comprendido entre el producto del divisor por el número entero obtenido en el cuociente, y el producto del divisor por el número entero obtenido en el cuociente aumentado de una unidad. El cuociente total está pues comprendido entre el número entero obtenido en el cuociente y este mismo número entero aumentado de una unidad. Por este motivo se dice que el número entero que ha resultado en el cuociente es la parte entera del cuociente.

Dicese que un número es divisible por otro cuando la operacion se efectua sin resto alguno: tal como 64 por 8 cuyo producto es 8 y el resto nulo.

Para dividir un número por el producto de muchos factores, basta dividirlo sucesivamente por los factores del producto.

Para hacer la prueba de la division basta multiplicar el divisor por el número entero que resulta en el cuociente, añadiendo á este producto el resto si lo hay, cuya suma debe ser igual al dividendo.

Basta por esta vez; la siguiente pienso escribirte de algunas propiedades acerca de la naturaleza de los números enteros; escusa si en esta te he entretenido de procederes y conocimientos que hace tiempo te constan, pues, repito, mi intencion es demostrar las operaciones generalmente conocidas, y establecer estos principios como base para establecer y decir otros mas trascendentales.

# CARTA SEGUNDA.

## OBSERVACIONES SOBRE ALGUNAS PROPIEDADES DE LOS NUMEROS.

Amigo Eugenio, en la presente pienso estenderme menos que en la anterior, siendo mi objeto esponerte sucintamente algunas observaciones que resultan del examen de las propiedades de los números.

Cuando muchos números tienen un divisor comun, su suma igualmente lo tiene, pues el cuociente de cada número por el divisor comun siendo un número entero, la reunion de los cuocientes parciales es un número entero que espresa el cuociente total de la division de la suma de los números propuestos por el divisor comun.

Todo divisor de un número divide los multíplices de este número.

La suma de muchos multíplices de un número es un multíplice de este número.

Cuando una suma se compone de dos partes, todo número que divide la suma y la primera parte divide necesariamente la segunda; pues la diferencia entre la suma y la primera parte siendo igual á la segunda parte, si se divide la suma y la primera parte por su divisor comun, los dos cuocientes serán números enteros; y su diferencia, que será un número entero, espresará el cuociente de la segunda parte por el divisor comun. Por consiguiente este último cuociente será efectivamente un número entero.

La diferencia entre dos multíplices de un número es un multíplice de este número.

Cuando se combinan varios multíplices de un número por via de adicion ó sustraccion, la diferencia es un multíplice de este número.

Cuando una suma se compone de dos partes de las cuales la una es divisible por un número y la otra no lo es, la suma no es divisible por el número en cuestion.

Un número jamás es divisible por otro mayor que su mitad.

El resto de la division de un número por 2 es el mismo que el de su primera cifra á derecha por 2.

El resto de la division de un número por 5 es el mismo que el de la division de su primera cifra á derecha por 5.

Para hallar el resto de la division de un número por 9, basta adicionar las cifras del número propuesto, y si la suma es menor que 9, esta suma será el resto. Si es mayor que 9, se opera sobre el guarismo de esta suma adicionando las cifras que las componen; y así sucesivamente hasta llegar



á encontrar una suma menor que 9. Si esta suma es igual á 9, el resto es cero y el número es exactamente divisible por 9. Esto es evidente si se repara que:

$$10=9+1,\ 100=99+1,\ 1,000=999+1,\ \text{etc.}$$

Llámase número primero el que solo es divisible por sí mismo ó por la unidad.

Dos números se designan bajo el nombre de comunes entre sí, cuando no tienen factor comun.

El mayor de todos los divisores comunes á dos números, es el que se llama su mayor comun divisor. Voy á hacerte entender como este número se halla, y para fijar las ideas, consideraremos 48 y 18. Su mayor divisor comun no pudiendo pasar de 18, se ve si el número menor propuesto 18 divide exactamente el número mayor 48, en cuyo caso seria el mayor comun divisor, pues 18 se divide exactamente á sí mismo dando por cuociente la unidad. En este ejemplo se halla que 48 es igual á $18\times2+12$. Resulta de los principios que he establecido que el mayor comun divisor entre 48 y 18 es el mismo que el de 18 y 12, pues el mayor comun divisor á 48 y 18 divide tambien la suma 48 y $18\times2$ que es una de sus partes, debe por consiguiente dividir la otra parte 12. Dividiendo 18 y 12, no puede sobrepujar el mayor comun divisor de 18 y 12; pero el último dividiendo 12 y $18\times2$ divide la suma 48, dividiendo pues 48 y 18, y por consiguiente no puede sobrepujar el mayor comun divisor de 18 y 48. Estos dos mayores comunes divisores, no pudiendo ser el uno mayor que el otro, son iguales. Los mismos razonamientos, pudiendo aplicarse á los demas números, se ve que todo divisor comun á dos números divide el resto de su divisor, y que el mayor comun divisor de dos números es el mismo que el que existe entre el mas pequeño de estos números y el resto de la division del mayor por el menor. La cuestion se reduce á saber cual es el mayor comun divisor de 18 y 12; ahora bien $18=12+6$, por consiguiente el mayor comun divisor es 6. En general, para cerciorarse del mayor comun divisor de dos números, se divide el mayor por el menor; si el resto es cero, el mas pequeño será el mayor comun divisor; si hay un resto, se divide el mas pequeño de los números propuestos por el primer resto; si el resto de esta division es cero, el primer resto será el divisor buscado, en el caso contrario se continuará en dividir los restos sucesivos unos por otros hasta llegar á un cuociente exacto; el resto que exactamente dividirá el resto precedente será el mayor comun divisor buscado.

El número de las divisiones que deben efectuarse para obtener el mayor comun divisor no puede esceder la mitad del mas pequeño de los dos números propuestos; pues á cada division los restos sucesivos disminuyen á lo menos de dos unidades.

Para hallar el mayor comun divisor de muchos números, basta buscar sucesivamente el mayor comun divisor entre el primero y el segundo, entre el mayor comun divisor obtenido y el tercer número, y así sucesivamente.



Para descomponer un número en sus factores primeros, se lo divide necesariamente por cada uno de los números primeros 2, 3, 5, etc., que no esceden su mitad, hasta lograr un cuociente exacto. Divídese despues este cuociente por el primer número que ha servido de divisor. Opérase despues sobre el último cuociente obtenido como sobre el número propuesto, observando que este cuociente no puede dividirse sino por números primeros mayores que el que ha servido de division; continúanse estos cálculos hasta que se llega á un cuociente exacto que sea un primer número. El número propuesto es igual al producto de este último cuociente por todos los números que han servido de divisor.

# CARTA TERCERA.

### DE LAS FRACCIONES O QUEBRADOS.

Amigo Eugenio, hemos visto que á veces un número no es exactamente divisible por otro, quedando un resto que no es nulo; por ejemplo, el cuociente de 26 por 8 es mayor que 3 y menor que 4, y no puede ser espresado por un número entero. Para tener una idea exacta de este cuociente, se observa que 26 es igual á 24 mas 2, y por consiguiente se logrará el cuociente de 26 por 8, reuniendo el de 24 por 8, al de 2 por 8. Ahora bien el cuociente de 24 por 8 es exactamente 3; queda, pues, á dividir 2 por 8. Para evaluar este último cuociente, imagínase la unidad dividida en 8 partes iguales; cada una de estas partes espresa el cuociente de 1 por 8, puesto que cada una de ellas repetida 8 veces da el dividendo 1; pero 2 siendo igual á 1 mas 1, se logrará el cuociente de 2 por 8, tomando 2 veces el octavo de 1, de manera que el



octavo de 2 es lo mismo que 2 veces el octavo de 1. Añadiendo los dos cuocientes parciales de 24 por 8 y de 2 por 8, se ve que el cuociente total de 26 por 8 se forma de tres unidades, mas de 2 de las octavas partes de que la unidad puede imaginarse compuesta.

Esta parte que se añade á las unidades del cuociente siendo siempre menor que la unidad, ha recibido el nombre de *fraccion* ó *quebrado*.

Para escribir la fraccion que espresa el cuociente del último resto por el divisor, se coloca el divisor bajo este resto, y se separa estos dos números por una línea; así el cuociente de 26 por 8 es de 3 unidades mas $\frac{2}{8}$ de unidad.

Para enunciar las fracciones, se da nombres particulares á las diversas subdivisiones de la unidad, y cuando esta está dividida en 2, 3, 4, etc., partes iguales cada una de estas partes se llama un medio, un tercio, un cuarto, etc.

Como en una fraccion, el número inferior sirve á denotar la especie de partes en que la unidad está dividida, y el número superior denota el número de partes que se toma; el primero se llama *denominador*, y el segundo *numerador*, y ambos se designan bajo el nombre de los *términos de una fraccion*. Así $\frac{2}{8}$ se pronuncia dos octavos; en este caso 2 es el numerador, y 8 el denominador, y ambos son los *términos de la fraccion*.

Es evidente que una fraccion no cambia de valor cuando sus dos términos se multiplican ó dividen por un mismo número, pues el efecto que un término produce el otro lo neutraliza. Así la fraccion

$\frac{2}{3}$ tiene el mismo valor que $\frac{4}{6}$ que es la misma fraccion multiplicada por 2, de manera que la misma cantidad recibe el que recibe los $\frac{2}{3}$ de una fanega de trigo que el que recibe $\frac{4}{6}$, pues si bien en este último caso el número de partes que se recibe y que espresa el numerador es doble, tambien el número de partes en que la unidad se considera dividida es doble, y por consiguiente doble mas pequeñas; en términos que siendo dobles se necesitan dos para componer una de las primeras, y por consiguiente para tomar la misma cantidad que en el primer caso es preciso tomar doble número de partes. En el primer caso suponemos la fanega dividida en tres partes iguales de las que se recibe 2, es decir la fanega entera menos una parte; en el segundo, consideramos la fanega dividida en 6 partes iguales, cada una de las cuales debe ser doble menor que cada una de las antecedentes, lo que equivale á decir que cada una de las 3 partes del primer caso se ha dividido en dos; luego si dividida así la fanega se recibiese el mismo número de partes, la cantidad recibida seria la mitad de lo que se hubiera recibido anteriormente cuando la fanega se suponia dividida en doble menos de partes; luego es preciso recibir doble número de partes para recibir la misma cantidad que anteriormente, luego una fraccion no se altera multiplicando los dos términos que la componen por un mismo número. De la misma manera si la fraccion $\frac{2}{4}$ la divido por dos, será doble menor el número de partes que se suponen que se reciben; pero tambien doble mayor las partes en que la unidad se supone dividida. Así la fraccion resul-



tante $\frac{1}{2}$ vale tanto como la fraccion $\frac{2}{4}$ diferenciándose solo en la forma. Así la misma cantidad recibe el que recibe $\frac{2}{4}$ de una fanega de trigo que el que recibe $\frac{1}{2}$ de fanega de trigo, ó la mitad de una fanega ó media fanega.

De lo dicho se infieren las consecuencias siguientes:

1ª. Una fraccion no se altera cuando sus dos términos se multiplican ó se dividen por un mismo número.

2ª. Para multiplicar una fraccion por un número cualquiera, bastará multiplicar su numerador por este número, ó dividir por él mismo su denominador.

3ª. Para dividir una fraccion por un número cualquiera, bastará dividir su numerador ó multiplicar su denominador.

4ª. Para reducir dos ó mas fracciones á un mismo denominador sin cambiar su valor bastará multiplicar los dos términos de cada una por el producto de los dos términos de las otras.

5ª. Cuando tengamos una ó muchas fracciones del mismo ó diferente denominadores de cuyo valor relativo queramos tener una idea mas completa, esto es, penetrarnos de la cantidad que espresan, deberemos reducirlas á su última espresion, lo que puede efectuarse dividiendo sus dos términos por su mayor comun divisor, conforme espliqué en mi carta anterior. Así supongamos que de resultas de varios cálculos nos resulta la fraccion $\frac{6542}{135654}$; como los términos que componen esta fraccion están compuestos de muchas cifras, no podemos formarnos mas que una idea muy confusa de su valor; pero si procuramos, por las reglas establecidas, buscar el mayor comun divisor de ambos términos, hallamos que su denominador se divide exactamente, dando por cuociente 2, de lo que resulta, segun los principios establecidos, que su mayor comun divisor es el número 6842 que compone su numerador, el cual dividido por sí mismo da 1, luego la fraccion propuesta es igual á $\frac{1}{2}$ esto es, á la mitad de la unidad. De la misma manera y discurriendo segun los mismos principios, la fraccion $\frac{6}{9}$ es igual á $\frac{2}{3}$.

Para sumar fracciones del mismo denominador, se efectua formando la suma de los numeradores, y dando á esta suma el denominador de las fracciones propuestas.

Para sustraer dos fracciones, se sustrae un denominador de otro y dando á la diferencia el denominador comun.

Si en ambas operaciones las fracciones fuesen de diferente especie, esto es, que los denominadores fuesen diferentes, será preciso reducirlas á un denominador comun; de otro modo la adicion ó sustraccion no podrian efectuarse porque las unidades fraccionarias serian de diferente especie.

La multiplicacion de las fracciones presenta dos casos:

1°. Cuando el multiplicando es una fraccion y el multiplicador un número entero, el producto se logra multiplicando el numerador ó dividiendo el denominador, segun los principios que he establecido.



2°. Cuando ambos factores son fracciones, la multiplicacion no puede considerarse como una adicion abreviada, como cuando se trata de números enteros. Es preciso generalizar el sentido que se fija á la palabra multiplicar. Esta operacion puede considerarse en este caso como teniendo por fin calcular un número llamado producto, que esté compuesto con un número llamado multiplicando de la misma manera que otro número llamado multiplicador está compuesto con la unidad. De esta definicion se deduce que el producto de muchas fracciones se espresa por una fraccion cuyo numerador es el producto de las fracciones propuestas, y cuyo denominador es el producto de los denominadores de las primeras fracciones. En efecto, supongamos que queremos multiplicar $\frac{2}{3}$ por $\frac{4}{5}$; el multiplicador $\frac{4}{5}$ componiéndose de 4 veces el quinto de $\frac{2}{3}$, se obtiene el quinto de $\frac{2}{3}$ dividiendo $\frac{2}{3}$ por 5, y los razonamientos precedentes demuestran que el cuociente es $\frac{2}{3 \quad 5}$; por consiguiente se obtendrá cuatro veces la quinta parte de $\frac{2}{3}$ ó los $\frac{4}{5}$ de $\frac{2}{3}$ repitiendo 4 veces la fraccion $\frac{2}{3 \times 5}$, lo que reduce, como se acaba de ver, á multiplicar el numerador por 4. El producto de $\frac{2}{3}$ por $\frac{4}{5}$ es pues $\frac{2 \times 4}{3 \quad 5}$ ó $\frac{8}{15}$. Luego para multiplicar una fraccion por otra se multiplica numerador por numerador y denominador por denominador.

El producto de muchas fracciones conserva su valor en cualquier orden que se efectue la multiplicacion.

La division de las fracciones puede presentar tres casos:

1°. Dividir una fraccion por otra fraccion: para efectuar esta operacion se multiplica el numerador de la fraccion dividendo por el denominador de la fraccion divisor, despues el denominador de la fraccion dividendo por el numerador de la fraccion divisor. Supongamos que queremos dividir $\frac{3}{5}$ por $\frac{8}{11}$, el producto será $\frac{33}{40}$.

2°. Dividir un entero por una fraccion. En este caso es preciso multiplicar el entero por el denominador, dividir el producto por el numerador. Así el cuociente de 12 por $\frac{7}{9} = \frac{108}{7}$. Mas esta fraccion es *impropia*, es decir que su numerador es mayor que su denominador, y por consiguiente vale mas ó es mayor que la unidad; para averiguar su valor se divide el numerador por el denominador y al resto se pone el denominador; así la fraccion resultante $\frac{108}{7}$ es igual á 15 unidades, ó números enteros y á $\frac{3}{7}$. Este proceder debe aplicarse á todos los casos que resulte una fraccion de este género. Si la fraccion tuviese el numerador exactamente igual al denominador su valor seria la unidad. La razon de este proceder es facil de percibir: supongamos que efectuando divisiones sobre fanegas de trigo, os resultase por cuociente 4 fanegas y $\frac{2}{3}$ de fanega; esta última fraccion es facil de apreciar, pues equivaldria á una fanega entera menos un tercio, ó en otros términos que el cuociente logrado seria igual á 5 fanegas menos un tercio; mas supongamos que el cuociente logrado fuese 4 fanegas y $\frac{6}{4}$ de fanega; en este caso la fraccion lograda seria impropia, es decir valdria mas que la unidad ó la fanega, pues una fanega no contiene mas que cuatro cuartas partes, y si contuviese mas, ya no serian cuartas partes; luego si han resultado seis cuartas partes de fanega ha resultado mas de una fanega, y para conocer su valor es preciso dividir el numerador por el denominador, lo que da por producto 1 mas $\frac{2}{4}$; luego $\frac{6}{4}$ de fanega es igual á 1 fanega mas $\frac{2}{4}$ de fanega, y como $\frac{2}{4}$, por los principios establecidos es igual á $\frac{1}{2}$, resulta que $\frac{6}{4}$ de fanega es igual á 1 mas $\frac{1}{2}$ ó á fanega y media. Mas si el producto hubiera sido 4 fanegas y $\frac{4}{4}$ de fanega, este producto seria equivalente á 5 fanegas, pues 4 dividido por 4 da 1, y si consideramos la unidad ó fanega dividida en cuatro partes iguales, como el denominador indica, y tomamos todas cuatro como el numerador señala, tomamos toda la fanega.



3°. Cuando se trata de dividir una fraccion por un entero, se multiplica el denominador de la fraccion por el entero dejando tal cual está el numerador. Este proceder es evidente si os acordais de lo que ya os he esplicado que para hacer una fraccion un número de veces mas pequeña, ó lo que es lo mismo dividirla por este número, se divide su numerador ó multiplica su denominador: así si queremos dividir por 4 ó hacer cuatro veces mas pequeña la fraccion $\frac{4}{40}$, segun los principios establecidos el cuociente por 4 de esta fraccion es igual á $\frac{1}{40}$ ó bien á $\frac{4}{160}$; mas como no siempre es divisible el numerador por el entero divisor, conviene mas dejar el numerador tal cual es y multiplicar el denominador; así en este ejemplo $\frac{2}{6}$ dividido por 4, no siendo el numerador divisible por 4, se usa del segundo proceder, esto es, se multiplica el denominador; así el producto de esta division será $\frac{2}{24}$.