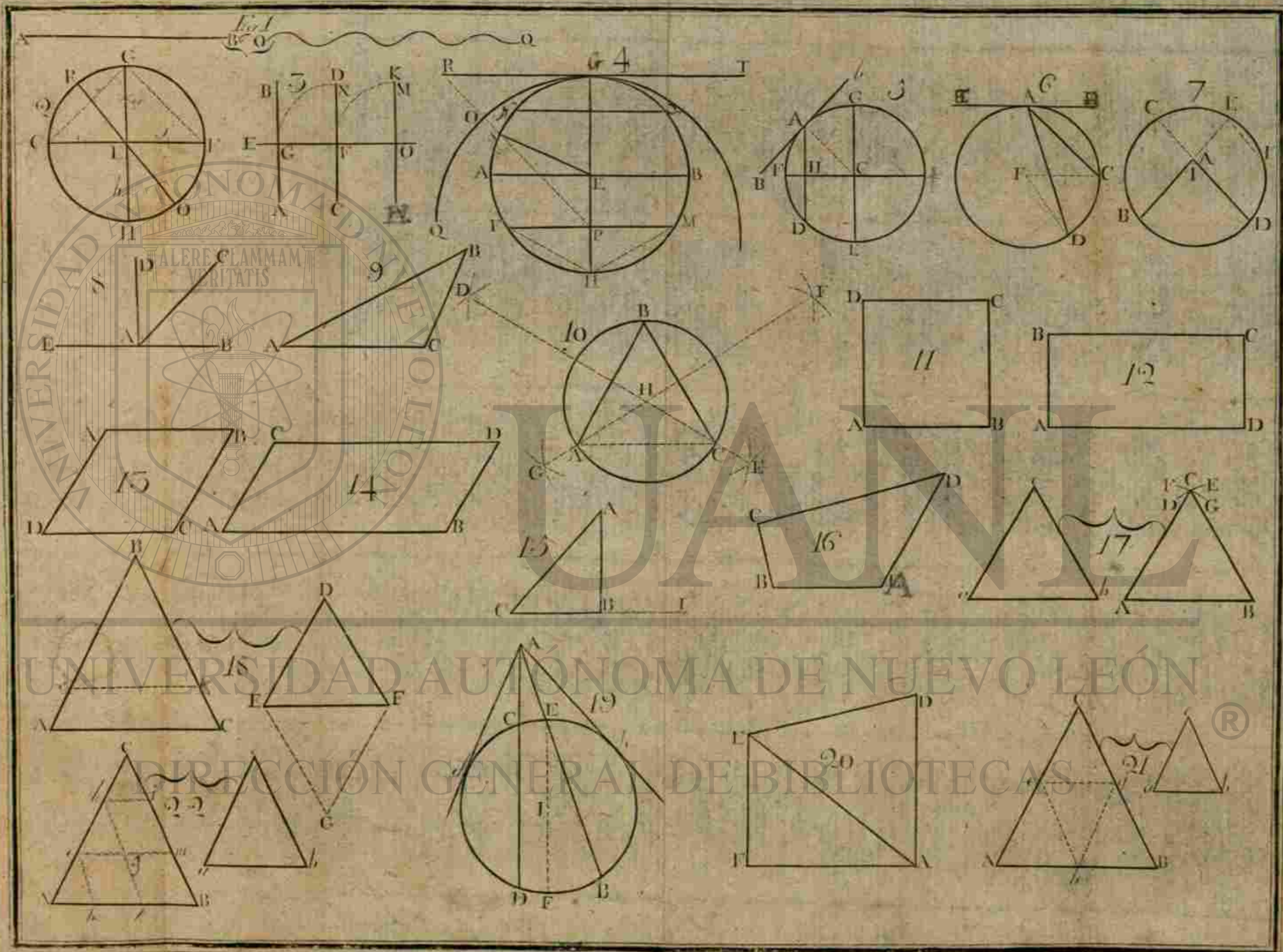
consideremus, evidens est figuram 54 ellipsim Fig.
referre, quum quadrata ordinatarum semper sint, ut productum ex segmentis abscissarum. Figura 55 refert curvam, quae *hyperbola* dicitur. In hac autem curva non secus ac in ellipsi, quadrata ordinatarum sunt, ut productum ex segmentis abscissarum; sed probe notandum est discrimen. Sectio conica est ellipsis, si planum secans sectioni triangulari perpendiculare duobus coni lateribus occurrat; ac sectio conica fit hyperbola; si planum secans neque sit coni lateribus parallelum, neque duo secet coni latera; sed in hoc casu sectio ita se habet, ut planum secans productum cono ad verticem oppossito occurrat in D, alteraque sectione generet hyperbolam oppositam. Recta DE dicitur *axis transversus*, punctum huius axis medium vocatur *centrum* hyperbolarum, per quod si ducatur hinc et inde recta perpendicularis ea proportione, ut productum ex segmentis abscissarum sit ad quadratum ordinatae, sicut est quadratum axis transversi ad quartum terminum proportionalem; habebitur quadratum axis, qui *coniugatus* vel *secundus* axis appellatur. Igitur in aequatione ad hyperbolam punctum D sumitur in hyperbola opposita, et productum ex segmentis abscissarum est

$DH \times EH$. Tertiam aequationem $\frac{abx}{c} = y^2$ esse ad 55.

parabolam, cuius parameter $\frac{ab}{c}$ ex antea demonstratis evidens est. In hac autem curva planum secans est alterutri lateri coni parallelum. Itaque quum ex coni sectione natae sint tres illae curvae, patet, cur illis factum sit *sectionum conicarum* nomen. Sed haec breviter dicta sint, ut algebrae usus in geometria tironibus ostendatur.

FINIS GEOMETRIAE ET ALGEBRAE.





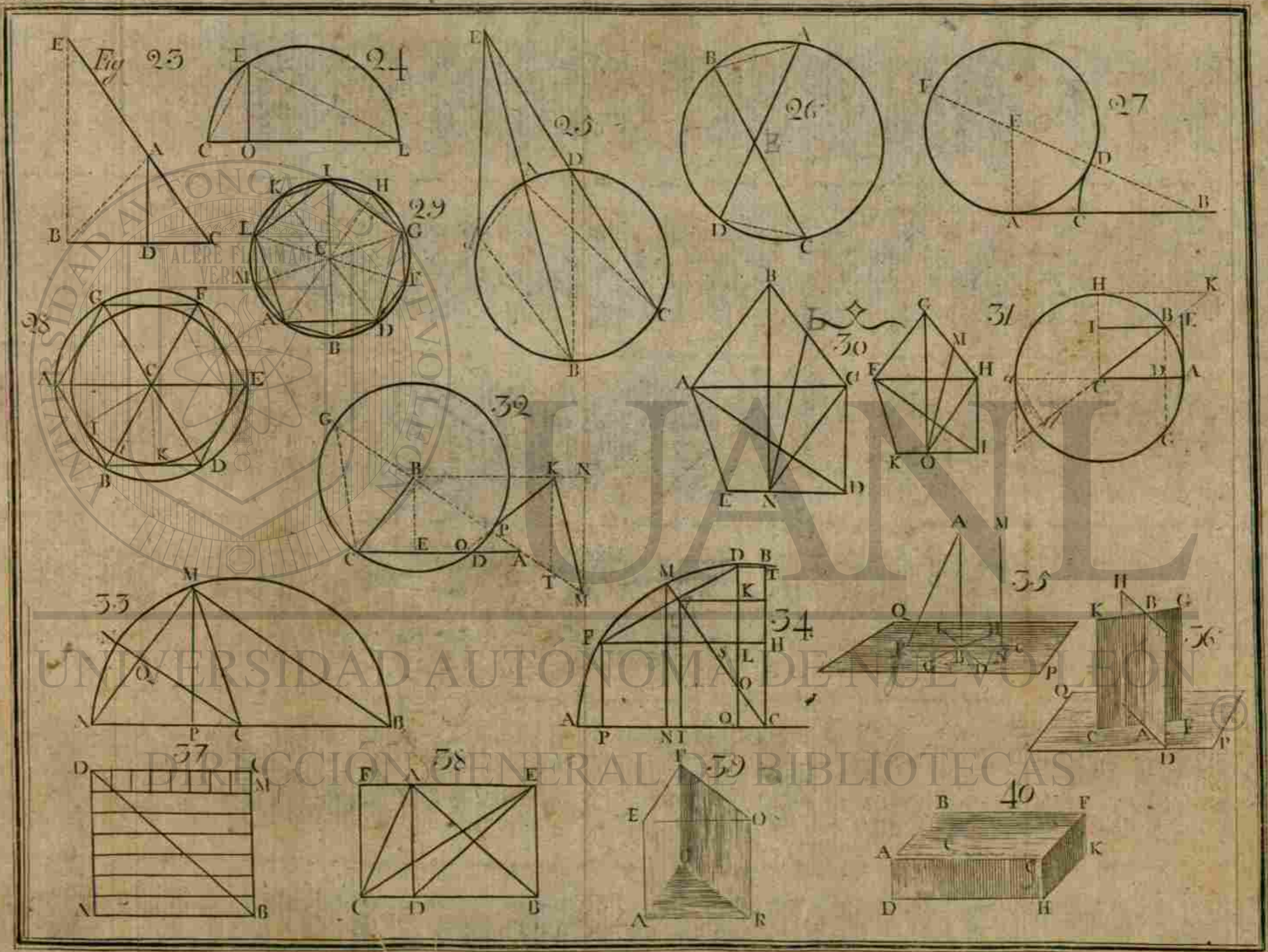


Fig. 23
24
25
26
27
28
29
30
31
32
33
34
35
36
37
38
39
40

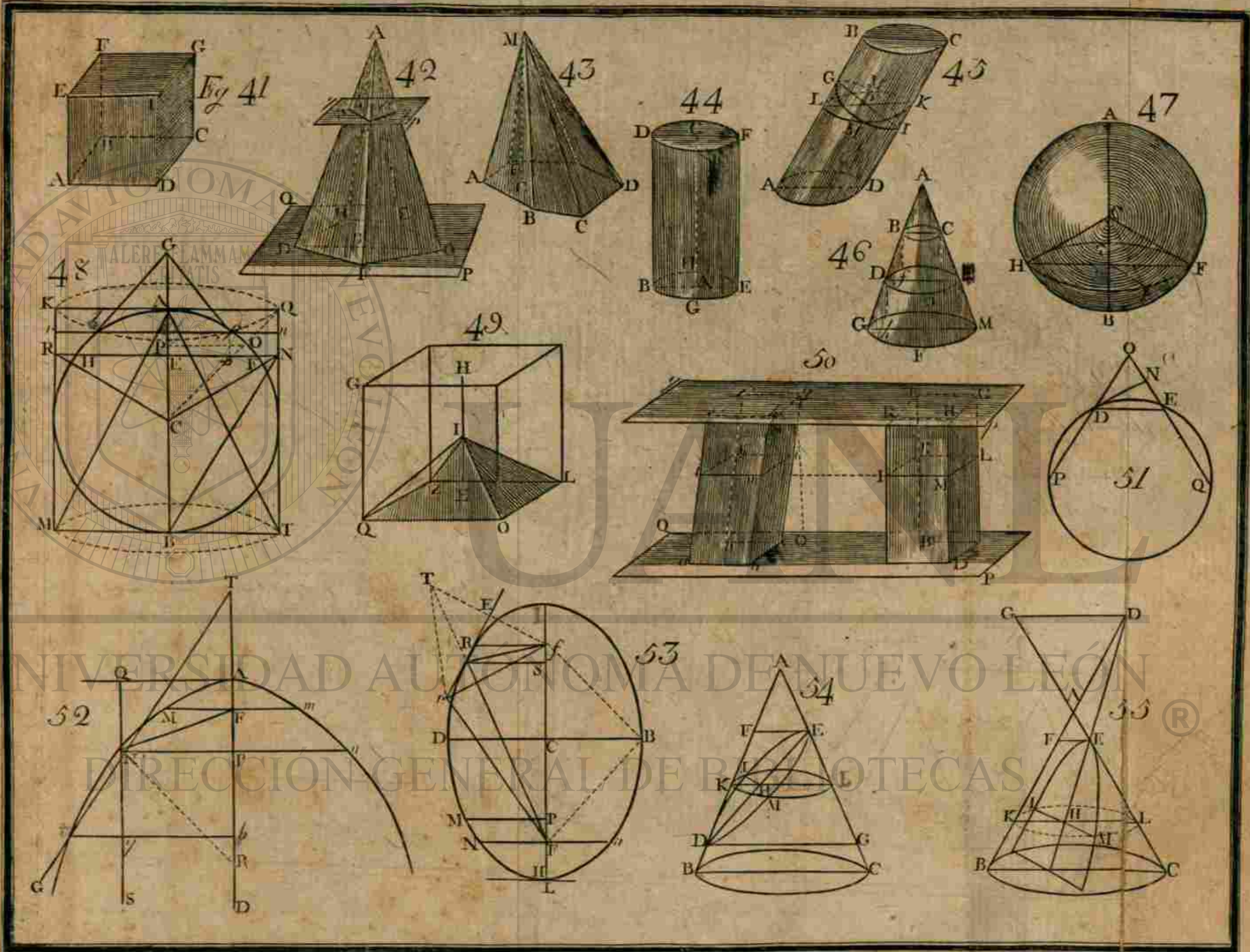


Fig 41
42
43
44
45
46
47
48
49
50
51
52
53
54
55
