la raiz ó una cifra escesiva. Para ensayar la cifra 4 se quita 64^3 de 262144; el resto cero hace ver que 64 es la raiz cúbica exacta de 262144.

El mismo resultado se consigue restando del resto 46144 la suma de las 3 últimas partes 432 centenas, 288 decenas, 64 unidades del cubo de 64.

Siendo aplicable á un número cualquiera, el razonamiento que ha servido para determinar las decenas de la raiz cúbica citada, conclúyese que la raiz del mayor cubo, contenido en las unidades de mil de un número cualquiera, determina siempre las decenas de la raiz cúbica de este número.

El cubo de una fraccion se obtiene elevando el numerador y el denominador al cubo. Luego para hallar la raiz cúbica de una fraccion, basta estraer separadamente la raiz cúbica del numerador y denominador.

El cubo de un número decimal se obtiene formando el cubo, hecha abstraccion de la coma, y separando á la derecha de este último cubo tres veces tantos decimales cuantos hay en el número decimal propuesto.

CARTA OCTAVA.

RAZONES, PROPORCIONES Y PROGRESIONES.

§ I.

De las razones y de las proporciones aritmética y geométrica.

Amigo Eugenio, la diferencia entre dos cantidades es su relacion aritmética ó por diferencia, y el cuociente de dos cantidades es su razon geométrica ó por cuociente. Así la razon aritmética de 18 á 6 es 18—6 ó 12, y la razon geométrica de 18 á 6 es $\frac{18}{6}$ ó 3; 18 y 6 son los dos términos de cada una de estas razones. El primer término 18 es el antecedente, y el segundo término 6 es el consecuente.

Las razones aritméticas no cambian cuando se aumenta ó se disminuye los dos términos de un mismo número; pues, cuando los dos números aumentan ó disminuyen de una misma cantidad, no cambia su diferencia. Por ejemplo, la razon aritmética de 7 á 5 es igual á la de 7+4 á 5+4 ó de 11 á 9; pues 7—5 es igual á 11—9.

Las razones geométricas no cambian cuando se multiplican ó se dividen sus dos términos por un mismo número; pues esta razon es equivalente á una fraccion, cuyo numerador y denominador son el antecedente y el consecuente de la relacion, y ya os he probado que una fraccion no cambia de valor cuando no se divide sus dos términos por un mismo número. Por ejemplo, la razon geométrica de 7 á 3 es la misma que la de 7×4 á 3×4 ó de 28 á 12; pues estas razones son respectivamente iguales á las fracciones $\frac{7}{3}$, $\frac{28}{12}$ que son iguales. El conjunto de dos razones iguales forma lo que se llama una proporcion. Por ejemplo, la razon aritmética de 7 á 5 es igual á la de 11 á 9, los números 7, 5, 11, 9, forman una proporcion aritmética que se escribe así:

7.5:11.9.

y que se enuncia: 7 es á 5 como 11 es á 9.

La razon geométrica de 7 á 3 es igual á la de 28 á 12, los nombres 7, 3, 28, 12, forman una proporcion geométrica que se escribe:

7:3::28:12

y que se enuncia 7 es á 3 como 28 es á 12.

Para distinguir los dos antecedentes y los dos consecuentes de una proporcion, se llama el primer antecedente y el primer consecuente los dos términos de la primera razon, y el segundo antecedente, y el segundo consecuente, los de la segunda razon.

En una proporcion aritmética, la diferencia de los dos primeros términos es la diferencia de la primera razon, y la diferencia de los dos otros la diferencia de la segunda razon.

Resulta de estas definiciones que en toda proporcion aritmética ó geométrica, la diferencia de la primera razon es igual á la diferencia de la segunda.

El cuarto término de una proporcion se designa con el nombre de una cuarta proporcional á los otros tres términos. Cuando los términos medios son iguales, la proporcion se llama continua.

En la proporcion aritmética 5.7:7.9, el término medio 7 es una mediana aritmética entre 5 y 9; esta proporcion se escribe ordinariamente de esta manera: ∴5.7.9, en este caso 9 es una tercera proporcional aritmética á 5 y 7; de la misma manera 4:12::12:36 es una proporcion geométrica continua que se escribe de esta otra manera:

∷4:12:36.

12 es una mediana geométrica, 36 una tercera proporcional geométrica.

En toda proporcion aritmética, la suma de los estremos es igual á la de los medios. En efecto, sea por ejemplo la proporcion aritmética 7.5:11.9, proporcion que espresa que las razones entre 7—5 y 11—9 son iguales; por consiguiente, si se aumenta las razones de la suma 5+9 de los consecuentes, los resultados serán iguales; mas 7—5+5+9 se reduce á $7+9$, y á $11-9+5+9$ se reduce á $11+5$; luego la proporcion $7.5:11.9$ da $7+9=11+5$.

Cuando la suma de dos números es igual á la suma de dos otros números, estos cuatro números forman una proporcion aritmética, en la cual los dos números que componen una de las sumas son los estremos y los dos otros son los medios.

En efecto, sea la igualdad $7+9=11+5$.

Si de las dos cantidades $7+9$, $11+5$, se resta $5+9$, los restos serán iguales. Se tiene pues $7-5=11-9$, las razones aritméticas $7-5$ y $11-9$ son iguales.

El cuarto término de una proporcion aritmética es igual á la suma de los medios disminuida del primer término. En efecto, la proporcion $7.5:11.9$ dando $7+9=5+11$, se tiene $9=5+11-7$. Por consiguiente cuando se conoce tres términos de una proporcion aritmética, se puede deducir el cuarto.

En toda proporcion geométrica, el producto de los estremos es igual al producto de los medios. En efecto, la proporcion $7:5::28:12$ espresa que

$$\frac{7}{5}=\frac{28}{12}, \text{ y por consiguiente que } 7\times12=28\times5.$$

Cuando el producto de dos números es igual al de dos otros, estos cuatro números pueden formar una proporcion; en efecto,

$$7\times12=28\times5, \text{ luego } \frac{7}{5}=\frac{28}{12}, \text{ luego } 7:5::28:12.$$

El cuarto término de una proporcion es igual al producto de los medios divididos por el primer término; en efecto,

$$12=\frac{28\times5}{7}$$

Por consiguiente, cuando se conoce tres términos de una proporcion, se puede siempre deducir el cuarto; si los medios son iguales, cada uno de ellos es igual á la raiz cuadrada del producto de los estremos; en efecto,

$$4:12::12:36, \text{ luego } 12\times12=12^2=4\times36, \text{ luego}$$
$$12=\sqrt{4\times36}$$

En fin, es facil ver que, siempre que el producto de los medios será igual al de los estremos, tendrá lugar la proporcion. Dedúcese de lo que precede que cuando dos proporciones tienen una razon comun, las dos otras razones forman una proporcion, y que si dos proporciones tienen los mismos antecedentes y los mismos consecuentes, los cuatro términos forman una proporcion. En fin puede decirse: en una proporcion el primer antecedente mas ó menos un cierto número de veces su consecuente, es á este consecuente, como el segundo antecedente, mas ó menos el mismo número de veces su consecuente, es á este consecuente. Por ejemplo

$$20:2::30:3. \text{ Pónese } \frac{20}{2}=\frac{30}{3}.$$

Esta propiedad se demuestra por lo que se sabe de cálculo de las fracciones, que

$$\frac{20\pm4\times2}{2}=\frac{50\pm4\times5}{5}.$$

Es facil deducir otras propiedades de las proporciones teniendo presente las diferentes propiedades de las fracciones; así se tiene por ejemplo

$$\frac{20}{2}=\frac{50}{5},\ \text{luego}\ \frac{20}{2+20\times4}=\frac{50}{5+20\times4}.$$

Cuando se multiplica los términos de muchas proporciones unos por otros y por orden, los cuatro productos forman una nueva proporcion. En efecto sea, por ejemplo,

$$5:6::4:8\ \text{y}\ 5:7::20:28$$

$$\text{se tiene}\ \frac{5}{6}=\frac{4}{8}\ \text{y}\ \frac{5}{7}=\frac{20}{28}$$

$$\text{luego}\ \frac{5}{6}\times\frac{5}{7}=\frac{4}{8}\times\frac{20}{28}$$

lo que da $5\times5:6\times7::4\times20:8\times28$.

§ II.

Aplic cion de las proporciones.

Suponte tú que mediante lo que acabo de esponer se tratase de resolver el siguiente problema: Cuatro artesanos han fabricado 20 metros de una

obra cualquiera, ¿cuantos metros fabricarán 9 artesanos?

Este problema, por cuyo término se entiende una proposicion en que se enuncia que por medio de ciertas cosas conocidas debemos averiguar alguna desconocida, pertenece á lo que se llama regla de tres simple; para resolverlo se llama x el número en cuestion que es el de los metros que 20 artesanos harian, y segun los principios establecidos se tiene la proporcion siguiente:

$$4:20::9\ \text{es}\ x,\ \text{luego}\ x=\frac{20\times9}{4}=45.$$

Es decir que el número de metros que fabricarian 9 artesanos es 45.

Ahora, voy á esponerte otro ejemplo algo mas complicado que se llama regla de tres compuesta, pero que como el anterior reposa igualmente en la teoría de razones y proporciones que forma el asunto de esta carta.

Dos artesanos trabajando 5 horas diarias, han hecho en 5 dias 90 metros de una obra cualquiera; ¿cuantos metros fabricarán en 2 dias 5 artesanos trabajando 7 horas diarias?

Es preciso atender sucesivamente al número de los artesanos, de las horas y de los dias.

Dos artesanos trabajando 5 horas diarias durante 5 dias, hacen tanta obra como 6 obreros trabajando 1 hora diaria durante 5 dias; ó que 50 obreros trabajando durante 1 hora y durante un dia. Ahora bien 5 artesanos, trabajando 7 horas, hacen tanta obra como 21 artesanos durante 1 hora, y si trabajan durante 2 dias seria preciso 42 artesanos trabajando durante 1 hora, 1 solo dia para hacer el mismo trabajo.

La cuestion se reduce de este modo á una regla de tres simple que se puede espresar así :

30 artesanos, durante un tiempo dado han hecho 90 metros de obra, ¿cuantos metros harán 42 artesanos durante el mismo tiempo? Tenemos pues

$$30:90::42:x=126.$$

Pasemos ahora á lo que se llama regla de interés, para comprender la cual, examina el siguiente problema : ¿cuanto debe ser el rédito de 480000 reales de dinero efectivo durante 3 años, á razon del 5 por ciento?

La ganancia siendo de 5 por ciento, es evidente que al cabo de tres años 100 reales valdrán 115. Observado esto, el problema se reduce á lo siguiente : si 100 reales al cabo de 3 años valen 115, ¿cuánto valdrán 480000? y el cuarto término de la proporcion indica este valor :

$$100:115::480000:x=552000.$$

Supongamos que se quiere saber cuanto valdrán 560000 reales, pagables á 40 meses.

Si 100 reales dan 5 reales de ganancia por año, por 4 meses daran $\frac{5}{3}$ de real; luego 100 reales valen al cabo de 40 meses,

$$100+5+5+5+\frac{5}{3} \text{ ó } 115+\frac{5}{3} \text{ ó } \frac{350}{3} \text{ reales,}$$

Tenemos pues la proporcion : $\frac{350}{3}$ reales valor de 100 al cabo de 40 meses es á 100, como 560000 es al valor que se busca.

$$\frac{350}{3}:100::560000:x=480000.$$

§ III.

De las progresiones aritméticas.

La progresion aritmética, ó por diferencia, se forma de una sucesion de términos que crecen ó decrecen, de tal modo que la diferencia entre dos términos consecutivos cualesquiera es constante. Esta diferencia es la razon de la progresion. Por ejemplo los números 4, 7, 10, 13, 16, forman una progresion aritmética ascendente cuya razon es 3 y que se escribe de esta manera :

$$\div 4.\ 7.\ 10.\ 13.\ 16.$$

y se enuncia : 4 es á 7 como 7 á 10, etc.

Segun la definicion de la progresion aritmética ascendente, el segundo término es igual al primero, mas la razon ; el tercero igual al segundo, mas la razon, es decir al primer término aumentado de dos veces la razon; y en general un término de un rango cualquiera es igual al primer término, aumentado de tantas veces la razon cuantos términos hay antes de él.

Cuando la progresion es descendente, un término de un rango cualquiera se logra disminuyendo el primer término de tantas veces la razon cuantos términos hay antes de él.

Por consiguiente, puédese formar una progresion cuando se conoce el primero, el último término y el número total de los términos; pues si 4 y 16 siendo los dos términos estremos, se pide que haya tres términos, comprendidos entre 4 y 16, 16 deberá contener el número 4, y ademas la razon tantas veces cuantos términos habrá antes de él, es decir 4 veces la razon; luego se logra la razon restando 4 de 16, lo que da 12, que, dividido por 4, da de razon 3; y de esta manera se halla la progresion:

4.7.10.13.16.

§ IV.

Progresiones geométricas.

La progresion geométrica ó por cuociente se forma de una serie de términos, tales que dividiendo cada uno de ellos por el que le precede, queda constante el cuociente; este cuociente es la razon de la progresion. Por ejemplo, los números 1, 3,

9, 27, 81, forman una progresion geométrica, cuya razon es 3, y que se escribe de la manera siguiente:

:: 1 : 3 : 9 : 27 : 81.

y que se enuncia: 1 es á 3, como 3 á 9, como 9 á 27, como 27 á 81.

Segun la definicion de la progresion geométrica, el segundo término es igual al primero multiplicado por la razon; el tercero igual al segundo multiplicado por la razon, y al primero multiplicado dos veces por la razon; y en general, un término de un rango cualquiera es igual al primer término multiplicado por la razon, tomada tantas veces como factor cuantos términos hay antes de él; de manera que un término cualquiera puede obtenerse multiplicando el primer término por la razon elevada á una potencia indicada por el número de términos que le preceden.

Resulta de lo espuesto, que podemos insertar un cierto número de medios geométricos entre dos números dados. Hemos visto que bastaba, para obtener la razon de la progresion que se pide, calcular el cuociente de la division de los dos números dados por el mas pequeño, y de estraer de este cuociente la raiz del grado indicado por el número de medios geométricos aumentado de 1.

Resulta tambien, de lo que hemos visto, que insertando sucesivamente un mismo número de medios geométricos entre el primer término y el segundo de una progresion geométrica, entre el segundo y el tercero, etc., el conjunto de todos es

[redacted]

[redacted]