dendo y el divisor con relacion á una misma letra; pero puede suceder que uno de los polinomios propuestos ó ambos contengan muchos términos afectados de una misma potencia de la letra con relacion á la cual se quiere arreglar; esto complica un poco la division, pero la regla establecida es siempre la misma.

Sea $Ma^4+Na^3+Pa^2+Ra+V$ el dividendo, y $M'a^2+N'a+P'$ el divisor.

Cada uno de los coeficientes M, N, P, Q, M', N', P', designa el conjunto de muchos términos. Así Ma^4 representa toda la parte del dividendo afectada de a^4, y así de los otros. Establecido esto, puesto que el mayor esponente de a es 4 en el dividendo, y 2 en el divisor, debe tambien ser igual á 2 en el cuociente que afecta entonces la forma Aa^2+Ba+C. Para determinar la parte de este cuociente afectada de la mas alta potencia, se repara que el producto de las dos partes Aa^2 y $M'a^2$ no puede esperimentar ninguna reduccion con los otros productos del divisor por el cuociente, y, por consiguiente, debe ser igual á la parte Ma^4 del dividendo afectada de la mas alta potencia.

Luego recíprocamente si se divide Ma^4 por $M'a^2$, se deberá tener la parte Aa^2 del cuociente; lo que equivale á dividir A por A', puesto que a^4, dividido por a^2, da a^2; lograda la parte Aa^2, se multiplica cada una de las partes del divisor por Aa^2 y se resta á proporcion los productos parciales que se obtiene; lo que da un primer resto con el cual se opera como con el polinomio propuesto.

2° Para dividir un polinomio por una cantidad

independiente de la letra con relacion á la cual se ha ordenado este polinomio, basta efectuar la division en cada uno de los coeficientes de esta letra.

Trátese, por ejemplo, de dividir $(b^2-c^2)a^3+(b^4-c^4)a^2+3(b+c)\ a$ por $b+c$. Divídese cada uno de los coeficientes b^2-c^2, b^4-c^4,, por $b+c$; los cuocientes siendo $b-c$, $b^3-cb^2+c^2b-c^3$, $3a$; el cuociente total es:

$$(b-c)a^3+(b^3-cb^2+c^2b-c^3)a^2+3a.$$

CARTA DUODÉCIMA.

FRACCIONES LITERALES O ALGEBRAICAS.

Amigo Eugenio, en la presente me estenderé mucho menos que en la anterior, siendo mi objeto tratar sucintamente la cuestion que nos ocupa.

Ejecútase en las fracciones algebráicas las mismas operaciones que en las fracciones aritméticas. Así, una fraccion cualquiera no cambia de valor cuando ambos sus términos se multiplican ó dividen por una misma cantidad.

Sea, por ejemplo, la fraccion $\frac{a}{b}$, cuyo cuociente podemos representar por q, de manera que resulta $\frac{a}{b}=q$; pero el dividendo a siendo igual al producto del divisor por el cuociente, se tiene : $a=bq$: de lo que se deduce $a\times m=bq\times m=b\times m\times q$, de lo que resulta $q=\frac{a\times m}{b\times m}$; pero q es ya igual á $\frac{a}{b}$, luego $\frac{a}{b}=\frac{a\times m}{b\times m}$, lo que demuestra el principio enunciado.

Este principio se emplea para reducir diversas fracciones á un comun denominador; á este objeto basta multiplicar los dos términos de cada una de ellas por el producto de los denominadores de las otras.

Por ejemplo las fracciones $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f}, \frac{p}{q}$, reducidas á un comun denominador, se vuelven

$$\frac{adfq}{bdfq}, \frac{cbfq}{bdfq}, \frac{ebdq}{bdfq}, \frac{pbdf}{bdfq}.$$

Cuando se halla un denominador multíplice de todos los otros, la operacion puede simplificarse; sean, por ejemplo, las fracciones

$$\frac{5x}{12}, \frac{4}{3}, \frac{7x}{9}.$$

Para reducirlas á un mismo denominador, obsérvase que 36 es multíplice de 12, 3 y 9. Se dividirá, pues, 36 por cada uno de los denominadores, y se multiplicará los numeradores por los diferentes cuocientes obtenidos. Entonces las fracciones reducidas serán

$$\frac{15x}{36}, \frac{48}{36}, \frac{28x}{36}.$$

Para sumar las fracciones, es preciso reducirlas á un mismo denominador si no lo están; en cuyo caso no queda mas que añadir los nuevos numeradores y dar á la suma el denominador comun.

Así $\frac{ab}{4}+\frac{5}{c}+\frac{5d}{7}$ equivale á $\frac{7abc+84+20cd}{28c}$

y que $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}+\frac{\varepsilon}{f}=\frac{adf+cbf+\varepsilon bd}{bdf}$.

La sustraccion de dos fracciones del mismo denominador se efectua tomando la diferencia entre los numeradores, y afectándola del denominador comun.

$$\text{Así } \frac{a}{b}-\frac{c}{b}=\frac{a-c}{b}.$$

Cuando las fracciones no tienen el mismo denominador, será preciso reducirlas á un comun denominador.

En la multiplicacion de muchas fracciones, el producto se espresa por una fraccion, cuyo numerador es el producto de los numeradores de las fracciones propuestas, y cuyo denominador es el producto de los denominadores de las mismas fracciones.

Sea por ejemplo $\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}\times\frac{\varepsilon}{f}$. Poniendo $\frac{a}{b}=m$, $\frac{c}{d}=n$, $\frac{\varepsilon}{f}=p$, se tendrá $a=bm$, $c=dn$, $\varepsilon=pf$, de lo que resulta $a\times c\times\varepsilon=bmdn\times pf=mnh\times bdf$; por consiguiente $mnp=\frac{a\times c\times\varepsilon}{bdf}$. Lo que demuestra el principio enunciado.

En efecto supongamos que tenemos que dividir

$\frac{a}{b}$ por $\frac{c}{d}$; redúcese estas fracciones á un comun denominador, resultando la division $\frac{ad}{bd}$ por $\frac{bc}{bd}$, lo que equivale á dividir *ad* por *bc*, pues el cuociente no se altera cuando se multiplica el dividendo y el divisor por *bd*; luego el cuociente que se pide es $\frac{ad}{bc}$ ó $\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}$. Lo que demuestra el principio enunciado.

Cuando se quiere dividir una fraccion por un número entero, basta multiplicar el denominador de la fraccion por el número entero.

$$\text{Así } \frac{a}{b}:c=\frac{a}{bc}.$$

Para reducir un número entero en una fraccion que tenga un denominador dado, basta multiplicar el entero por el denominador dado.

Así $a=\frac{a\times b}{b}$; esto sirve á convertir en una sola espresion fraccionaria uno ó muchos monomios juntos á una fraccion.

Así $a\times\frac{b}{c}=\frac{ac+ba}{c}$, $\frac{a}{b}+c+d=\frac{a+cb+bd}{b}$,

de la misma manera

$$a^2-a+1+\frac{2}{a+1}=\frac{2+(a+1)(a^2-a+1)}{a+1}=\frac{a^3+3}{a+1}.$$

Terminaré esta carta observándote, que segun que los dos términos de una fraccion son los mismos ó contrarios, esta fraccion es positiva ó negativa; por consiguiente, una fraccion conserva su valor y su signo, cuando se cambia los signos de sus dos términos, y cambia de signo, sin cambiar de valor absoluto, cuando solo se cambia el signo del numerador ó del denominador.

CARTA DÉCIMATERCIA.

DE LAS ECUACIONES DEL PRIMER GRADO.

Amigo Eugenio, el asunto que actualmente debe ocuparnos es el analisis algebráico ó teoría de las ecuaciones.

Las igualdades que solo tienen lugar en ciertos valores particulares de las letras que contienen son ecuaciones; las igualdades que subsisten, sea cual sea el valor de las letras que contienen, son identidades. Así la igualdad $5+a=9$ es una ecuacion; pues solo tiene lugar cuando se supone $a=4$, y la igualdad $4a+1=4a+1$ es una identidad; pues tiene lugar sea el que sea el valor de a. Las dos cantidades separadas por el signo $=$ son los dos miembros de la ecuacion; la cantidad colocada á izquierda es el primer miembro, y la colocada á la derecha es el segundo miembro. Los términos separados por el signo $+$ y $-$ son los términos de la ecuacion.

Se dice que una ecuacion es *numérica* cuando las incógnitas solo están combinadas con números dados, y se llama *literal* cuando las cantidades conocidas son representadas por letras. Así, la ecuacion $4x-5y=5$ es numérica, y la ecuacion $ax+b=c$ es literal. Cuando cantidades numéricas ó literales, puestas en lugar de las incógnitas, hacen una ecuacion idéntica, estas cantidades forman lo que se llama un sistema de valores de las incógnitas, ó una solucion de ecuacion. Así, la ecuacion $4x=12$ volviéndose idéntica si en lugar de x se pone 3, se dice que $x=3$ satisface la ecuacion. Una ecuacion es del *primer grado* cuando la incógnita se halla en el primer grado.

Tratemos por ahora de las ecuaciones de primer grado de una sola incógnita.

Las trasformaciones que se imprimen á las ecuaciones se fundan en las dos propiedades siguientes:

1° Cuando á dos cantidades iguales se añade la misma cantidad, las sumas son iguales.

2° Cuando de dos cantidades iguales se resta una misma cantidad, los restos son iguales.

3° Multiplicando dos cantidades iguales por una cantidad los productos son iguales.

4° Si se divide dos cantidades iguales por una misma cantidad, los cuocientes son iguales.

De estos principios, aplicados á los números de una ecuacion, resulta un medio de deducir otras ecuaciones que todas se satisfacen, por el mismo valor de la incógnita, y que conducen al valor de esta incógnita.

Sea, por ejemplo, la ecuacion $x+a=b$.

Si de dos cantidades iguales á $x+a,b$, se quita a, los restos $x,b-a$ serán iguales; luego $x=b-a$. Resulta que para hacer pasar un término de un miembro de una ecuacion á otra, basta borrar este término en el miembro en que se halla, y escribirlo en el otro miembro con un signo contrario; es decir con el signo $-$ si tenia el signo $+$, y con el signo $+$ si tenia el signo $-$.

A veces la incógnita se halla combinada por multiplicacion ó division. Sea por ejemplo, la ecuacion $ax=b$. Divídese sus dos miembros por a, lo que da $x=\frac{b}{a}$; por consiguiente, cuando el primer miembro de una ecuacion, no conteniendo sino la incógnita afectada de un cierto coeficiente, el segundo término solo contiene cantidades conocidas, el valor de la incógnita se obtiene dividiendo el segundo miembro por el coeficiente de la incógnita. Así de la ecuacion $3x=a+b$, se saca $x=\frac{a+b}{3}$.

Supongamos ahora que tenemos la ecuacion $\frac{x}{a}=b$; la multiplicacion de estos dos miembros por a da $x=a+b$. Por consiguiente, cuando el primer miembro de una ecuacion no contiene mas que la incógnita dividida por una cantidad conocida, y el segundo término es una cantidad conocida, se logra el valor de la incógnita multiplicando el segundo miembro por la cantidad que servia de divisor á esta incógnita. Así de la ecuacion $\frac{x}{5}=3$, se saca $x=3+5=15$.

Supongamos que tenemos que resolver la ecuacion $\frac{ax}{b}-c=\frac{dx}{e}-\frac{p}{q}$.

Lo primero que se hace es hacer desaparecer el denominador segun el proceder conocido, y la ecuacion resulta.

$$\frac{aeqx-cbeq}{beq}=\frac{dbqx-bpe}{beq}.$$

Despues multiplicando los dos miembros por beq, resulta $aeqx-cbeq=dbqx-bpe$.

Despues haciendo pasar en un mismo miembro los términos afectados de la incógnita x, y los otros en el otro miembro, y haciendo los cambios de signos ya indicados, la ecuacion propuesta se cambia en $aeqx-dbqx=cbeq-bpe$ y poniendo x como único factor, $x(aeq-dbq)=cbeq-bpe$.

Esta última ecuacion es facil de resolver, pues puede reducirse á la forma $ax=b$; da por resultado $x=\frac{cebq-bpe}{aeq-dbq}$.

Ahora bien, supongamos que tenemos la ecuacion $\frac{4x}{5}-\frac{5}{9}x+4=\frac{x}{5}$; efectuando la reduccion al comun denominador se tiene la ecuacion

$$\frac{4\times9\times5\times x-5\times5\times5x+4\times5\times9\times5}{5\times9\times5}=\frac{5\times9\times x}{5\times9\times5}.$$

Efectuando las operaciones indicadas, multiplicando los dos miembros por $5\times9\times5$, se cambia en

$$180x-75x+540=27x.$$

Pasando el término $27x$ en el primer miembro, y la cantidad numérica 540 en el otro, se tiene :

$180x-75x-27x=-540$, de lo que resulta $x(180-75-27)=-540$.

Las cantidades entre paréntesis se reducen á 78; luego se tiene $78x=-540$, de lo que resulta $x=\frac{540}{78}$.

Algunas veces puédese hacer desaparecer los denominadores de una manera mas sencilla, como ya observé hablando de las fracciones, y á esta operacion es preciso tener recurso cuando es posible. Por ejemplo, supongamos que tenemos la ecuacion.

$$\frac{2x}{3}-\frac{5}{4}=11+\frac{x}{5}.$$

Se observa que 60 es multíplice mas pequeño de los denominadores 3, 4, 5, por lo cual se podrá tomar 60 por denominador comun, y dividiendo este denominador comun por cada uno de los denominadores, y multiplicando por 11, la ecuacion se cambiará en

$$\frac{40x}{60}-\frac{45}{66}=\frac{11\times60}{60}+\frac{12x}{60}.$$

Multiplicando todos los términos por 60, y poniendo á un lado los términos que contienen x y á otro las cantidades que no contienen x, resulta

$$40x - 12x = 660 + 45,$$ y por consiguiente,

$$28x = 705$$

$$x = \frac{705}{28}$$

Operando de la misma manera, se halla que el valor de x sacado de la ecuacion $\frac{5x}{6} - \frac{2}{15} = \frac{7x}{9} + \frac{8}{15}$ es igual á 12, y que el valor de x sacado de la ecuacion $\frac{5x}{12} - \frac{4x}{5} - 15 = \frac{7}{8} - \frac{15x}{6}$ es igual á $\frac{111}{10}$.

En general, para resolver una ecuacion de primer grado de una sola incógnita, se hace pasar todos los términos que encierra la incógnita en el primer miembro, y los términos conocidos en el segundo; redúcese cada miembro á su mas simple espresion, y se quita los denominadores; de lo que resulta una ecuacion cuyo primer término solo contendrá la incógnita afectada de un cierto coeficiente, y cuyo segundo término será una cantidad conocida; el valor de la incógnita se logrará dividiendo el segundo miembro de la nueva ecuacion por el coeficiente de la incógnita.

Toda ecuacion algebráica puede considerarse como la espresion de las condiciones de un problema.

Para enunciar este problema del modo mas sencillo, basta traducir la ecuacion propuesta en lenguage ordinario. Así la ecuacion $4x - 5 = 7$ es la traduccion algebráica de este problema.

Hallar un número cuyo cuadruplo disminuido de 5 sea igual á 7.

Pasemos ahora á las ecuaciones de primer grado de muchas incógnitas. Una ecuacion de dos incógnitas admite una infinidad de valores, pues por cada valor dada arbitrariamente á una de las incógnitas, la ecuacion determina el valor correspondiente de la otra incógnita. Así, en la ecuacion $x = y + 4$, cada valor arbitraria dada á la letra y aumentada de 4, suministra el valor correspondiente de x. Siendo así dependiente del valor de y el valor de x, se dice que x es funcion de y. Para resolver dos ecuaciones de dos incógnitas, procúrase primero combinar estas ecuaciones de manera que se deduzca una ecuacion, que solo contenga una de las incógnitas, lo que equivale á eliminar la otra desconocida.

Muchos procederes hay de eliminacion. Por ejemplo, supongamos que tenemos dos ecuaciones

$$2x + 3y = 13 \quad (1)$$
$$5x + 4y = 22 \quad (2).$$

Para eliminar x, es preciso hacer los coeficientes de x iguales en las dos ecuaciones, lo que se consigue multiplicando (1) por 5 y (2) por 2: operando así se tiene las

$$\text{Ecuaciones} \begin{cases} 10x + 15\,y = 65 & (3) \\ 10x + 8\,y = 44 & (4) \end{cases}$$

que pueden reemplazar las ecuaciones propuestas; ahora si las resta una de otra, los términos x desaparecerán, y resultará la ecuacion única $15y - 8y = 65 - 44$ que da $y = 3$. Segun el mismo proceder, para hallar x se volverá iguales los coeficientes de y en las ecuaciones (1) y (2). Multiplicaráse (1) por 4 y (2) por 3, de lo que resulta

$$8x+12y=52 \quad (3)$$
$$15x+12y=66 \quad (6).$$

Estas dos últimas ecuaciones reemplazan (1) y (2): restándolas unas de otras, los términos en y desaparecen, y resulta

$$7x=14, \text{ y por consiguiente } x=2.$$

Así $x=2$, é $y=3$, son los valores que satisfacen á la vez á las dos ecuaciones propuestas.

Para hacer desaparecer x é y de las ecuaciones (3, 4, 5 y 6), hemos restado las ecuaciones una de otra; pero si los coeficientes de x ó de y en estas ecuaciones fuesen signos contrarios, en lugar de restarlas para hacer desaparecer x ó y, seria preciso añadirlas. Si, por ejemplo, se tuviese las dos

$$\text{Ecuaciones} \begin{cases} 5x+4y=7 \\ 3x+4y=9 \end{cases}$$

para que y desapareciera, seria preciso añadir las ecuaciones, y entonces $+4$ y -4, y se destruirian.

El método de eliminacion que acabamos de emplear, lleva el nombre de método por adicion ó sustraccion; hay otro que se emplea muchas veces con ventaja, que es el método de sustitucion; para operar segun este método, se saca una de las incógnitas de una de las ecuaciones, se sustituye su va-

lor en la otra ecuacion, y de este modo se logra una ecuacion de una sola incógnita, no habiendo mas entonces que sacar de esta ecuacion el valor de la incógnita que en ella se halla, y sustituirla en las ecuaciones propuestas las que darán el valor de la otra incógnita. Para aclararte mas esto, volveré á tomar el mismo ejemplo ya citado.

$$2x+3y=13$$
$$5x+4y=22$$

Sácase el valor de x de la primera ecuacion, como si y fuese una cantidad conocida, de esta manera se tiene $x=\frac{13-3y}{2}$; sustitúyese este valor de x en la segunda, y resulta $5\frac{(13-3y)}{2}+4y=22$, ecuacion que ya no contiene x; sácase el valor de $y=3$, y sustitúyese este valor de $y=3$ en una de las ecuaciones propuestas, en la primera, por ejemplo, resultando $2x+9=13$ que resulta de $x=2$.

Bastan estos dos métodos para resolver dos ecuaciones de dos incógnitas.

Para resolver tres ecuaciones del primer grado entre tres incógnitas, elimínase una de las incógnitas por cualquiera de los métodos precedentes, lo que conduce á dos ecuaciones que no contienen mas que dos incógnitas: estas dos ecuaciones tratadas dan el valor de dos de las incógnitas, y la sustitucion de estos valores en cualquiera de las ecuaciones que contienen las tres desconocidas de una ecuacion que determina la tercera incógnita. Por ejemplo

$$5x-6y+4z=15$$
$$7x+4y-3z=19$$
$$2x+y+6z=46.$$

Para eliminar z en las dos primeras ecuaciones, se multiplica la primera por 3, y la segunda por 4, despues se añaden los dos resultados (puesto que los coeficientes de 2 tienen signos contrarios), lo que da, por nueva ecuacion, $43x-2y=121$; para poner iguales los coeficientes de z en la segunda y tercera, es preciso multiplicar en la segunda z por uno de los factores del coeficiente 2 en la tercera, y añadiendo se tiene $16x+9y=84$; la cuestion en este caso se reduce á hallar los valores de x y de y propios á satisfacer estas nuevas ecuaciones. Dan $x=3$, $y=4$, y entonces no queda mas que sustituir estos valores de x y de y en cualquiera de las ecuaciones propuestas para tener el valor de z; poniéndolos en la primera, resulta $15-24+41=15$; por consiguiente $z=6$. Así

$$x=3$$
$$y=6$$
$$z=6$$

satisfacen á las tres ecuaciones propuestas.

Para resolver cuatro ecuaciones entre cuatro incógnitas, se reduce este caso al precedente, eliminando una de las incógnitas, lo que da tres ecuaciones entre tres incógnitas que dan el valor de las tres incógnitas, y sustituyendo estos valores en cualquiera de las ecuaciones que contienen la otra incógnita, se deduce el valor de esta otra incógnita,

cuyo proceder se aplica para resolver cinco ecuaciones entre cinco incógnitas, etc.

Muchas observaciones podria hacerte sobre las formas que pueden tomar los valores de las incógnitas en la resolucion de las ecuaciones del primer grado.

Haciendo desaparecer los denominadores, y juntando lo que multiplica la incógnita, la ecuacion del primer grado de una sola incógnita puede ponerse bajo la forma $ax=b$, representando a y b, cantidades enteras positivas ó negativas; resolviendo esta ecuacion, resulta $x=\frac{a}{b}$.

Cuando el numerador b, designando un número positivo dado, el denominador a disminuye, y se acerca indefinidamente de 0, el valor de $\frac{b}{a}$ queda positivo y aumenta indefinidamente; y en fin cuando a se reduce á cero, el valor de $\frac{b}{0}$ de $\frac{b}{a}$ se vuelve mas grande que toda cantidad asignable; este límite del incremento de las cantidades positivas es lo que se llama el infinitamente grande positivo ó el infinito: se representa por el signo ∞. Por ejemplo, si al denominador a se da el valor de diez en diez veces mas pequeño, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$, etc., la fraccion $\frac{a}{b}$ adquirirá valores de diez en diez veces mayor b, $10b$, $100b$, $1000b$, etc., de manera que siempre se podrá tomar a bastante pequeño para que

$\frac{b}{a}$ se vuelva mayor que toda cantidad dada.

Guando a y b se reducen simultáneamente á cero la fraccion $\frac{b}{a}$ se vuelve $\frac{0}{0}$, y como se puede tomar un número cualquiera por el cuociente de la division de cero por cero, se dice por este motivo que la fraccion $\frac{0}{0}$ es indeterminada.

Puede suceder sin embargo que una fraccion literal se presente bajo la forma de $\frac{0}{0}$, en virtud de cierta hipótesis, y que sin embargo tenga un valor determinado.

Si, por ejemplo, la ecuacion que espresa todas las condiciones de un problema, hubiera dado por resultado $x=a+b$, por otras trasformaciones se llega á la ecuacion $x(a-b)=(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ que contiene el factor estrangero $a-b$; el verdadero valor $a+b$ de x se presentará bajo la forma $x=\frac{a^2-b^2}{a-b}$. Mientras que á a se dé diferentes valores de b, cada una de las espresiones $a+b$, $\frac{a^2-b^2}{a-b}$, conducirá al mismo valor determinado de x; pero si se busca el valor de x correspondiente á la hipótesis $a=b$, la segunda espresion de x se presentará bajo la forma de $\frac{0}{0}$, aunque el valor de x sea $2a$.

Cuando vuelva á escribirte, es mi intencion tratar de las ecuaciones del segundo grado.

CARTA DÉCIMACUARTA.

ECUACIONES DEL SEGUNDO GRADO.

§ I.

Resolucion de estas ecuaciones.

Amigo Eugenio, conforme te lo prometí en mi última, es mi intencion tratar en la presente de las ecuaciones del segundo grado en que entro sin mas preámbulos.

Supongamos que tenemos que resolver la ecuacion $ax^2+px+q=0$, en la cual a, p, q, son cantidades numéricas; dividiendo todos los términos por el coeficiente a se tiene,

$$x^2+\frac{p}{a}x+\frac{q}{a}=0.$$

Añadamos y restemos á la vez la cantidad $\frac{p^2}{4a^2}$, resultará $x^2+\frac{p}{a}x+\frac{p^2}{4a^2}+\frac{q}{a}-\frac{p^2}{4a^2}=0.$