

contenido en el cuadro correspondiente, es el producto. Por ejemplo, para hallar el producto de 8 por 5, se baja desde 8, tomado en la primera fila horizontal, hasta llegar en frente de 5, tomado en la primera columna vertical; y el número 40, contenido en el cuadro, es el producto que se busca. Ahora vamos á ver como mediante estos conocimientos preliminares efectuamos la multiplicacion. Vamos á ver en primer lugar como se procede cuando el multiplicador solo consta de una cifra.

Cuando el multiplicador consta de una sola cifra, se escribe bajo el multiplicando, debajo de las unidades por lo comun, y se multiplica por las unidades del multiplicando. Si este producto no se compone mas que de unidades simples, se escribe debajo del multiplicador, del cual se separa con una línea, y si ademas de las unidades contiene una ó mas decenas, se escriben solamente las unidades y se guardan la decena para añadirla al producto de estas ó el producto de unidades de segundo orden. Multiplicanse despues las decenas del multiplicando por el multiplicador, añadiendo á su producto la decena ó decenas que se retengan de las unidades simples; escribese el producto al lado del de las unidades, guardando las centenas si las hay para añadirlas al producto de estas, y así sucesivamente. Operando de este modo, el producto de 2864 por 6 es 17,184.

$$\begin{array}{r} 2864 \\ \underline{\quad 6} \\ 17,184 \end{array}$$

Cuando el multiplicador contiene mas de una cifra, es preciso operar con cada una de estas cifras sucesivamente, lo mismo que se practica cuando no hay mas que una, pero comenzando por la derecha. Hay que advertir que el producto de las decenas del multiplicador deberá escribirse un grado mas hácia la izquierda, dos el de las centenas, y así sucesivamente. El producto total resulta de la suma de los varios productos parciales. Supongamos que queremos multiplicar 65487 por 6958, operando del modo explicado, el producto total es 455658546.

$$\begin{array}{r} 65487 \\ 6958 \\ \hline 525896 \\ 527455 \\ 589585 \\ 592922 \\ \hline 455658546 \end{array}$$

Si el multiplicando, el multiplicador, ó ambos acabasen por ceros, se puede abreviar la operacion prescindiendo de estos y operando como si no estuviesen; pero es preciso ponerlos al fin del producto total.

Cuando uno de los factores es 10, 100, 1000, 10000, etc., el producto puede formarse añadiendo al otro factor un número de ceros equivalente.

§ V.

De la division.

Eugenio, suponte tú que eres padre de familia, que tienes cuatro hijos y ochenta almendras confitadas que repartir entre ellos; suponte que los ves alargando sus manitas y tu ternura paternal exige que los contentes á todos igualmente. ¿Qué harás? Buscarás ó procurarás averiguar la parte que á cada uno le cabe, ó de otro modo cuantas veces el número 4, que es el de los chiquillos, está contenido en ochenta que es el de las almendras, y el número de veces que esté contenido será el número de almendras que á cada uno le toca, á menos que prefieras ir dando sucesivamente una almendra á cada uno hasta que no te quede ninguna en la mano. De cualquier modo, cada chiquillo habrá recibido 20 almendras, y el resto será nulo. Ahora bien esta operacion, por la que se averigua cuantas veces un número está contenido en otro, se llama *division*, llamándose *dividendo*, como el término lo indica, el número que debe ser distribuido ó repartido; *divisor*, el número que señala entre quienes debe ser repartido ó distribuido el dividendo, y *cuociente*, de la palabra latina *quoties* (cuantas veces), el número que indica las veces ó partes que tocan á cada unidad del divisor, ó bien sea las veces que este último está contenido en el divi-

dendo. Así, en el ejemplo propuesto, las ochenta almendras es el dividendo, los cuatro chiquillos es el divisor, y las veinte almendras que componen la parte de cada chiquillo es el cuociente; en términos que si se multiplica las veinte almendras recibidas, ó el cuociente por los cuatro chiquillos, ó el divisor, el producto será igual al dividendo ú ochenta almendras.

Luego la division es una operacion que tiene por objeto el averiguar cuantas veces un número está contenido en otro, ó bien, dados dos números, hallar un tercero que, multiplicado con el segundo, reproduzca el primero, ó bien, conocido el producto y uno de los factores, hallar el otro factor. Esta operacion se considera como una especie de sustraccion abreviada, como espero te convencerás por lo que voy á esponerte. Supongamos que se trata de dividir 4536 por 8. Siendo el dividendo igual á la suma de los productos parciales del divisor por los números espresados por las diferentes cifras del cuociente, si se pudiese deducir del dividendo estos diferentes productos parciales, bastaria dividirlos por el divisor para lograr las cifras del cuociente que se busca; en cuyo caso la operacion se reduciria á una serie de divisiones parciales, fáciles de ejecutar, y que darian sucesivamente todas las cifras del cuociente. Para descubrir las partes del dividendo que encierran estos productos parciales, dispónese el cálculo de la manera siguiente :

Dividendo	4556	8 divisor,
	40	5 centenas
1 ^{er} residuo	556	6 decenas
	48	7 unidades
2 ^o residuo	56	567 cuociente total.
	56	

Lo primero que se procura, es buscar la cifra de las mas altas unidades del cuociente, ó en otros términos cual será el orden mayor de estas; con este objeto se determina la parte del dividendo que encierra el producto de esta cifra por el divisor 8, lo cual se consigue tomando del dividendo tantas cifras á la izquierda cuantas basten para que el número que resulte, considerado como unidades simples, contenga á lo menos una vez el divisor 8. El número 45, que satisface á esta condicion, es la parte del dividendo que encierra el producto de la cifra de las mas altas unidades del cuociente por el divisor; y como 45, en el dividendo, espresa centenas ó unidades de tercer orden, síguese que las mas altas unidades del cuociente serán centenas, de lo cual, por otra parte, es facil convencerse, pues el divisor 8, multiplicado por el cuociente buscado, debe reproducir el dividendo 4556. Este dividendo está comprendido entre 800 y 8000, es decir entre 8×100 y 8×1000 , por consiguiente el cuociente de 4556 por 8 debe estar tambien comprendido entre 100 y 1000; luego sus mas altas unidades son centenas.

Para determinar la cifra de las centenas del cuociente, obsérvase que el número 45 siendo compuesto del producto de las centenas del cuociente por el divisor 8, y de las centenas que deberán tal vez retenerse por la multiplicacion de las decenas y unidades del cuociente por el divisor, resulta que si estaretencion es menor que el divisor 8, el múltiplice mayor del divisor 8, contenido en 45, necesariamente espresará el producto de la primera cifra del cuociente por el divisor 8; de suerte que la division de este múltiplice por el divisor 8 dará la primera cifra del cuociente. Ahora bien, es facil convencerse que las centenas retenidas (resultantes de la multiplicacion de las decenas y unidades por el divisor) es menor que el divisor 8, pues el número, espresado por las decenas y unidades del cuociente, siendo menor que 100, la multiplicacion de este número por el divisor 8 da un producto menor que 8×100 ó que 8 centenas.

El mayor múltiplice del divisor 8, contenido en el número 45 de las centenas del cuociente, siendo 40, la division de 40 por 8 dará la cifra 5 de las centenas del cuociente. En efecto, el dividendo 4556, comprendido como está entre 40 y 48 centenas, es decir entre 5 centenas $\times 8$ y 6 centenas $\times 8$, el cuociente da 4,556 por 8, está tambien comprendido entre 5 y 6 centenas; luego está compuesto de 5 centenas, mas un cierto número de decenas y unidades.

Dividir por 8 el mayor múltiplice de 8, contenido en 45, viene á ser lo mismo que buscar cuantas veces 8 está contenido en 45; el resultado 5 es la ci-

fra de las centenas del cuociente. Conociendo la cifra 5 de las centenas del cuociente de 4556 por 8, para hallar las decenas y unidades de este mismo cuociente, obsérvese que el dividendo 4556, componiéndose de los tres productos parciales de las 5 centenas, de las decenas y de las unidades por el divisor 8, si se quita de este dividendo el producto 40 centenas de las 5 centenas del cuociente por el divisor, el resto 556 no contiene mas que los dos productos parciales de las decenas y de las unidades del cuociente por el divisor. Por consiguiente puede considerarse el primer resto 526, como un nuevo dividendo parcial, compuesto del producto del divisor 8 por un cuociente parcial, cuyas decenas y unidades son las del cuociente total, lo que simplifica la cuestion, de modo que no hay mas que dividir 556 por 8, y se sabe que las mas altas unidades del cuociente son decenas. No pudiendo hallarse el producto de las decenas del cuociente por el divisor 8, sino en las 55 decenas del dividendo parcial 556, y como la multiplicacion de la cifra de las unidades del cuociente por el divisor 8, da una retencion de decenas menor que 10×8 ó que 8 decenas, se logrará la cifra de las decenas del cuociente, indagando cuantas veces el divisor 8 está contenido en 55, que son 6, que será la cifra de las decenas del cuociente total; si se sustrae 8 veces 6 decenas ó 48 decenas de 556, la diferencia 56 expresa el producto del divisor 8, por las cifras de las unidades del cuociente, la cual, por consiguiente, se logrará dividiendo 56 por 8, lo que da 7; y restando el producto de 7 por 8 de 56, la dife-

rencia es nula ó cero, lo que indica que el cuociente es exacto sin esceso alguno.

Supongamos ahora que se trata de dividir 472878 por 567, dispónese el cálculo de la manera siguiente:

472878	567
4556	854
19278	
1701	
2268	
2268	

Para determinar la cifra de las mas altas unidades del cuociente, razónase como en el ejemplo precedente, buscando en primer lugar la parte del dividendo que encierre el producto de la cifra que se busca por el divisor, producto compuesto de unidades del mismo orden que las de la cifra en cuestion, que debe hallarse en el dividendo, y no puede ser menor que el divisor; por consiguiente, obtiéndose la parte del dividendo que contiene el producto de la primera cifra á izquierda del cuociente por el divisor, tomando tantas cifras á la izquierda del dividendo, cuantas basten para que el número que resulte considerado como unidades simples contenga á lo menos una vez al divisor 567. El número 4728 que satisface á esta condicion, es la parte del dividendo que encierra el producto de la cifra de las mas altas unidades del cuociente por el divisor; y como 4728 expresa centenas de mil en el dividendo, se ve que las mas altas unidades del

cuociente serán centenas. Para hallar estas, obsérvese que el dividendo componiéndose del producto de las centenas del cuociente por el divisor, mas las centenas retenidas tal vez por la multiplicacion de las decenas y unidades del cuociente por el divisor, resulta que si esta retencion es menor que el divisor 567, el mayor multiplique de este contenido en 4728, será el producto de la cifra que se busca por el divisor, de manera que se logrará esta cifra indagando cuantas veces el divisor 567 se contiene en el dividendo 4728. Ahora bien, el número de las centenas que se retienen (producto de las decenas y unidades del cuociente por el divisor) es necesariamente menor que el divisor 567; pues las decenas y unidades del cuociente formando siempre un número menor que 100, la multiplicacion de este número por el divisor 567 forma un producto menor que 100×567 , ó que 567 centenas. Por consiguiente, si se busca cuantas veces 567 está contenido en 4728, el número 8 resultará como cuociente, pues el dividendo 472878 comprendiéndose entre 800×567 y 900×567 , el cuociente de 472878 por 567 debe comprenderse entre 800 y 900; luego este cuociente se compone de 8 centenas, mas un cierto número de decenas y unidades.

Para saber cuantas veces el divisor 567 está comprendido en 4728, púedese formar los productos del primero por los números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, por cuyo medio se ve que 4728 cae entre 567×8 y 567×9 , de manera que el número que debe ponerse al cuociente es 8. Pero en la práctica se llega al mismo resultado por medio de un tanteo que voy

á indicarte. El dividendo parcial 4728 contiene los tres productos parciales de las 7 unidades, de las 6 decenas y de las 5 centenas del divisor 567 por el número que deberá ponerse como cuociente, y el último de estos productos espresando centenas no puede hallarse mas que en las 47 centenas de 4728. Por consiguiente 47 es el producto de las primeras cifras del divisor por el número que se busca, mas de las centenas retenidas que tal vez procederán por los dos otros productos parciales, de modo que, si se procura saber cuantas veces 5 está contenido en 47, el número 9 que se encontrará espresará el número que se busca ó un número demasiado grande, pero jamás un número demasiado pequeño. Para ensayar 9, se multiplica este número por 567; el producto 5103 es mayor que 4728, luego 9 es demasiado. Para ensayar 8 se multiplica este número por el divisor; el producto 4536 es menor que 4728, luego se sabe que el divisor 567 está contenido ocho veces en el dividendo 4728.

Conocida la cifra 8 de las centenas del cuociente, para obtener las otras dos de este cuociente, obsérvese que el dividendo 472878 componiéndose de los tres productos parciales de las ocho centenas, de las decenas y de las unidades del cuociente por el divisor 567, si se sustrae de este dividendo el primer producto parcial 4536 centenas, el resto 19278 no contendrá mas que los productos de las decenas y de las unidades del cuociente por el divisor; púedese pues considerar este resto 19278 como un nuevo dividendo parcial formado del producto del divisor 567 por un cuociente parcial, cuyas decenas

y unidades son las del cuociente total. La cuestion queda de este modo reducida á dividir 19278 por 567, sabiendo que las mas altas unidades de este cuociente son decenas. Para hallar estas decenas se observa que su producto por el divisor 567 se halla en las 1927 decenas del dividendo 19278. Por otra parte las decenas que se retienen y que resultan de la cifra de las unidades del cuociente por el divisor 567, es menor que 10×567 ó que 567 decenas. Por consiguiente averiguase la cifra de las decenas del cuociente procurando saber cuantas veces 567 está contenido en 1927, á cuyo efecto determinase cuantas veces 5 está contenido en 19; el número 5 que se obtiene espresa la cifra de las decenas del cuociente ó una cifra demasiado fuerte. Para ensayar la cifra 5 multiplíquese 567 por 5. El producto 1704 espresando decenas, se sustrae 1704 decenas de 19278; el resto 2268 siendo el producto del divisor por la cifra de las unidades del cuociente, se logrará esta cifra dividiendo 2268 por 567, ó lo que es mas simple dividiendo 22 por 5. El número 4 que se obtiene espresa las unidades del cuociente total; pues sustrayendo 4 veces 567 de 2268, el resto es cero. El cuociente que se busca es 854.

Resultan de los razonamientos espuestos esta regla general: Para dividir un número por otro, se escribe el divisor á la derecha del dividendo, se traza una línea de separacion entre estos dos números, y se traza tambien otra debajo del divisor para separarlo del cuociente que se busca. Despues se toman en el dividendo tantas cifras cuantas sean

necesario para contener el divisor á lo menos una vez, si se procura saber el número que espresa cuantas veces este dividendo parcial contiene al divisor. Este número será la primera cifra á izquierda del cuociente, que se escribe en su lugar correspondiente, se multiplica por el divisor y colócase el producto bajo del dividendo, colocando una línea separatoria para poder escribir el residuo que resultará de estos dos números. En seguida se baja á la derecha la primera de las cifras del dividendo que no ha sido empleada aun, por cuyo medio resulta otro dividendo parcial sobre el cual se opera como sobre el precedente, logrando así la segunda cifra del cuociente que se busca y que se escribe á la izquierda de la primera. Continúase la misma operacion hasta acabar completamente con las cifras del dividendo. Cuando alguno de los dividendos parciales será menor que el divisor, la cifra correspondiente del cuociente será un cero.

Hemos supuesto en los ejemplos precedentes que el dividendo era el producto del divisor por un número entero, y en este caso la division ha conducido á un último resto igual á cero. Pero no siempre se verifica así. Cuando se dividen dos números cualesquiera uno por otro, frecuentemente sucede que el dividendo no es el producto del divisor por un número entero; en este caso se llega á una sobra ó resta que, si bien menor que el divisor, no es nulo. Siendo el dividendo igual al producto del divisor por el número entero obtenido en el cuociente, mas el resto último, y este resto siendo menor que el divisor, es cierto que el dividendo está

comprendido entre el producto del divisor por el número entero obtenido en el cuociente, y el producto del divisor por el número entero obtenido en el cuociente aumentado de una unidad. El cuociente total está pues comprendido entre el número entero obtenido en el cuociente y este mismo número entero aumentado de una unidad. Por este motivo se dice que el número entero que ha resultado en el cuociente es la parte entera del cuociente.

Dícese que un número es divisible por otro cuando la operacion se efectua sin resto alguno : tal como 64 por 8 cuyo producto es 8 y el resto nulo.

Para dividir un número por el producto de muchos factores, basta dividirlo sucesivamente por los factores del producto.

Para hacer la prueba de la division basta multiplicar el divisor por el número entero que resulta en el cuociente, añadiendo á este producto el resto si lo hay, cuya suma debe ser igual al dividendo.

Basta por esta vez; la siguiente pienso escribirte de algunas propiedades acerca de la naturaleza de los números enteros ; escusa si en esta te he entretenido de procederes y conocimientos que hace tiempo te constan, pues, repito, mi intencion es demostrar las operaciones generalmente conocidas, y establecer estos principios como base para establecer y decir otros mas trascendentales.



CARTA SEGUNDA.

OBSERVACIONES SOBRE ALGUNAS PROPIEDADES DE LOS
NUMEROS.



Amigo Eugenio, en la presente pienso estenderme menos que en la anterior, siendo mi objeto esponerte sucintamente algunas observaciones que resultan del examen de las propiedades de los números.

Cuando muchos números tienen un divisor comun, su suma igualmente lo tiene, pues el cuociente de cada número por el divisor comun siendo un número entero, la reunion de los cuocientes parciales es un número entero que espresa el cuociente total de la division de la suma de los números propuestos por el divisor comun.

Todo divisor de un número divide los múltiplos de este número.

La suma de muchos múltiplos de un número es un múltiplo de este número.

Cuando una suma se compone de dos partes, to-