un 0 á la derecha y se divide por el denominador, mediante lo cual se logra otro cuociente que espresa los milésimos y ademas un tercer resto con el cual se opera como en el anterior, continuando de la misma manera, hasta que resulte el número de cifras decimales que se desea ó que la cuestion exige. Si resulta un resto, la fraccion decimal que se obtiene de este modo, se diferencia de la fraccion propuesta de una cantidad menor que la última unidad decimal del cuociente.

Si el numerador de la fraccion que debe cambiarse en fraccion decimal fuese mayor que el denominador, ó en otros términos, que la fraccion fuese impropia, deberán estraerse las unidades, las que deberán ponerse en el cuociente seguidas de una coma para separarlas de las cifras decimales.

Esto es cuanto pienso oportuno decirte sobre las fracciones decimales en general, sintiendo mucho que los estrechos límites de una carta no me permitan estenderme mas acerca de estos procederes y demostraciones, y especialmente acerca de la reduccion de una fraccion ordinaria en fraccion decimal, punto de grande importancia y que tal vez trataré mas prolijamente á mi regreso. Por ahora me apresuro á cerrar esta carta que ya es demasiado larga, siendo mi intencion escribirte de nuevo á la mayor brevedad esponiéndote sucintamente la aplicacion del sistema decimal que acaba de ocuparnos.

CARTA SESTA.

APLICACION DEL SISTEMA DECIMAL. NUEVO SISTEMA DE PESOS Y MEDIDAS.

Amigo Eugenio, conforme te prometí en mi última, voy á tratar de la aplicacion del sistema decimal, que es el que rige en Francia ; por las teorías y procederes que te he espuesto en mi anterior, estás en estado de apreciar todas las ventajas que este cálculo presenta sobre el de las fracciones ordinarias, y de juzgar cuan importante seria establecer un sistema de pesos y medidas dependiente de este sistema. Esta innovacion la han conseguido los hombres de progreso en Francia, si bien á pesar de muchos obstáculos ocasionados por la ignorancia y las preocupaciones. Voy á trazarte el cuadro de la nomenclatura de los números complexos de este sistema, prescindiendo de toda clase de esposicion de procederes aritméticos, que son los mismos que he establecido tratando del sistema decimal en abstracto.

Medidas linearias ó de longitud.

Los Franceses han dado el nombre de METRO á la *diez millonésima parte* de la distancia del polo al ecuador, contada del meridiano que pasa por París. Segun las operaciones ejecutadas y verificadas con la mayor precision, se he reconocido que el metro evaluado en pies, pulgadas, líneas, etc., vale 3 pies, 0 pulgadas, 11 líneas y 296 milésimos de línea con la diferencia de $\frac{1}{1000}$ de línea á corta diferencia.

Pará designar medidas mayores ó menores que el metro se ha convenido de emplear los siguientes términos sacados del griego y del latin :

MIRIO, KILO, HECTO, DECA, DECI, CENTI, MILLI,

que significan diez mil, mil, ciento, diez, décimo de, centésimo de, milésimo de, y que si se quiere se coloca delante de la palabra metro, de manera que se ha formado el siguiente cuadro :

Miriámetro,	ó medida de	diez mil metros.
Kilómetro,	—	mil metros.
Hectómetro,	—	cien metros.
Decámetro,	—	diez metros.
METRO,	—	*unidad* principal.
Decímetro,	—	décimo de metro.
Centímetro,	—	centésimo de metro.
Milímetro,	—	milésimo de metro.

El miriámetro y el kilómetro son las medidas

itinerarias adoptadas actualmente en Francia; el miriámetro es á corta diferencia el doble de una legua ordinaria; el kilómetro será una quinta parte, ó bien tal vez un cuarto de legua poco mas ó menos, aunque esta relacion varia segun las diferentes leguas.

Medidas de superficie.

La unidad de las superficies es el *metro cuadrado;* pero cuando se trata de grandes superficies agrarias, tómase por unidad el *decámetro cuadrado*, ó diez metros cuadrados; esta unidad se llama área y equivale á corta diferencia á 36 pies cuadrados castellanos.

Los multíplices del área se designan por medio de las voces *myria*, *kilo*, *hecto*, de la manera siguiente :

Miriárea,	equivalente á	diez mil áreas.
Kiloárea,	—	mil áreas.
Hectoárea,	—	cien áreas.
Decárea,	—	diez áreas.
AREA,	—	*unidad* principal.
Deciárea,	—	décimo de área.
Centiárea,	—	centésimo de área.
Miliárea,	—	milésimo de área.

Medidas de solidez.

La unidad de solidez es el METRO CUBO ; es decir un cubo (figura que como sabes tiene la forma de un dado de jugar), que tiene un metro en cada lado. Los múltiplices y los submultíplices del metro cubo, no han recibido en general denominaciones particulares; sin embargo el milésimo de un metro cubo ha recibido el nombre de *decímetro cubo*, porque efectivamente es un cubo que tiene á cada lado un decímetro; el millonésimo de un metro cubo se ha llamado *centímetro cubo*, porque tiene un centímetro á cada lado. Cuando las medidas de solidez se aplican á la leña y materiales de construccion, la unidad principal ó el metro cubo se llama ESTERIO, del que se considera el *decaesterio*, ó medida de diez esterios.

Medida de capacidad para los líquidos y granos.

La unidad de capacidad es el decímetro cubo, llamado LITRO, del cual se forman los siguientes múltiplices y submultíplices :

Hectólitro,	ó medida de	cien litros.
Decálitro,	—	diez litros.
LITRO,	—	*unidad* principal.
Decílitro,	—	décimo de litro.
Centílitro,	—	centésimo de litro.

Del peso.

La unidad del peso es un centímetro cubo de agua destilada y en su *maximum* de densidad, á la que se ha dado el nombre de GRAMO, siendo los siguientes sus principales múltiplices y submultíplices :

Miriógramo,	equivalente á	diez mil gramos.
Kilógramo,	—	mil gramos.
Hectógramo,	—	cien gramos.
Decágramo,	—	diez gramos.
GRAMO,	—	*unidad* principal.
Decígramo,	—	décimo de gramo.
Centígramo,	—	centésimo de gramo.
Milígramo,	—	milésimo de gramo.

El kilógramo vale dos libras á corta diferencia.

De las monedas.

La unidad de moneda francesa es el FRANCO. Para lograrla, se ha pesado cinco gramos de barra de plata con un décimo de liga.

El décimo del franco se ha llamado *décimo*, y el centésimo *céntimo*.

Tal es la nomenclatura de las nuevas medidas, cuyas ventajas sobre las antiguas resumiré en pocas palabras :

1°. Este sistema es uniforme y sencillo, porque sus unidades principales y las subdivisiones de estas unidades siguen entre sí la ley del sistema decimal de numeracion, y ya sabes lo facil que es el cálculo de las fracciones decimales.

2°. Es fijo, invariable y susceptible de ser adoptado en todos los paises, pues no pertenece á ningun clima ni á ninguna nacion en particular.

Todas estas medidas reconocen por origen primitivo el *metro*, que se ha sacado á las dimensiones del globo terrestre. Las monedas, que á primera vista parecen alejarse de esta medida, se refieren á ella indirectamente, pues el franco vale cinco gramos de plata ligada, y el gramo es el peso de un centímetro cubo de agua destilada.

La aplicacion de las cuatro reglas de la aritmética al nuevo sistema de pesos y medidas, no puede presentar mucha dificultad despues de lo que tengo espuesto acerca de las fracciones decimales; por este motivo no me detendré en su aplicacion, y tanto menos cuanto que estas aplicaciones minuciosas te serian en parte inútiles, pues hasta la actualidad este sistema solo se usa en Francia [1]. El próximo correo pienso hablarte de las potencias y raices de los números.

[1] Véase al fin del tomo I las tablas de reduccion de pesos y medidas.

CARTA SÉPTIMA.

DE LAS POTENCIAS Y RAICES DE LOS NUMEROS.

§ I.

De la raiz cuadrada.

Amigo Eugenio, segun te he prometido en mi última, vamos á tratar de las potencias y raices.

El producto de un número por sí mismo se llama el *cuadrado* de este número; y el número que, multiplicado por sí mismo, da el cuadrado, se le llama *raiz cuadrada*. Así, el cuadrado de 4 es el producto 16, de 4 por 4, y la raiz cuadrada de 16 es 4.

Para indicar el cuadrado de un número, se coloca la cifra 2 á su derecha y un poco encima; la raiz cuadrada de un número se designa poniendo este número bajo el signo $\sqrt{}$. Así 4^2 indica el cuadrado de 4, y $\sqrt{16}$ designa la raiz cuadrada de 16.

Los cuadrados de los números 1, 10, 100, etc., siendo 1, 100, 1000, etc., tienen sus raices comprendidas entre 1 y 100, entre 100 y 1000, etc., y por consiguiente, cuando el cuadrado de un número entero no tiene mas de dos cifras, la raiz cuadrada de este cuadrado no tiene mas que una cifra; cuando encierra tres ó cuatro cifras, la raiz cuadrada tiene dos y así sucesivamente. Pasemos ahora á ver como se estrae la raiz cuadrada de los números enteros.

Los cuadrados de los números de una sola cifra siendo menores que 100, se saca de estos cuadrados la raiz cuadrada, haciendo los cuadrados de los 9 primeros números, y viendo cual número como raiz conviene al número propuesto.

Para hacerte comprender el proceder que se emplea para estraer la raiz cuadrada de un número entero que depase 100, voy á procurar hacerte comprender como las diferentes partes de la raiz 64, cooperan á la formacion del cuadrado del mismo número.

64	
64	
16	unidades, cuadrado de 4 unidades.
24	decenas, producto de 6 decenas por 4 unidades.
24	decenas, producto de 6 decenas por 4 unidades.
36	centenas, cuadrado de 6 decenas
4096	unidades, cuadrado de 6 decenas.

El cuadrado de 64 es el producto 4096, que resulta de la multiplicacion de 64 por sí mismo; mas para hacerte comprender como las diferentes partes

de la raiz cooperan á la formacion del cuadrado, he procedido de la manera que ves mas arriba, poniendo separadamente los varios productos parciales que resultan. Así, en el primer producto parcial 16 unidades que resulta de la multiplicacion de 4 por 4, en lugar de poner, como de costumbre 6 unidades y guardar la decena para agregarla al producto de las decenas, escribo completamente las 16 unidades, y lo mismo hago con respecto á las decenas, resultando por producto total 4096 unidades que es el cuadrado del número 64.

La misma descomposicion se puede aplicar á otro cualquier número. De lo que resulta que el cuadrado de un número compuesto de decenas y unidades contiene tres partes: el cuadrado de las decenas, el doble de las decenas multiplicado por las unidades y el cuadrado de las unidades.

Vamos á ver ahora como del cuadrado de un número cualquiera se puede estraer la raiz.

Trátese por ejemplo de estraer la raiz cuadrada de 4096; dispónese el cálculo de la manera siguiente:

Cuadrado	4096	64
	36	124×4=496
Primer resto	496	
	496	
Segundo resto	0	

y se dice: el cuadrado de 10 vale 100, el cuadrado de las decenas de la raiz solo puede hallarse en las 40 decenas de 4096; sepárase por un punto las dos primeras cifras á la derecha de 40.96. Como 40 cae entre 6^2 y 7^2, digo que 6 es la cifra de las decenas de la raiz. En efecto 40 siendo mayor que 6^2, las 40 centenas de 4096 espresan un número mayor que 6^2 centenas; por consiguiente si se añade 96 unidades á las 40 centenas la suma 4096 será necesariamente mayor que 6^2 centenas. Por otra parte, 40 siendo menor que 7^2, y el esceso de 7^2 sobre 40 no pudiendo ser menor que la unidad, 40 centenas espresa un número menor que 7^2 centenas, y el esceso de 7^2 centenas sobre 40 centenas no puede ser menor que una centena. Añadiendo pues el número 96 que es menor que una centena, la suma 4096 será necesariamente menor que 7^2 centenas. Por consiguiente el número añadido está comprendido entre 6^2 centenas y 7^2 centenas, es decir entre los cuadrados de 6 decenas y 7 decenas, luego la raiz cuadrada de 4096 está tambien comprendida entre 6 y 7 decenas; luego está comprendida entre 6 decenas y de un cierto número de unidades menor que 10. Para obtener estas unidades, sustraese de 4096 el cuadrado 36 centenas de las centenas de la raiz; el resto 496 no contiene mas que el doble de las 6 decenas de la raiz, multiplicado por las unidades y el cuadrado de las unidades. El doble de las decenas multiplicado por las unidades espresando decenas, solo puede hallarse en las 49 decenas del resto 496, del cual se separan por un punto en esta forma 49. 6. Estas 49 decenas contienen ademas las decenas que pueden resultar del cuadrado de las unidades; por consiguiente dividiendo 49 por 12, que es el doble de las decenas de la raiz,

las cuatro unidades del cuociente espresan las cifras de las unidades de la raiz, ó una cifra demasiado fuerte. Para ensayar la cifra 4, se observa que el resto 496 componiéndose del doble de las 6 decenas, multiplicado por las cuatro unidades y del cuadrado de 4 unidades, basta calcular la suma de estas dos partes y restarla de 496. Con este objeto, se escribe la cifra 4 de las unidades á la derecha de 12, número doble de las decenas de la raiz, lo que da 124, que multiplicado por 4, da por producto la suma que se pide. Sustrayendo 4 veces 124 de 496, el resto cero indica que 64 es la raiz exacta de 4096.

El razonamiento que ha servido á determinar las decenas de la raiz, siendo aplicable á un número cualquiera, conclúyese que la raiz cuadrada del mayor cuadrado contenido en las centenas de un número cualquiera, determina siempre las decenas de la raiz cuadrada de este número.

Si el número propuesto contuviese mas de 4 cifras, por analogía, se deduce que será preciso dividirlo en grupos de dos cifras, partiendo de la derecha, y que será preciso buscar el mayor cuadrado contenido en el último grupo á izquierda. La raiz de este mayor cuadrado espresará el valor de la primera cifra á izquierda de la raiz.

La segunda cifra, partiendo de la izquierda de la raiz, deberá ser tal, que el cuadrado formado por estas dos cifras, sea el mayor cuadrado contenido en las dos últimas columnas á izquierda, y se hallará esta segunda cifra por el método empleado cuando los números no contienen mas de dos grupos;

es decir, que en el número propuesto, se prescindirá de todas las cifras, á escepcion de las contenidas en los dos grupos del lado izquierdo.

La tercera cifra de la raiz deberá ser tal, que el cuadrado del número que da con los dos otros sea el mayor cuadrado contenido en los tres grupos del número propuesto.

Tomemos, por ejemplo, el número 421201; será preciso disponer el cálculo de la manera siguiente :

Cuadrado	42.12.01	649		
	56	125	124	1289
Primer resto	6 12	5	4	9
	4 96	625	496	11601
Segundo resto	1 16 01			
	1 16 01			
Tercer resto	0			

El cálculo puede enunciarse de esta manera; el mayor cuadrado contenido en 42 es 36, cuya raiz es 6; luego 6 es la primera cifra de la izquierda de la raiz.

42.12 contiene el cuadrado de 64 : he demostrado que el mayor cuadrado, contenido 42,12, no puede pasar el número 64, y el cuadrado de 64 es igual á 36 centenas, mas 4 veces 12 decenas, ó 48 decenas y ademas 16 unidades.

Restando 36 centenas de 42, 12, el resto 61, 2 deberá contener 4 veces las 12 decenas, mas las unidades; por lo que colocamos una coma entre la cifra 2, y dividimos 61 por 12, y hallamos que 5 es

un número escesivo, pues haciendo el producto de 125 por 5, el producto 625 no puede restarse de 612; ensayamos la cifra 4, la cual pudiendo restarse es cifra exacta. El producto 496 puede sustraerse de 612, y el resto es 116; bájase las dos cifras restantes 01. Este resto debe contener evidentemente el doble producto de 64 decenas por 9; efectúase la division por el número doble de 64 ó 128, y se ensaya la cifra 9, verificando si el producto 1289 por 9 puede restarse de 116, 01, el resto cero indica que 9 es exacto.

Cuando la raiz cuadrada de un número entero se halla comprendida entre dos números enteros consecutivos, esta raiz, aunque exista, no puede espresarse exactamente por ningun número. En efecto, si un número pudiese espresar esta raiz, este número seria decimal ó fraccionario, y convirtiéndolo en fraccion irreductible, el cuadrado de esta fraccion irreductible deberia ser un número entero, lo que no es posible.

Llámanse inconmensurables las cantidades que no tienen medida comun con la unidad.

Para estraer la raiz cuadrada de un número entero, se opera como si este número fuese un cuadrado, y cuando el último resto, correspondiente á las cifras de las unidades de la raiz, no es cero, la raiz que se busca es inconmensurable, y el mayor cuadrado, contenido en la raiz cuadrada, espresa la raiz del mayor cuadrado contenido en el número propuesto.

Si por abstraccion te figuras un número descompuesto en dos partes, y si multiplicas la suma de estas partes por esta misma suma, te convencerás que el cuadrado de una suma formada de dos partes se compone del cuadrado de la primera parte, del doble de la primera parte multiplicada por la segunda, y del cuadrado de la segunda parte.

Cuando el resto que, correspondiente á la raiz que se logra, no es menor que el doble de esta raiz, aumentado de 1, la raiz obtenida es demasiado pequeña, á lo menos de una unidad; y cuando el resto es menor que el doble de esta raiz aumentada de uno, esta raiz no puede ser aumentada de uno.

El cuadrado de una fraccion es el producto de una fraccion por sí misma, é igual por consiguiente al cuadrado del numerador, dividido por el cuadrado del denominador, de lo que resulta que, para estraer la raiz cuadrada de una fraccion, basta estraer separadamente la raiz cuadrada del numerador y la del denominador.

§ II.

De los cubos y de la raiz cúbica de los números enteros.

El producto de tres factores, igual á un número dado, es lo que se llama el cubo de este número; y el número que, tomado tres veces como factor, determina un número dado, es la raiz cúbica de un número dado.

Para indicar el cubo de un número, se coloca la

cifra 3 á su derecha y un poco encima. La raiz cúbica de un número se designa poniendo este número bajo el signo $\sqrt[3]{}$

Los cubos de los números 1, 10, 100, etc., siendo 1 y 1000, entre 100 y 1000000, etc., tienen sus raices cúbicas comprendidas entre 1 y 10, entre 10 y 100, etc. Por consiguiente, cuando el cubo de un número entero no contiene mas de 3 cifras, la raiz cúbica de este cubo no contiene mas que una sola cifra; cuando el cubo contiene 4, 5, 6 cifras, la raiz cúbica no contiene mas que dos, y así sucesivamente.

Siendo los cubos de los números de una sola cifra menores que 10^3 ó que 1,000, averigúase las raices cúbicas de estos cubos haciendo uso de la tabla siguiente:

Raiz cúbica : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Cubos : 1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729.

Para estraer la raiz cúbica de un número entero mayor que 1000, obsérvase que el cubo de un número, compuesto de decenas y de unidades, contiene 4 partes: el cubo de las decenas, el producto de tres veces, el cuadrado de las decenas por las unidades, tres veces el cuadrado de las unidades por las decenas, y el cubo de las unidades. Estas cuatro partes espresan respectivamente miles, centenas, decenas y unidades. Así el cubo de 64 se compone del cubo de 216 mil, de 6 decenas de 64, de tres veces el cuadrado de 36 centenas de las 6 decenas multiplicado por las 4 unidades, de 432 centenas, de 3 veces las 6 decenas multiplicadas por el cuadrado de 4 unidades ó de 288 decenas, y enfin del cubo 64 de las 4 unidades; el número 262144, suma de estas 4 partes, espresa el cubo de 64. Para averiguar el cubo de 649, puédese descomponer este número en 64 decenas, mas 9 unidades, y el cubo pedido está formado del cubo 264144 mil de 64 decenas de 649, de 3 veces el cuadrado 4096 centenas, de las 64 decenas multiplicadas por las 9 unidades ó de 110592 centenas, de 3 veces las 64 decenas multiplicadas por el cuadrado 81 de las 9 unidades, ó de 15552 decenas del cubo 729 de las 9 unidades; la suma 273359449 de estas 4 partes es el cubo de 649.

Ahora voy á enseñarte como del cubo de un número entero se puede estraer la raiz cúbica; supongamos que queremos sacar la raiz cúbica del número 262144. Dispónese el cálculo de la manera siguiente :

Cubo	262.144	64	raiz cúbica.
	216	43200	
Primer resto	46 144	2880	
	46 144	64	
Segundo resto	0	46144	

y se dice : el cubo de las decenas de la raiz siendo á lo menos igual á mil, no puede hallarse mas que en las 262 mil de 262. 144 (me se olvidaba decirte que se separa por un punto las tres primeras cifras á derecha de 262144), el número 262 estando comprendido entre 6^3 y 7^3, digo que 7 es la cifra de las

decenas de la raiz; en efecto 262 siendo mayor que 6^3, los 262 mil de 262144 espresan un número mayor que 6^3 mil, luego si se añade 144 unidades á 262 mil, la suma 262144 será necesariamente mayor que 6^3 mil. Por otra parte, 262 es menor que 7^3, y el esceso de 7^3 sobre 262 no puede ser menor que una unidad. Por consiguiente, el esceso de 7^3 mil sobre 262 mil no puede ser menor que una unidad de mil; añadiendo pues á 262 mil el número 144 que es menor que una unidad de mil, la suma 262144 será necesariamente menor que 7^3 mil. El número propuesto 262144 está pues comprendido entre 6^3 y 7^3, es decir entre los cubos de 6 decenas y de 7 decenas; luego la raiz cúbica de 262144 está comprendida entre 6 y 7 decenas, luego se compone de 6 decenas y de un cierto número de unidades menor que 10. Para lograr estas unidades, réstase de 262144 el cubo 216 mil de las 6 decenas de la raiz; el resto 46144 no contiene mas que 3 veces el cuadrado de las 6 decenas de la raiz, multiplicadas por las unidades, 3 veces las 6 decenas multiplicadas por el cuadrado de las unidades y el cubo de las unidades; el producto de 3 veces el cuadrado de las 6 decenas por las unidades siendo centenas, solo puede hallarse en las 461 centenas del resto 461. 44, de cuyo resto sepáranse por un punto las dos primeras cifras á derecha. Ademas estas centenas contienen las centenas contenidas en las dos últimas partes del cubo. El cuadrado triple de las 6 decenas es 108 centenas; luego dividiendo 461 centenas por 108 centenas ó 461 por 108, las cuatro unidades del cuociente espresan las cifras de las unidades de la raiz ó una cifra escesiva. Para ensayar la cifra 4 se quita 64^3 de 262144; el resto cero hace ver que 64 es la raiz cúbica exacta de 262144.

El mismo resultado se consigue restando del resto 46144 la suma de las 3 últimas partes 432 centenas, 288 decenas, 64 unidades del cubo de 64.

Siendo aplicable á un número cualquiera, el razonamiento que ha servido para determinar las decenas de la raiz cúbica citada, conclúyese que la raiz del mayor cubo, contenido en las unidades de mil de un número cualquiera, determina siempre las decenas de la raiz cúbica de este número.

El cubo de una fraccion se obtiene elevando el numerador y el denominador al cubo. Luego para hallar la raiz cúbica de una fraccion, basta estraer separadamente la raiz cúbica del numerador y denominador.

El cubo de un número decimal se obtiene formando el cubo, hecha abstraccion de la coma, y separando á la derecha de este último cubo tres veces tantos decimales cuantos hay en el número decimal propuesto.

CARTA OCTAVA.

RAZONES, PROPORCIONES Y PROGRESIONES.

§ I.

De las razones y de las proporciones aritmética y geométrica.

Amigo Eugenio, la diferencia entre dos cantidades es su relacion aritmética ó por diferencia, y el cuociente de dos cantidades es su razon geométrica ó por cuociente. Así la razon aritmética de 18 á 6 es 18—6 ó 12, y la razon geométrica de 18 á 6 es $\frac{18}{6}$ ó 3; 18 y 6 son los dos términos de cada una de estas razones. El primer término 18 es el antecedente, y el segundo término 6 es el consecuente.

Las razones aritméticas no cambian cuando se aumenta ó se disminuye los dos términos de un mismo número; pues, cuando los dos números aumentan ó disminuyen de una misma cantidad, no cambia su diferencia. Por ejemplo, la razon aritmética