gundo y el tercero, etc., el conjunto de todos estos términos forma una nueva progresion geométrica.

La propiedad análoga tiene tambien lugar por lo tocante á las progresiones aritméticas.

En mi próxima carta pienso hablarte de los logaritmos.

CARTA NONA.

TEORIA DE LOS LOGARITMOS.

§ I.

Amigo Eugenio, conforme te lo prometí en mi última, pienso á hablarte en esta acerca de los logaritmos, por cuyo nombre se entiende los números en proporcion por diferencia, que corresponden, término por término, á los números en progresion por cuociente ó geométrica. Voy á presentarte mas clara esta definicion. Cuando se compara dos progresiones indefinidas, la una geométrica empezando por la unidad, y la otra aritmética empezando por cero, cada término de la segunda progresion es lo que se llama el *logaritmo* del término correspondiente de la primera progresion, y el conjunto los términos de estas dos progresiones forma lo que se llama *un sistema de logaritmos*.

Síguese de esta definicion que el logaritmo de la unidad es siempre igual á cero.

En progresiones de esta especie, cada término de la progresion geométrica es igual á la razon tomada tantas veces como factor cuantos términos hay antes de él, y cada término de la progresion aritmética es igual á la razon repetida tantas veces cuantos términos hay antes de él. Por consiguiente los términos sucesivos de la progresion geométrica son las potencias relativas de la razon de esta progresion, y el rango de cada término lo indica el esponente de la razon en este término aumentado de una unidad.

Cuando un término de la progresion geométrica ocupa el mismo rango que un término de la progresion aritmética, estos dos términos son tales que el esponente de la razon en el término de la razon geométrica es igual al multiplicador de la razon en el término correspondiente de la progresion aritmética, y recíprocamente todas las veces que el esponente de la razon en un término de la progresion geométrica es igual al multiplicador de la razon en un término de la progresion aritmética, se sabe que estos dos términos ocupan el mismo rango en las dos progresiones.

Multiplicando uno por otro los dos términos de la progresion, y añadiendo los términos correspondientes de la progresion aritmética, el producto y la suma serán términos de estas progresiones, y ademas estos términos se corresponderán. Esto procede inmediatamente de lo que precede.

Resulta, pues, que si dos progresiones, la una

geométrica empezando por la unidad, la otra aritmética empezando por cero, se colocan una en frente de otra :

∷1:3:9:27:81:243:779:2187:6561, etc.
:0.2.4.6.8.10.12. 14 . 16 , etc.

para hallar el producto, ocupado por el producto de muchos términos de la progresion geométrica, bastará añadir los términos correspondientes de la progresion aritmética; el término que representa la suma corresponderá al término que representa el producto. Así el producto de los tres términos 3, 9, 27, corresponde á la suma de los tres términos 2, 4, 6,, cuya suma es 12; por consiguiente el producto buscado es 279.

Los términos de la progresion aritmética siendo los logaritmos de los términos correspondientes de la progresion geométrica, el logaritmo del producto de muchos términos es pues igual á la suma de los logaritmos.

Si, entre todos los términos de las dos progresiones que hemos considerado, se inserta un número muy grande de términos, podremos trasformar la progresion geométrica en otra que será tal, que la serie de los números enteros consecutivos, partiendo de la unidad, se hallará, sino representada exactamente, á lo menos espresada por términos que diferirán tan poco como se quiera de los números naturales.

Por lo tocante á los números mayores que la unidad, podemos establecer los principios siguientes : el logaritmo del producto de muchos factores es igual á la suma de los logaritmos de estos factores. Por ejemplo 21, siendo el producto de 3 por 7, se tiene :

$$\log.21=\log.3+\log.7.$$

El logaritmo del cuociente es igual al logaritmo del dividendo, menos el logaritmo del divisor; pues el dividendo siendo igual al producto del divisor por el cuociente, resulta que el logaritmo del dividendo es igual á la suma de los logaritmos del divisor y del cuociente. Así :

$$\log.\left(\frac{21}{7}\right)=\log.\ 21-\log.\ 7=\log.\ 3.$$

El logaritmo de un número fraccionario es igual al logaritmo del numerador, menos el logaritmo del denominador; pues se puede considerar un número fraccionario como indicando el cuociente de la division de su numerador por su denominador; así :

$$\log.\ \frac{21}{7}=21-\log.\ 7.$$

El logaritmo de una potencia es igual al producto del logaritmo de este número por el grado de la potencia. Así :

$$\log.\ 4^3=3\ \log.\ 4.$$

El logaritmo de una raiz se obtiene dividiendo

el logaritmo de este número por el grado de la raiz. Así :

$$\log.\ \sqrt[3]{64}=\frac{1}{3}\log.\ 64.$$

§ II.

De los logaritmos en el sistema cuya base es 10.

El sistema decimal, cuyas ventajas te he espuesto, se aplica tambien á los logaritmos. Este sistema, generalmente adoptado para los cálculos numéricos, se deduce de las progresiones siguientes :

$$\because 1:10:100:1000:10000:100000:1000000,\ \text{etc.}$$
$$\div\ 0.1.2.3.4.5.6\ \ \text{etc.}$$

insertando sucesivamente medios geométricos y aritméticos entre los términos de estas progresiones. La razon 10 de la progresion geométrica primitiva se llama la base del sistema del logaritmo.

En este sistema, los logaritmos de los números

1, 10, 100, 1000, etc.

siendo iguales

0, 1, 2, 3, etc.,

resulta que, segun que un número está comprendido entre 1 y 10, entre 10 y 100, etc., su logaritmo cae entre cero y uno, entre uno y dos, etc.

Por consiguiente, si se evalua los logaritmos en decimales, la parte entera del logaritmo de un número entero ó decimal, mayor que la unidad, contendrá tantas unidades menos una cuantas cifras hay en la parte entera del número cuyo logaritmo se busca. Esta parte entera del logaritmo, se llama la *característica*.

Conocido el logaritmo de un número, para deducir el logaritmo del producto ó del cuociente de este número, por la unidad seguida de muchos ceros, basta aumentar ó disminuir el logaritmo dado de tantas unidades como hay ceros. Así, se tiene :

$$\text{Log.}(47\times 1000)=\text{log.}47\times\text{log.}1000=\text{log.}47+3.$$

$$\text{Log.}\left(\frac{47}{1000}\right)=\text{log. }47-\text{log. }1000=\text{log. }47-3.$$

Cuando se aumenta ó se disminuye el logaritmo de un número de muchas unidades, el resultado es el logaritmo del producto ó del cuociente de este número por una potencia de 10 igual al número de unidades de que se aumenta ó disminuye el logaritmo dado. Por ejemplo se tiene :

$$\text{Log. }47+3=\text{log. }47+\text{log. }1000=\text{log. }(47\times 1000)=\text{log. }(47\times 10^3).$$

$$\text{Log. }2547-3=\text{log. }2547-1000=\text{log. }\left(\frac{2547}{1000}\right)=\text{log. }\left(\frac{2547}{10^3}\right).$$

El sistema de logaritmos, determinado por las progresiones primitivas :

$$\because 1 : 10 : 100, \text{ etc.,}$$
$$\div 0 . 1 . 2 \quad \text{etc.,}$$

no puede conducir sino á los logaritmos de los números mayores que la unidad. Para lograr los logaritmos de los números menores que la unidad, seria preciso que estos números hiciesen parte de la progresion geométrica, y como en esta progresion cada término, dividido por la razon 10, da el término precedente, se puede hacer preceder el término 1 de los términos $\frac{1}{10}$ y $\frac{1}{100}$, etc., de suerte que la progresion geométrica, indefinidamente prolongada de parte y otra del término 1, se vuelve :

$$\ldots. : \frac{1}{100} : \frac{1}{10} : 1 : 10 : 100 : \ldots.$$

Para hallar los logaritmos de los números $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, se debe establecer convenciones por medio de las cuales se pueda formar los términos que preceden á cero en la nueva progresion aritmética, y como cada término de la progresion aritmética, disminuido de la razon 1, da el término precedente, el término que precede á cero se obtendrá quitando á cero una unidad ; lo que hace 0—1, ó solamente —1, y así sucesivamente se tendrá —2, —3, etc.

En este caso, las progresiones se escribirán de la manera siguiente :

$$\because \frac{1}{1000} : \frac{1}{100} : \frac{1}{10} : 1 : 10 : 100.$$
$$-3, -2\ -1, 0.\ 1.\ \ 2.$$

Segun que un número esté precedido del signo + ó del signo —, se dice que este número es positivo ó negativo. A los números que no estan precedidos de signos, se les supone precedidos del signo +, y son por consiguiente positivos.

Para calcular los logaritmos de los números menores que la unidad, es preciso insertar medios geométricos entre los términos 1, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, etc., de la progresion geométrica, y de medios aritméticos entre los términos correspondientes 0—1, etc. de la progresion aritmética. La indagacion de los medios geométricos no ofrece dificultad; pero la determinacion de los medios aritméticos exige que se sepa operar sobre los números negativos.

§ III.

De las cuatro operaciones de la aritmética sobre los números positivos y negativos.

Cuando se quiere sumar números positivos y negativos, es preciso generalizar el sentido fijado hasta el presente á la definicion de la adicion; por los signos + y —, colocados delante de los números, indican realmente adiciones y sustracciones parciales. Consideraremos pues la adicion de muchos números positivos y negativos, como teniendo por fin, hallar un solo número positivo ó negativo que esprese el resultado de las adiciones y de las sustracciones parciales, indicadas por los signos + y — que afectan los números sobre los cuales se opera. Este resultado es lo que se llama la suma de los números propuestos. Segun esta nueva definicion de la adicion, para obtener la suma de muchos números positivos ó negativos, se ponen los números los unos seguidos de los otros con sus signos; así para añadir +2 á menos 3, se escribe +2—3=1.

La sustraccion debe considerarse como una operacion cuyo fin es, conociendo la suma de dos números y uno de estos números, determinar el otro número que es la diferencia.

Dedúcese de esta definicion que, para obtener el resto de una sustraccion, basta escribir despues del número de que se sustrae, el número que se intenta sustraer ó sustraendo, tomado con un signo contrario á aquel de que está afectado; el resultado reducido á su mas simple espresion es el resto que se busca.

La multiplicacion tiene por fin de calcular un número producto, que esté compuesto con un número conocido, llamado multiplicando, de la manera que un número dado, llamado multiplicador, está compuesto con la unidad.

El signo del producto debiendo depender necesariamentede los signos de los factores, y de ninguna manera de sus valores numéricos, basta determinar el signo del producto en el caso en que el multiplicador sea un número entero. Partiendo de este principio, cuando el multiplicador tiene el signo $+$ el producto tiene el signo del multiplicando; pues el multiplicador, componiéndose de la adicion de muchas unidades, el producto debe componerse de la adicion de muchos números iguales al multiplicando, y se ha visto que la suma de muchos números del mismo signo está afectada del signo de estos número. Así:

$$(+2)\times(+3)=+6.(+2)\times(-3)=-6.$$

Cuando el multiplicador tiene el signo —, el producto tiene un signo contrario al del multiplicando; pues el multiplicador entero negativo, componiéndose de la sustraccion de muchas unidades, se formará el producto sustrayendo muchas veces el multiplicando; lo que equivale, como se ha visto, á hacer la suma de muchos números iguales al multiplicando, y afectados de un signo contrario al del multiplicando, y por consiguiente esta suma, que espresa el producto que se busca, estará afectada de un signo contrario al del multiplicando.

Por ejemplo, el producto de $(-3)(-2)=+6$.

La division tiene por fin, conociendo el producto de dos números llamado dividendo, y uno de estos números llamado divisor, hallar el otro llamado cuociente. De la definicion de la regla de los signos en la multiplicacion resulta que el cuociente de dos

números de los mismos signos tiene el signo $+$, y que el cuociente de dos números de signo diferente tiene el signo —. Por ejemplo

$$\frac{+6}{+2}=3, +\frac{-6}{-2}=+3, \frac{+6}{-2}=-3, \frac{-6}{+2}=-3.$$

§ IV.

De los logaritmos negativos.

Facil es ahora hacer ver que las dos progresiones descendente y ascendente, mas acá de cero y mas allá de cero y de uno, tienen las mismas propiedades en un caso que en otro, esto es, que el producto ó el cuociente de los dos términos de la progresion geométrica es siempre uno de los dos términos de esta progresion; pues, si ponemos la progresion bajo esta forma:

$$\frac{1}{10^4}:\frac{1}{10^3}:\frac{1}{10^2}:\frac{1}{10}:1:10:10^2:10^3:10^4-,$$

se halla que, por ejemplo, $\frac{1}{10^3}\times10^4=10$ que es uno de los términos, de la misma manera que 10^3, dividido por $\frac{1}{10}$, puesto que el cuociente iguala á 10^4.

Se ve de la misma manera, en la progresion aritmética, que la suma ó diferencia de dos términos cualquiera es siempre un término de la progresion; pues en la progresion

$\cdot -5 \cdot -4 \cdot -3 \cdot -2 \cdot -1 \cdot 0 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot$

la suma $-3+2=-1$, la diferencia $(-3)-(+2)=-5$ que tambien es un término.

Facil es de ver á la sola inspeccion que, en el sistema de los logaritmos determinado por estas dos progresiones, los números mayores que la unidad tienen logaritmos positivos que son tanto mayores cuanto mayores son estos números; mientras que los números positivos menores que la unidad, tienen logaritmos negativos que son tanto mayores cuanto mas pequeños son estos números.

Tambien es consecuencia que los números negativos no pueden tener logaritmos.

Esto es cuanto pienso oportuno decirte acerca de los logaritmos y de la aritmética en general; en mi próxima carta empezaré á tratar del algebra; pero como existe entre esta última ciencia grande analogía con la aritmética, te aconsejo que repases y recapacites maduramente las teorías y procederes espuestos.

ALGEBRA.