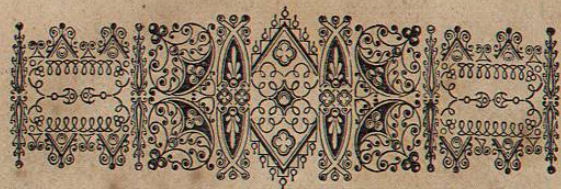


observaremos que fieles al método que nos hemos propuesto, hemos procurado esponer estas materias del modo mas llano y patente que nos ha sido posible, acomodándonos á todas las inteligencias y no suponiendo en nuestros lectores otra nocion preliminar que la de conocer los números, en una palabra procurando suplir en todo lo posible la viva voz del maestro y familiarizar con el cálculo y abstraccion las personas que nunca han saludado la ciencia.

ARITMÉTICA.



RECREACION FILOSOFICA.



CARTA PRIMERA.

NUMERACION, OPERACIONES SOBRE NUMEROS ENTEROS.



§ I.

Numeracion.

Amigo Eugenio, he recibido tu muy apreciable en contestacion á lo que te escribí, anunciándote mi feliz llegada, y agradezco lo mucho que te lamentas de mi ausencia, y las ansias con que anhelas mi regreso, como igualmente lo mucho que te aplicas al estudio, aunque guiándome por la ad-
Junta de Silvio, esta aplicacion es escesiva y ame-

naza hacer mella en tu salud, hasta ahora tan robusta, efecto de tus costumbres sobrias y actividad de profesion. Como sea, yo, como amigo, te aconsejo que vayas con tiento en este punto; pues el tránsito repentino de unos hábitos como los tuyos á una vida intelectual y sedentaria no puede efectuarse sino con menoscabo de tu salud. Por ahora límitate á leer solamente las obras que encontrarás en mi biblioteca, relativas á las ciencias de observacion y esperiencia, y no te enredes en tratados de fisica y astronomía, que no solamente exigen un grado de tension intelectual y facultad de abstraccion á que no estás acostumbrado, sino que por su misma naturaleza rinden mas prontamente el entendimiento, abruman la imaginacion y desaparegan del estudio. Por otra parte, el estudio de estas materias exige conocimientos matemáticos que no posees, y que es mi objeto imbuirte durante mi ausencia, conforme te lo prometí verbalmente la última tarde que tuve el gusto de pasar en tu compañía, los cuales te pondrán en estado no solo de cultivar por tí mismo estos mismos estudios matemáticos, sino las ciencias físicas á que son de una inmediata aplicacion. Pienso hablarte primeramente de la aritmética, por la que generalmente se empieza, como que su conocimiento es necesario para la inteligencia de los demas, y por ser sus aplicaciones á los actos comunes de la vida mas frecuentes y mas directos, siendo, como sabes, necesaria al hombre de ciencias, al economista, al rentista, al comerciante, y aun hasta á las mugeres de gobierno. De esta utilidad comun, de esta apli-

cacion inmediata procede el error de muchos que hacen consistir esta ciencia en las reducidas y empíricas reglas del comerciante ó hacendista, las cuales ademas de saberse en general de un modo rutinario y sin demostracion alguna, no abrazan mas que una parte de la aritmética, ciencia mucho mas vasta de lo que comunmente se cree. No es este el plan que me he propuesto en esta y en mis sucesivas cartas en que, como hasta el presente, pienso proceder como filósofo, y dar la razon y teoría de todas las operaciones que esponga, estableciendo y procediendo de las nociones mas sencillas, para lo cual espero que escusarás cuanto pueda decirte trivial y pueril al principio; pues ademas de que mi intento es filosofar y demostrar las operaciones mas vulgares, estas mismas demostraciones me deberán servir de base para lograr resultados mas trascendentales. Pero basta ya de preámbulos, y entremos cuanto antes en materia, empezando por la definicion de las ciencias que nos ocupan, como haria Silvio. Llámanse *matemáticas* las ciencias que tratan de la cantidad, entendiendo por cantidad todo lo que es susceptible de aumento ó de disminucion, como números, líneas, superficies, etc. Pero para que la mente humana pueda llegar á formarse un concepto de la cantidad en sus varios grados ó aspectos ó ha sido preciso referirla á una cantidad de la misma especie, natural ó arbitraria destinada á servir de término de comparacion; esta cantidad convencional se llama *unidad*. Así cuando yo digo que el diamante del gran Mogol pesa 275 quilates, espreso una cantidad equivalente al peso ó

densidad de este diamante, cuya unidad es un quilate, que sirve como de base ó punto de comparacion para dar á entender el valor de la cantidad, en términos que, cuando la enuncio, supongo que los que me oyen comprenden el valor del quilate; y si no lo saben, tengo el cuidado de explicárselo; pues de otro modo ignorando la unidad, no podrian comprender la cantidad. Este quilate es una unidad arbitraria ó convencional, esto es, no existe en la naturaleza, y solo procede de haberse convenido los hombres en atribuirle un valor convencional. Si queriendo dar á conocer el volumen del sol, dijera que este astro es un millon y trescientas mil veces mayor que la tierra enunciaria una cantidad equivalente al volumen del sol, cuya unidad ó punto de comparacion seria la tierra, y en este caso la unidad seria natural. Este conjunto de unidades que espresamos para dar á conocer el valor de la cantidad se llama *número*, el cual puede tambien definirse el resultado de la comparacion de la cantidad con la unidad, y la ciencia que se ocupa de estos números, enseñando las diversas combinaciones y operaciones de que son susceptibles, se llama *aritmética*. Los números pueden ser *enteros* ó *fraccionarios*, entendiéndose por el primero el número tal como lo acabo de definir, cuando la unidad es completa y sin alusion á ninguna otra subentendida, mientras que en el fraccionario la unidad que sirve de punto de comparacion es de otra especie y menor que otra unidad á que tacitamente se alude: así cuando yo digo que he comprado dos varas de paño, el número que espreso es entero,

pues la unidad que sirve de punto de comparacion es completa y no se refiere á otra de superior calidad; mas si digo que he comprado los dos tercios de una vara, el número es fraccionario, pues la unidad es un *tercio* que depende ó se refiere á otra unidad superior que es la vara, la que por abstraccion supongo dividida en tres partes iguales para poder, por este medio, dar á entender la cantidad de paño que he comprado.

Otra division de los números es en *abstractos* y *concretos*; la primera denominacion se aplica, cuando al enunciarlos se prescinde de hacer constar la especie ó el nombre definitivo de la unidad, y la segunda cuanta esta se particulariza, como cuatro bancos, seis caballos, etc. En el curso de mi correspondencia emplearé tanto unos como otros, pudiendo tú por la imaginacion aplicar cualquiera unidad arbitraria á los ejemplos que te proponga.

Por salvage é inculta que queramos figurarnos una sociedad de hombres, desde el momento en que vive en sociedad debe tener un idioma articulado y por consiguiente un sistema de enumeracion mas ó menos perfecto. Así un salvage que hubiera muerto diez buytres y quisiese participar este hecho á un compañero suyo, deberá hacer uso de un término que equivalga á la repeticion de la unidad hasta diez veces, juntamente con el sustantivo *buytre*, el verbo *matar* con una modificacion mas ó menos adecuada á la época de la accion y el pronombre personal espreso ó suplido; mas si no queremos suponer su idioma bastante culto para tener un término equivalente á diez, en este caso el sal-

vage, juntamente con el término ó gesto equivalente á matar se verá obligado á repetir ó hacer sonar hasta diez veces la palabra *buytre*, ó bien abrir y presentar sus dos manos estendidas para indicar que el número de buytres muertos era equivalente á los dedos de ambas sus manos, para que su compañero comparando esta cantidad con la unidad *buytre*, cuya naturaleza le consta, comprenda el número que intenta darle á entender. Pero un lenguaje tan imperfecto es todo lo mas suponible en hordas, si es que existen, cuyo idioma compuesto casi esclusivamente de interjecciones, apenas cuenta algunos sustantivos para designar los objetos que mas impresion hacen en la mente humana, y de ninguna manera en una sociedad en la que, bien que inculta, suponemos un idioma articulado y partes de la oracion mas ó menos caracterizadas. Los hombres deben haberse necesariamente ocupado de dar á los números nombres fáciles de retener, y como existe una infinidad de ellos puesto que por grande que sea el número, se puede formar otro nuevo añadiendo la unidad, los hombres debieron tambien tener por objeto, buscar un sistema limitado de palabras que combinadas entre sí de una manera conveniente espresase todos los números. Así lo primero que hicieron fué caracterizar á la unidad con un nombre *uno*, despues con otro á la unidad mas otra unidad *dos*, y así sucesivamente hasta el número *nueve*, al cual mediante una unidad mas se considera como otra de un orden diferente, ó unidad de *segundo orden* por oposicion á la unidad primitiva, que se designa

con el nombre de *unidad simple* ó unidad de primer orden. Cuéntase por unidades de segundo orden llamadas tambien *decenas* de la misma manera que se cuenta por unidades simples; así del mismo modo que con el término *dos* se convino designar el resultado de una unidad mas otra unidad primitiva, se ha convenido igualmente en designar con el nombre *veinte* el resultado de una unidad de segundo orden con otra del mismo, y así sucesivamente hasta *ciento*, ó unidad de tercer orden, y así sucesivamente hasta mil, diez mil, un millon, etc. Mediante esta convencion arbitraria se espresan como sabeis números muy crecidos que de otra manera hubieran exigido cada uno un nombre particular, empresa superior á las fuerzas de la memoria.

Sin embargo por simple que sea esta nomenclatura, mucha pena costaria la combinacion de estos mismos números por poco considerable que fuesen, si no se hubieran inventado un medio compendioso de escribirlo ó cifras arbitrarias que los representen. Mas como tambien hubiera superado las fuerzas de la memoria, una cifra representativa por cada uno de ellos, se ha convenido en representarlos de un modo análogo á su nomenclatura, conviniendo en representar los nueve primeros nombres por los nuevos caracteres ó cifras 1, 2, 5, 4, 5, 6, 7, 8, 9, y estableciendo este principio de mera convencion que toda cifra colocada inmediatamente á la izquierda de otra espresa unidades de un orden inmediatamente superior á las de esta otra, ó en otros términos que el valor de una cifra colocada

inmediatamente á la izquierda de otra es diez veces mayor que el de esta otra. Por consiguiente si se quiere escribir el número veintiocho, deberá espresarse segun el principio establecido por estas dos cifras 28, pues este número equivale á dos unidades de segundo orden mas ocho unidades simples. Pero como puede presentarse que el número que se intenta representar sean unidades de segundo orden ó de otro mas elevado sin contener unidades simples, se ha debido adoptar una cifra que sin ningun valor por sí misma sirva para ocupar el lugar de cada orden que falta cuando se enuncia el número. Esta cifra es 0 que, como muy bien sabes, se pronuncia *zero*, que colocada á la derecha da á entender que la cifra que le antecede inmediatamente tiene un valor diez veces mayor. Establecidos estos principios, sobre cuya minuciosidad imploro tu indulgencia á favor del deseo que me anima, pasemos á varias operaciones que pueden tener lugar sobre números enteros, segun las diversas necesidades habituales de la vida. Estas operaciones se designan bajo los nombres de *adicion*, *sustraccion*, *multiplicacion* y *division*, cuya demostracion matemática voy á tratar de esponerte, recordándote de paso el proceder práctico que hace tiempo conoces.

§ II.

De la adicion.

Figúrate que eres mercader y que haces una remesa á Rio-Janeiro de 2464 pañuelos de seda; despues envias otra á Guatemala de 4282, otra á la Havana de 6842 y últimamente has vendido durante el año en menor 4806; tu objeto es saber el número exacto de los pañuelos vendidos, sea para deducir los que te quedan en la tienda, sea para averiguar la ganancia que de todos ellos resulta. ¿Qué harás para conseguirlo? Deberás reunir todos estos números en uno solo, ó procurar buscar un número que contenga todos los demas, ó cuyo valor equivalga á las cuatro cantidades propuestas. Esta operacion se llama *adicion*, y el número que resulta y cuyo valor equivale al de los que son sometidos á la operacion, se llama *suma*. Cuando esta operacion solo tiene por objeto los números de una sola cifra, nada hay mas facil: los niños desde la edad mas tierna se acostumbran á hacerlo por los dedos y sus resultados se graban profundamente en la memoria, así basta esta sola para efectuarla á menos que sea muy larga. Mas no sucede lo mismo cuando hay que adicionar guarismos ó cantidades muy crecidas como en el ejemplo propuesto: en este caso es preciso colocar las cuatro cantidades unas debajo de otras de manera que las unidades

simples vengan debajo de las unidades simples, las decenas debajo de las decenas, y así sucesivamente, despues de lo cual se suman en columnas ó hileras verticales en esta forma :

$$\begin{array}{r} 2464 \\ 4282 \\ 6842 \\ 4806 \\ \hline 18564 \end{array}$$

Despues se procede á sumar las unidades simples ó la columna ó hilera mas á la izquierda, lo cual no presenta mucha dificultad, pues se efectua exactamente de la misma manera que si fuesen las solas que compusiesen la cantidad en cuestion y tal como un niño lo haria contando por sus dedos; el resultado ó suma es 44, esto es una decena ó unidad de segundo orden mas cuatro unidades simples, las cuales escribo, añadiendo la decena á la columna siguiente, cuya suma 46 es de unidades de segundo orden, segun los principios establecidos y por consiguiente es igual á 460 unidades simples. Mas este resultado ó suma de 46 decenas es igual á una centena ó unidad de tercer orden compuesta de 40 decenas, mas 6 decenas restantes. Escribo estas últimas y añado la centena que ha resultado á su columna correspondiente que es la que sigue inmediatamente hácia la izquierda, y opero de la misma manera logrando por resultado 25 centenas; cantidad igual á 5 centenas mas dos unidades de mil que añado á su correspondiente columna y pro-

cedo de la misma manera logrando por resultado 48 unidades de mil, las cuales no habiendo otra columna á que añadir escribo enteramente. Por este medio logro la suma total de 18564, compuesta de 48 unidades de mil, 5 centenas, 6 decenas y 4 unidades simples, que ha resultado de la suma sucesiva de las diferentes unidades. Pasemos ahora á la segunda operacion.

§ III.

De la sustraccion.

Habiendo logrado el guarismo 18,564, has averiguado el total de los pañuelos que has vendido, pero yo supongo que quieras saber el número de los que te quedan en tu tienda, acordándote que antes de haber hecho las diferentes ventas que hemos supuesto ascendia á 59,486. Para poder cerciorarte de los pañuelos que te quedan es preciso que averigues el exceso de esta última cantidad sobre el número de los pañuelos vendidos, ó lo que es lo mismo la diferencia que va de este, al número á que ascendian antes de haberse efectuado venta alguna. Esta operacion se llama *sustraccion* y el número que se obtiene y que espresa el exceso ó diferencia se llama *resta* ó diferencia. Para efectuar esta operacion se coloca la cantidad menor bajo la cantidad mayor cuidando que las unidades caigan bajo las unidades, las decenas debajo de las

decenas, etc., y se procede á la operacion que como he insinuado consiste únicamente en hallar la diferencia entre los dos números propuestos ó en otros términos en hallar un número que sumado con el menor reproduzca el mayor. Así en el ejemplo propuesto, colocando las dos cantidades segun el proceder explicado se logra por resultado

$$\begin{array}{r} 59,486 \\ 48,564 \\ \hline 22,122 \end{array}$$

se logra por resultado 22,122 que indicará el número de los pañuelos que quedan en la tienda.

Sobre esta operacion hay que hacer dos advertencias importantes. Supongamos que hay que sustraer 25 de 55. En este caso quedando completamente destruidas las unidades es preciso escribir cero en la columna de las unidades, lo que da 40 de diferencia. Supongamos que se deban sustraer 256 de 545. En este caso debe observarse que no siendo posible, en la columna de las unidades sustraer 6 de 5,

$$\begin{array}{r} 545 \\ 256 \\ \hline 409 \end{array}$$

es preciso recurrir á la cifra de la decena á la que por abstraccion se quita ó se toma prestado una decena que contiene diez unidades, las cuales agregadas á las cinco que tenemos forman 15 unidades

de las cuales fácilmente podemos restar 6, cuyo residuo es 9. Mas al ir á operar la sustraccion en la columna de las decenas no se debe olvidar que han disminuido de una unidad de su orden á causa del empréstito que hemos hecho para poder efectuar la operacion en la columna de las unidades simples.

§ IV.

De la multiplicacion.

Ahora bien, Eugenio, suponte tú que despues de haberte cerciorado, mediante la adiccion, la suma total de los pañuelos remitidos á Rio-Janeiro, etc., y vendidos durante el año sube á 48,564, deseas saber cuanto dinero te importa su venta admitiendo que vendas cada uno á 8 reales. Para averiguar esto puédesse proceder por la adiccion, su mando 64 veces 8, ó bien 8 veces 48,564. Pero como esta operacion seria larga, se simplifica mediante una operacion llamada *multiplicacion*, que consiste en repetir un primer número tantas veces cuantas unidades hay en un segundo, ó bien en formar un tercer número que esté compuesto con el primero como el segundo está compuesto con la unidad. Llámase *multiplicando* el número que debe multiplicarse, *multiplicador* el número por el cual se multiplica, y *producto* el resultado de la multiplicacion; los dos números propuestos se designan tambien bajo el nombre de factores del producto.

Hablando con propiedad, la multiplicacion no es mas que una adicion abreviada, pues, para obtener el resultado, bastaria colocar unos debajo de otros tantos números iguales al multiplicando, cuantas unidades hay en el multiplicador y despues proceder á la adicion. Pero este modo de operar seria muy largo si el multiplicador se compusiese de muchas cifras; por consiguiente se ha procurado simplificarle y esto se ha conseguido mediante esta adicion abreviada que compone la multiplicacion.

Mientras que los dos *factores* no contienen cada uno mas que una cifra, el producto se obtiene por las adiciones sucesivas del mismo número; así para multiplicar 7 por 5, se dice 7 y 7 son 14, y 7 son 21. siendo este último número el resultado de la adicion de tres 7.

El producto de la multiplicacion de los nueve primeros números consta generalmente de memoria, y son muy útiles para lograr con facilidad los productos de los números espresados por muchas cifras. Sin embargo, hasta estar bien ejercitado, no es malo tener á la vista una tabla llamada *tabla de multiplicacion ó pitagórica*, del nombre de Pitágoras, que se supone que la inventó ó esparció su uso.

Tabla de multiplicacion.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

La primera fila horizontal de esta tabla se forma añadiendo 1 sucesivamente hasta llegar á 9. La segunda añadiendo 2 sucesivamente; la tercera añadiendo 3, y así con los demas números. Repara por otra parte que puédesse tambien emplear esta tabla en sentido vertical, pues cada columna vertical está compuesta de los mismos números que la fila horizontal correspondiente. Así la sexta fila horizontal se compone de los números 6, 12, 18.... 54; la sexta fila vertical encierra los mismos números 6, 12, 18..... 54. Establecido esto, si se quiere hallar, por medio de esta tabla, el producto de dos números, espresados por una sola cifra, se busca el multiplicando en la primera fila horizontal, y partiendo de este nombre se baja *verticalmente* hasta encontrarse en frente del multiplicador que se hallará en la primera columna vertical: el número

contenido en el cuadrete correspondiente, es el producto. Por ejemplo, para hallar el producto de 8 por 5, se baja desde 8, tomado en la primera fila horizontal, hasta llegar en frente de 5, tomado en la primera columna vertical; y el número 40, contenido en el cuadrete, es el producto que se busca. Ahora vamos á ver como mediante estos conocimientos preliminares efectuamos la multiplicacion. Vamos á ver en primer lugar como se procede cuando el multiplicador solo consta de una cifra.

Cuando el multiplicador consta de una sola cifra, se escribe bajo el multiplicando, debajo de las unidades por lo comun, y se multiplica por las unidades del multiplicando. Si este producto no se compone mas que de unidades simples, se escribe debajo del multiplicador, del cual se separa con una línea, y si ademas de las unidades contiene una ó mas decenas, se escriben solamente las unidades y se guardan la decena para añadirla al producto de estas ó el producto de unidades de segundo orden. Multiplicanse despues las decenas del multiplicando por el multiplicador, añadiendo á su producto la decena ó decenas que se retengan de las unidades simples; escribese el producto al lado del de las unidades, guardando las centenas si las hay para añadirlas al producto de estas, y así sucesivamente. Operando de este modo, el producto de 2864 por 6 es 17,184.

$$\begin{array}{r} 2864 \\ \underline{\quad 6} \\ 17,184 \end{array}$$

Cuando el multiplicador contiene mas de una cifra, es preciso operar con cada una de estas cifras sucesivamente, lo mismo que se practica cuando no hay mas que una, pero comenzando por la derecha. Hay que advertir que el producto de las decenas del multiplicador deberá escribirse un grado mas hácia la izquierda, dos el de las centenas, y así sucesivamente. El producto total resulta de la suma de los varios productos parciales. Supongamos que queremos multiplicar 65487 por 6958, operando del modo explicado, el producto total es 455658546.

$$\begin{array}{r} 65487 \\ 6958 \\ \hline 525896 \\ 527455 \\ 589585 \\ 592922 \\ \hline 455658546 \end{array}$$

Si el multiplicando, el multiplicador, ó ambos acabasen por ceros, se puede abreviar la operacion prescindiendo de estos y operando como si no estuviesen; pero es preciso ponerlos al fin del producto total.

Cuando uno de los factores es 10, 100, 1000, 10000, etc., el producto puede formarse añadiendo al otro factor un número de ceros equivalente.