cuestan 4 pesos y 12 reales, se trata saber á cuanto me sale la libra. Segun el proceder indicado, reduzco el divisor 4 libras y 8 onzas á la menor de sus especies.

Por ejemplo, se sabe que 7 varas y un pié han costado 68 pesos y 14 reales, si quiero averiguar á como ha costado la vara, dividiré los 68 pesos y 14 reales por 7 varas y un pié. Aquí se conoce el dividendo en que es de la misma especie que lo que se busca. Practico lo primero, y se me convierte el divisor en 22 pies; despues hago la division de la manera siguiente.

68 ps. 14 rs.	22
02	3 ps. 2 rs.
15	3
30	9 ps. 3 rs.
14	
44	
0	

Empiezo por los pesos que siendo 68, les toca 3, que son pesos, que para reducirlos á reales los multiplicaré por 15, y al producto 30 le añadiré los 14 reales que hay en el dividendo; veo que el 22 cabe dos veces en 44, y no deja resta; ahora el cuociente 3 pesos y 2 reales lo multiplico por 3, que es el que espresa las veces que la unidad de especie inferior del divisor está contenida en la mayor, y saco el producto 9 pesos y 6 reales que es en efecto el valor de la vara.

No me detendré en la demostracion de todas estas operaciones, porque se apoya en los principios que he establecido.

CARTA QUINTA.

DE LAS FRACCIONES O QUEBRADOS DECIMALES.

§ I.

Numeracion y naturaleza de estas fracciones.

Amigo Eugenio, segun dejé insinuado en mi última, de todas las maneras de subdividir la unidad principal la mas simple y cómoda para los cálculos, es, sin duda, la subdivision en partes sucesivas de diez en diez veces mas pequeñas, de lo que resultan fracciones que tienen el denominador, seguido de uno ó muchos ceros, llamadas fracciones decimales. Este modo de subdivision de la unidad ofrece, repito, grandes ventajas, puesto que inmediatamente, ó á lo menos mediante operaciones sumamente fáciles, se reducen las operaciones de los números fraccionarios á operaciones sobre números enteros. Esto es lo que te haré ver despues de haberte hecho conocer la numeracion de las fracciones decimales, es decir su nomenclatura y la manera de escribirlas en cifras.

De la misma manera que decuplicando sucesivamente la unidad, se forma nuevas unidades á las cuales se ha dado el nombre de decenas, centenas, mil, diez mil, un millon, etc., de la misma manera se ha concebido igualmente dividida la unidad en 10 partes iguales, que se han llamado *décimos*; cada décimo en diez partes iguales, llamadas *centésimos* (porque la unidad principal contiene diez veces 10 ó 100 de estas nuevas partes); despues el centésimo dividido en 10 partes, llamadas *milésimos*; cada milésimo en 10 partes, llamado *diez milésimo*; cada diez milésimo en 10 partes, llamada *cien milésimo*; cada cien milésimo en diez partes, llamada *millonésimo*, y así sucesivamente. De manera que la unidad es, por decirlo así, un centro de donde parten dos sistemas decimales: uno que es 10, 100, 1000, 10000, etc., es decir la unidad recorriendo sucesivamente grados diez veces mayor; y otro de décimos, centésimos, milésimos, diez milésimos, etc., es decir la unidad recorriendo sucesivamente grados diez veces menor. El primero es el sistema decimal ascendente que todo el mundo conoce; el segundo es el sistema decimal descendente que es el que nos ocupa. De manera que la unidad es el término ó punto de donde proceden estos dos sistemas: tal como en el termómetro, el cero es el término de donde proceden los grados llamados sobre cero y bajo cero, ó como se puede tambien llamar grados de calor y frio.

De la misma manera que en el sistema decimal ascendente, se ha convenido que las cifras por cada grado que se avanzan á la izquierda, adquieran un valor relativo diez veces mayor; se ha convenido

igualmente, como consecuencia legítima, que, en el sistema decimal descendente, tenga lugar todo lo contrario, es decir que cada cifra tenga por cada grado que camine hácia la derecha un valor diez veces mas pequeño. De lo que resulta que si, á la derecha de un número entero ya escrito en cifras, se coloca nuevas cifras, teniendo el cuidado de distinguir estas nuevas cifras de los números enteros por un signo cualquiera, una coma, por ejemplo, se representará mediante este proceder las partes sucesivas de la unidad de diez en diez veces mas pequeñas, es decir *décimos*, *centésimos*, *milésimos*, etc. Por consiguiente el conjunto de las cifras 24, 75 espresará 24 unidades, 7 décimos y 5 centésimos; 5,478 espresará 5 unidades, 4 décimos, 7 centésimos y 8 milésimos.

Supongamos que queramos enunciar en lenguage ordinario el número que estas cifras espresan: 56,5546. Este número puede enunciarse si se quiere de esta manera: 56 unidades, 5 décimos, 5 centésimos, 4 milésimos y 6 diez milésimos; pero observemos que 5 décimos valen 50 centésimos, ó 500 milésimos, ó 5000 diez milésimos; de la misma manera 5 centésimos valen 50 milésimos ó 500 diez milésimos; por lo cual el número total viene á ser 56 unidades 5506 diez milésimos; es decir que para enunciar en lenguage ordinario un número fraccionario decimal escrito, es preciso enunciar separadamente la parte entera, ó la parte á la izquierda de la coma, enunciar despues la parte décimal que está á la derecha como si espresase un número entero, y colocar al fin del enunciado el nombre de la unidad de la última subdivision décimal.

Si se quiere tambien, puédese comprender en un solo enunciado la parte entera y la parte décimal. En efecto, tomemos por ejemplo el número 56,5506; como una unidad vale 10 décimos, ó 100 centésimos, 1000 milésimos, 10000 diez milésimos, se deduce que 56 unidades equivalen á 560000 diez milésimos; y por consiguiente 56,5506 representa 565506 diez milésimos; de la misma manera 7 unidades valiendo 700000 cien milésimos, el número 7,49505 es lo mismo que 749505 cien milésimos; es decir que basta, despues de haber enunciado el nombre como si no hubiese coma, colocar al fin del número enunciado el nombre de la última subdivision. Pero en general se enuncia separadamente la parte entera.

Recíprocamente supongamos que se quiera escribir en cifras una fraccion decimal enunciada en lenguage ordinario; supongamos que se quiera escribir el nombre veinte y nueve unidades, trescientos cincuenta y cuatro milésimos: se escribe primero la parte entera 29; despues como 300 milésimos equivalen á 3 décimos y que 50 milésimos forman 5 centésimos, se coloca una coma á la derecha de 29, y se escribe despues sucesivamente las cifras, 3, 5 y 4; de lo que resultará el guarismo 29,354 para el número enunciado. Dedúcese de lo que acabo de esplicar una regla general: para escribir en cifras un número decimal enunciado en lenguage ordinario, se empieza por escribir la parte entera y se coloca una coma; despues se escribe sucesivamente á la derecha de esta coma, las cifras que representan los décimos, centésimos, etc., que contiene el enunciado, teniendo cuidado de reemplazar por ceros las unidades de diferente orden que pueden faltar.

Si no hubiese parte entera, esto es, si el número propuesto fuese una fraccion propiamente dicha, se escribe un cero para señalar el lugar de la parte entera, y despues se procede como acabo de decir.

En fin, cuando se enuncia el número, puede suceder que la parte entera no se distinga de la parte decimal, lo que no obsta, sin embargo, para escribir el número propuesto. En este caso, se escribirá el número como si solo espresase unidades enteras, y despues se colocará una coma, de manera que la última cifra á derecha esprese unidades de la última subdivision que comporta el enunciado. Por ejemplo, para escribir el número cuatro mil doscientos catorce centésimos, se escribe primero 4214; y como esta última cifra debe espresar centésimos, se coloca la coma entre 2 y 1, lo que da 42,14 ó 42 enteros y catorce centésimos.

Una fraccion ordinaria se puede, si se quiere trasformar en fraccion ordinaria, aunque esta operacion no tenga tal vez otra utilidad que la de mostrar que si bien diferente por la forma son en el fondo iguales con estas últimas. Una fraccion ordinaria se compone ordinariamente de dos números colocados el uno encima del otro, el numerador y el denominador. En fracciones decimales, el lugar que ocupa la coma basta para indicar el denominador que es igual á la unidad, seguida de tantos ceros cuantas cifras decimales hay, al paso que su numerador se compone del conjunto de las cifras á la derecha de la coma, ó bien si se considera el entero como reducido en fraccion, es el número propuesto, hecha abstraccion de la coma. Así el número 25,5037, puesto en la forma ordinaria de una fraccion, resulta como 25 $\frac{5037}{10000}$, ó si se quiere $\frac{255037}{10000}$; el número 2,00405 es igual á 2 $\frac{405}{1000000}$ ó $\frac{200405}{1000000}$; enfin 0,0002154 equivale á $\frac{2154}{40000000}$.

Recíprocamente, 2 $\frac{55}{1000}$ ó $\frac{2055}{1000}$ puede cambiarse en 2,055; $\frac{172049}{10000}$ en 17,2049.

Estas trasformaciones de fracciones ordinarias en decimales y viceversa son de un continuo uso en el cálculo.

De lo que he espuesto resulta que si, en una fraccion decimal, se adelanta la coma de uno ó muchos rangos hácia la izquierda, se multiplica el número por 10, 100, 1000, etc., y que al contrario, retrocediéndola de uno ó muchos rangos hácia la izquierda, se divide el número por 10, 100, 1,000, etc. Así, por ejemplo, si en el número 155,07295 avanzamos la coma de tres rangos hácia la derecha, lo que da 155072,95; digo que el número se ha vuelto 1000 veces mayor. En efecto, el número primitivo equivalia á $\frac{15507295}{100000}$; y cuando la coma ha mudado de lugar ha resultado $\frac{15507295}{100}$, fraccion cuyo denominador es 1000 veces mas pequeño que el de la otra; y como he demostrado que, cuando se multiplica el denominador de una fraccion, disminuye esta de valor y aumenta cuando el mismo término se divide, resulta que la segunda fraccion es 1000 veces mayor que la primera propuesta.

Al contrario, si se hace retroceder la coma de dos rangos hácia la izquierda en la misma fraccion pro-

puesta, se cambia esta en 1,5507295 ó $\frac{15507295}{10000000}$, fraccion cuyo denominador es 100 veces mayor que el de la fraccion propuesta $\frac{15507295}{100000}$; por consiguiente la nueva fraccion es 100 veces menor que esta.

Tambien se puťede demostrar esto, observando que, mudando de lugar la coma, el valor relativo de cada cifra se vuelve 10, 100, 1000, etc., veces mayor ó menor. Así comparando 155072, 95 á 155, 07295, se ve que la cifra 5, que espresaba en esta última unidades simples, espresa en la otra unidades de mil; la cifra 5 á la izquierda de 5, que espresaba decenas, representa decenas de mil, y así de las demas.

Una fraccion decimal no cambia de valor colocando á su derecha un número cualquiera de ceros: así, 5, 415 equivale á 5, 4150 ó á 5, 415000; en efecto, estos números pueden ponerse, como ya he espuesto, bajo la forma $\frac{5415}{1000}$ $\frac{54150}{10000}$ $\frac{5415000}{1000000}$; ahora bien las dos últimas fracciones no son otra cosa mas que la primera, cuyos dos términos se han multiplicado por 10, 100, lo que no cambia su valor, segun el principio que establecí, que una fraccion no cambia de valor cuando ambos sus términos se multiplican ó dividen por el mismo número. Puédese tambien observar que estos ceros colocados á la derecha de las cifras ya escritas no cambian su valor relativo; y como estos ceros no tienen valor alguno por sí mismos, la fraccion no se altera en lo concerniente á su valor.

Por medio de esta trasformacion, las fracciones decimales se reducen á un comun denominador. Por ejemplo, las fracciones 12, 407 | 0, 25 | 7, 0456 | 25, 4, equivalen á 12, 4070 | 0, 2500 | 7, 0456 | 25, 4000; y bajo esta forma tienen todas 10,000 por denominador comun.

Establecidas estas nociones, pasemos ahora á las operaciones sobre las fracciones decimales.

§ II.

Adicion y sustraccion.

Efectúase la adicion de las fracciones decimales de la misma manera que la de los números enteros : solo hay que tener presente dos circunstancias, reducir las fracciones á un comun denominador, y separar en la suma ó resultado de la adicion, por medio de una coma, tantas cifras decimales cuantas contiene la cifra que mas encierra. Por ejemplo, trátase de sumar los números 52, 4056 | 245, 579 | 12, 0476 | 9, 58 | y 459, 2575.

Lo primero que hago, es reducir todas estas fracciones á un comun denominador, añadiendo un cero á la derecha del segundo número y dos á la derecha del cuarto; despues coloco los números, así preparados los unos bajo los otros, de modo que las unidades de un mismo orden se correspondan, y efectuo la adicion como de ordinario.

Por resultado encuentro 7584497, ó separando cuatro cifras decimales á la derecha, 758,4497, porque los números añadidos espresan unidades del orden de diez milésimos.

$$\begin{array}{r} 52,4056 \\ 245,5990 \\ 12,0476 \\ 9,5800 \\ 459,2575 \\ \hline 758,4497 \end{array}$$

En la práctica, se puede dispensar de escribir ceros á la izquierda de los números que tienen menos cifras decimales, con tal que se tenga cuidado de disponer las unidades del mismo orden en una misma columna.

La sustraccion se efectua tambien como los números enteros, despues de haber reducido las fracciones á un mismo denominador. Por ejemplo, se trata de sustraer 23, 0784 de 62, 09. Para efectuar la sustraccion, escribo dos ceros á la derecha de 62, 09, lo que me da 62, 0900; despues efectuo la sustraccion como de ordinario, teniendo cuidado solamente de separar 4 cifras decimales á la derecha del resultado.

$$\begin{array}{r} 62,0900 \\ 23,0784 \\ \hline 39,0116 \end{array}$$

Estos procederes se fundan en que las unidades de diferentes órdenes, en las fracciones decimales, teniendo el mismo valor relativo que en los números enteros, debe suceder, como en estos últimos, por lo tocante á las unidades retenidas ó por la unidad del orden inmediatamente superior que, por abstraccion, se toma prestada en la segunda operacion.

§ III.

Multiplicacion de fracciones decimales.

Para efectuar esta operacion, multiplícase los dos números propuestos uno por otro, sin hacer caso de la coma; y logrado el producto total, se separa hácia la derecha por una coma, tantas cifras decimales cuantas hay en ambos factores. Supongamos, por ejemplo, que tenemos que multiplicar 35, 407 por 12, 54.

$$\begin{array}{r} 35{,}407 \\ 12{,}54 \\ \hline 141628 \\ 177035 \\ 70814 \\ 35407 \\ \hline 444{,}00378 \end{array}$$

Para comprender el proceder prescrito, observemos que los dos números propuestos pueden ponerse bajo la forma $\frac{35407}{1000}$ y $\frac{1254}{100}$. Ahora bien, como, segun queda demostrado, para multiplicar dos fracciones una por otra, es preciso multiplicar numerador por numerador y denominador por denominador; y como, segun tambien queda demostrado, los numeradores son los números propuestos, hecha abstraccion de la coma, se deberá comenzar por multiplicar estos números uno por otro, lo que dará 44400378. Despues, multiplicando los dos denominadores, resulta el producto 100000, esto es, la unidad seguida de tantos ceros cuantas cifras decimales hay en ambos factores; y así es preciso dividir el producto obtenido por 100000, lo que equivale evidentemente á separar 5 cifras decimales hácia la derecha, por cuyo medio se logra el resultado 444, 00378.

Para haceros mas patente esta demostracion, procuraré esplicárosla de otro modo. Cuando quitais la coma del multiplicando, se multiplica evidentemente por 1000, puesto que antes espresaba milésimos, y que despues de la operacion espresa unidades principales ó unidades enteras; por consiguiente, segun os he hecho ver, el producto se ha vuelto por este medio 1000 veces mayor; de la misma manera, como mediante la supresion de la coma en el multiplicador, se vuelve 100 veces mayor, de lo que resulta que el producto se ha vuelto de nuevo 100 veces demasiado grande; resultando mediante la supresion de ambas comas 100000 veces mayor, luego para volverlo á su valor debido, es preciso dividirlo por 100000 ó separar 5 cifras decimales á la derecha, cuyo razonamiento seria análogo si mayor fuese el número de cifras decimales en ambos factores.

Puede tambien suceder que solamente uno de los números decimales contenga decimales; en este caso se separa á la derecha del producto tantas cifras decimales cuantas hay en este número, proceder cuya demostracion es ocioso esponer, resultando de los principios establecidos.

Aplicando los procederes prescritos resulta que

1°. El producto de 4, 0567 por 9, 505 es igual á 38, 5508201;

2°. El producto de 4, 0015 por 29 es 16, 0435;

3°. El producto de 0, 03054, por 0, 023 es 0, 00070242.

Este último ejemplo merece alguna atencion. Prescindiendo de la coma en los dos factores, y efectuando la multiplicacion resulta por producto, 70242; pero como hay *cinco* cifras decimales en el multiplicando, y *tres* en el multiplicador, seria preciso separar *ocho* en el producto que no contiene mas que *cinco*. Para zanjar la dificultad, obsérvase que, debiendo espresar el producto unidades de octavo orden decimal, basta escribir á la derecha de 70242, un número de ceros suficiente para que colocando despues la coma, la última cifra 2 ocupe el octavo rango decimal, En el caso presente el número de ceros que deben añadirse deberán ser cuatro, contando el que debe ocupar el lugar de los enteros; y resulta 0, 00070242.

§ IV.

Division de las fracciones decimales.

Para efectuar esta operacion, se comienza por re-

ducir los números propuestos á un comun denominador, y despues se hace la division prescindiendo de la coma. Trátese por ejemplo de dividir 43, 047 por 2, 53698. Empiezo por escribir dos ceros á la derecha de 43,047, lo que me da 43,04700, y despues divido 4304700 por 253698, obteniendo por cuociente 16 $\frac{245552}{253698}$.

4304700	253698
1767720	16
245552	

En efecto despues de haber escrito dos ceros á la derecha del dividendo, lo que no cambia su valor, se puede poner los dos números propuestos bajo la forma de $\frac{4304700}{100000}$ y $\frac{253698}{100000}$; en seguida segun el proceder prescrito para dividir una fraccion por otra se multiplica el numerador del dividendo por el denominador del divisor, y el numerador de este por el denominador de aquel, lo que da por resultado, atendido que 100000 es el factor comun de los dos términos $\frac{4304700}{253698}$; lo que equivale á hacer la division de los dos números, prescindiendo de la coma despues de haberlos reducido á un comun denominador.

Puédese tambien deducir que, despues de haber reducido las dos fracciones á un comun denominador, mediante la supresion de la coma en ambos términos, se vuelve el dividendo y divisor el mismo número de veces mayor, lo cual no altera su valor respetivo, pues multiplicando ó dividiendo por un mismo número el dividendo y el divisor no cambia el cuociente.

§ V.

Reduccion de una fraccion ordinaria en fraccion decimal.

A causa de las ventajas que el sistema décimal presenta sobre las fracciones ordinarias, los aritméticos consideran de mucha importancia el sustituir las fracciones decimales á las comunes, lo que se consigue evaluando en decimales una fraccion ordinaria, ó en otros términos convirtiéndola en decimales. Trátese por ejemplo de convertir en decimales la fraccion ordinaria $\frac{13}{47}$. Este número refiriéndose á la unidad principal, espresa los $\frac{13}{47}$ de esta unidad; pero como una unidad simple vale 10 décimos, se sigue $\frac{130}{47}$ de décimo;

$$
\begin{array}{l|l}
130 & 47 \\ \cline{2-2}
\ \ 360 & 0,27659 \\
\ \ \ \ 310 & \\
\ \ \ \ \ \ 280 & \\
\ \ \ \ \ \ \ \ 450 & \\
\ \ \ \ \ \ \ \ \ \ 27 &
\end{array}
$$

Así, si despues de haber dispuesto los dos números 13 y 47 como en la division ordinaria, se pone un cero en el cuociente para ocupar el lugar de enteros seguida de una coma para separarlo de las cifras decimales, y despues se divide 130 por 47, el cuociente 2 que se obtiene, y que se escribe á la derecha de la coma, representa el número de decimos contenidos en $\frac{130}{47}$; es decir que $\frac{130}{47}$ es igual á 2 décimos mas $\frac{36}{47}$ de décimo. De la misma manera, como un décimo vale 10 centésimos, consiguientemente $\frac{36}{47}$ de décimo es igual á $\frac{360}{47}$ de centésimo, ó efectuando esta nueva division, á 7 centésimos, mas $\frac{31}{47}$ de centésimo. Escribiendo cero á la derecha de 31, y dividiendo 310 por 47, resulta por cuociente 6 milésimos, que se escribe á la derecha de las cifras precedentes, y por resto resulta 28, á cuyo lado se pone un nuevo cero para volverlo en diez milésimos; y así sucesivamente. Continuando la operacion hasta haber logrado cinco cifras decimales hállase que la fraccion $\frac{13}{47}$ equivale á 0, 27659, y ademas $\frac{27}{47}$ de cien milésimo, fraccion de que no se hace caso por ser la cantidad que representa muy poco considerable; y entonces se dice que 0, 27659 representa el valor de $\frac{13}{47}$ con una diferencia menor que un cien milésimo, en atencion á que la fraccion de que se prescinde es menor que la unidad de este orden.

De lo que acabo de esponer resulta la regla siguiente : para convertir una fraccion ordinaria en fraccion decimal, se disponen los dos números como en la division, y se escribe un cero al cuociente y á la derecha de este cero una coma. Despues, se pone un cero á la derecha del numerador, y el número que resulta se divide por el denominador, mediante lo cual se obtiene un cuociente que espresa los décimos y un resto ; agrégase á este resto un cero, y el número resultante se divide por el denominador, lo que da un cuociente que espresa los centésimos, y otro resto al que tambien se agrega un 0 á la derecha y se divide por el denominador, mediante lo cual se logra otro cuociente que espresa los milésimos y ademas un tercer resto con el cual se opera como en el anterior, continuando de la misma manera, hasta que resulte el número de cifras decimales que se desea ó que la cuestion exige. Si resulta un resto, la fraccion decimal que se obtiene de este modo, se diferencia de la fraccion propuesta de una cantidad menor que la última unidad decimal del cuociente.

Si el numerador de la fraccion que debe cambiarse en fraccion decimal fuese mayor que el denominador, ó en otros términos, que la fraccion fuese impropia, deberán estraerse las unidades, las que deberán ponerse en el cuociente seguidas de una coma para separarlas de las cifras decimales.

Esto es cuanto pienso oportuno decirte sobre las fracciones decimales en general, sintiendo mucho que los estrechos límites de una carta no me permitan estenderme mas acerca de estos procederes y demostraciones, y especialmente acerca de la reduccion de una fraccion ordinaria en fraccion decimal, punto de grande importancia y que tal vez trataré mas prolijamente á mi regreso. Por ahora me apresuro á cerrar esta carta que ya es demasiado larga, siendo mi intencion escribirte de nuevo á la mayor brevedad esponiéndote sucintamente la aplicacion del sistema decimal que acaba de ocuparnos.

CARTA SESTA.

APLICACION DEL SISTEMA DECIMAL. NUEVO SISTEMA DE PESOS Y MEDIDAS.

Amigo Eugenio, conforme te prometí en mi última, voy á tratar de la aplicacion del sistema decimal, que es el que rige en Francia ; por las teorías y procederes que te he espuesto en mi anterior, estás en estado de apreciar todas las ventajas que este cálculo presenta sobre el de las fracciones ordinarias, y de juzgar cuan importante seria establecer un sistema de pesos y medidas dependiente de este sistema. Esta innovacion la han conseguido los hombres de progreso en Francia, si bien á pesar de muchos obstáculos ocasionados por la ignorancia y las preocupaciones. Voy á trazarte el cuadro de la nomenclatura de los números complexos de este sistema, prescindiendo de toda clase de esposicion de procederes aritméticos, que son los mismos que he establecido tratando del sistema decimal en abstracto.