$\frac{b}{a}$ se vuelva mayor que toda cantidad dada.

Guando a y b se reducen simultáneamente á cero la fraccion $\frac{b}{a}$ se vuelve $\frac{0}{0}$, y como se puede tomar un número cualquiera por el cuociente de la division de cero por cero, se dice por este motivo que la fraccion $\frac{0}{0}$ es indeterminada.

Puede suceder sin embargo que una fraccion literal se presente bajo la forma de $\frac{0}{0}$, en virtud de cierta hipótesis, y que sin embargo tenga un valor determinado.

Si, por ejemplo, la ecuacion que espresa todas las condiciones de un problema, hubiera dado por resultado $x=a+b$, por otras trasformaciones se llega á la ecuacion $x(a-b)=(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ que contiene el factor estrangero $a-b$; el verdadero valor $a+b$ de x se presentará bajo la forma $x=\frac{a^2-b^2}{a-b}$. Mientras que á a se dé diferentes valores de b, cada una de las espresiones $a+b$, $\frac{a^2-b^2}{a-b}$, conducirá al mismo valor determinado de x; pero si se busca el valor de x correspondiente á la hipótesis $a=b$, la segunda espresion de x se presentará bajo la forma de $\frac{0}{0}$, aunque el valor de x sea $2a$.

Cuando vuelva á escribirte, es mi intencion tratar de las ecuaciones del segundo grado.

CARTA DÉCIMACUARTA.

ECUACIONES DEL SEGUNDO GRADO.

§ I.

Resolucion de estas ecuaciones.

Amigo Eugenio, conforme te lo prometí en mi última, es mi intencion tratar en la presente de las ecuaciones del segundo grado en que entro sin mas preámbulos.

Supongamos que tenemos que resolver la ecuacion $ax^2+px+q=0$, en la cual a, p, q, son cantidades numéricas; dividiendo todos los términos por el coeficiente a se tiene,

$$x^2+\frac{p}{a}x+\frac{q}{a}=0.$$

Añadamos y restemos á la vez la cantidad $\frac{p^2}{4a^2}$, resultará $x^2+\frac{p}{a}x+\frac{p^2}{4a^2}+\frac{q}{a}-\frac{p^2}{4a^2}=0.$

Pero $x^2+\frac{p}{a}x+\frac{p^2}{4a^2}=\left(x+\frac{p}{2a}\right)\left(x+\frac{p}{2a}\right)=\left(x+\frac{p}{2a}\right)^2$.

Luego la ecuacion propuesta puede ponerse bajo la forma

$$\left(x+\frac{p}{2a}\right)^2=\left(\frac{p^2}{4a^2}-\frac{q}{a}\right).$$

Sacando la raiz cuadrada de dos números, resulta

$$\left(x+\frac{p}{2a}\right)=\pm\sqrt{\frac{p^2}{4a^2}-\frac{q}{a}}.$$

Pónese el doble signo mas ó menos, pues en estos dos casos el cuadrado siempre está afectado del signo mas.

Por fin se saca

$$x=\frac{p}{2a}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4a^2}-\frac{q}{a}}.$$

Tales son los dos valores, que puesto en lugar de x en la ecuacion la reducen á una identidad.

Puede observarse que el primer término del valor de x, es igual á la mitad del coeficiente de x tomado en signo contrario, y dividido por el coeficiente de x^2 en la ecuacion propuesta; y este término $\frac{p}{2a}$ es igual á la suma de los dos valores de x.

El producto de los dos valores de x que es

$$\left(-\frac{p}{a^2}+\sqrt{\frac{p^2}{4a^2}-\frac{q}{a}}\right)\left(-\frac{p}{2a}-\sqrt{\frac{p^2}{4a}-\frac{q}{a}}\right)=$$

$$\frac{p^2}{4a^2}-\frac{p^2}{4a^2}+\frac{q}{a}=+\frac{q}{a},$$

es por consiguiente igual al término independiente de x, dividido por el coeficiente de x^2.

§ II.

Fórmula del binomio.

Cuando se hace el producto de $(x+a)$ por $(x+b)$ por $(x+b)$, etc., es facil hallar su forma, partiendo del producto de dos binomios; en efecto

$$(x+a)(x+b)=x^2\begin{array}{l|}+a\\+b\end{array}x+ab.$$

Multipliquemos ahora por $x+c$; resulta

$$x^3\begin{array}{l|}+a\\+b\\+c\end{array}x^2\begin{array}{l|}+ab\\+bc\\+ac\end{array}x+abc$$

Observaremos, que continuando en multiplicar por $x+d$, logramos siempre una serie de términos en x cuyas potencias disminuyen. Vemos tambien que el primer coeficiente es la unidad; el segundo es igual á la suma de los segundos términos; el tercero iguala la suma de los productos diferentes que puede hacerse dos á dos con los segundos términos.

Para mostrar que esta ley es general, es preciso establecer, que si es verdadera en un producto de *m* factores, tambien será verdadera en un producto de $m+1$ factores. De esta hipótesis resulta una serie de términos de esta forma:

$$x^{M}+Ax^{M-1}+Bx^{M-2}+Cx^{M-3}+\ldots..$$

Multipliquemos por $x+\lambda$, resultará

$$\begin{array}{l|l|l|l} x^{M+1}+A & x^{M}+B & x^{M-1}+C & x^{M^2}+\ldots.. \\ \quad\;\;+\lambda & \quad\;+\lambda A & \quad\;\;+\lambda B & \quad\;+\ldots.. \end{array}$$

Estos nuevos coeficientes están formados segun la misma ley. Para demostrarlo es preciso buscar como con *m* letras, se puede formar productos diferentes de *n* letras.

Considerando dos letras *a* y *b*, se ve que se puede formar dos productos diferentes de una letra y un solo de dos letras, al paso que si se considera todas las permutaciones posibles, se verá que hay dos para dos letras, *a* y *b*. Estas permutaciones son *ab* y *ba*.

Considerando tres, *a*, *b*, *c*, hállase seis; pues la letra *c* puede ocupar tres lugares diferentes en cada permutacion de dos letras; *cab*, *acb*, *abc*, *cba*, *bca*, *bac*. Generalizando esta proposicion, se ve que el nombre de permutaciones de *m* letras es igual al producto $1\times2\times3\ldots.m$.

Hasta aquí hemos hecho entrar en las permutaciones todas las letras dadas. Si hubiese que buscar cuantas permutaciones se puede efectuar con *n* letras, suponiendo que se dé *m* letras, estas permutaciones tomarán el nombre particular de combinaciones. Este número de combinaciones es facil de hallar; pues *m* letras dan evidentemente *m* combinaciones una á una. Para encontrar las combinaciones de dos letras, se debe colocar despues de cada una de las combinaciones de una letra cada una de las $m-1$ letras restantes; lo que da $m\,(m-1)$ para el número de combinaciones de *m* letras de dos en dos, y en seguida $m\,(m-1\ldots[m-(n-1)]$ en el número de las combinaciones de *m* letras, *n* á *n*.

Si llamamos productos diferentes las combinaciones del mismo número de letras, que difieren á lo menos por una letra, podremos llegar por lo que precede á determinar el número de productos diferentes de *m* letras tomadas *n* á *n*; pues el número de las combinaciones de *m* letras tomadas *n* á *n*, es igual al número de los productos diferentes de *m* letras tomadas *n* á *n*, multiplicadas por el número de las permutaciones de *m* letras. Luego, dividiendo el número de las combinaciones de *m* letras tomadas *n* á *n* por el número de permutaciones de *n* letras, el cuociente indicará el número de productos diferentes. Luego este número es igual á

$$\frac{m(m-1)(\ldots..[m-(n-1)]}{1\;\;2\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots n}.$$

Volvamos ahora al producto de $(x+a)$ por $x+b$; su planteo

$$\begin{array}{l|l} x^2+a & x+ab \\ \quad\;+b & \end{array}$$

nos hace ver que el coeficiente de x es igual á la suma de los productos diferentes que se puede efectuar con las dos letras tomándolas una á una.

El término ab nos indica el número de productos diferentes que se puede formar con dos letras repitiéndolas ó tomándolas dos á dos.

Supongamos que los coeficientes sucesivos de desarrollo general espresan el segundo, la suma de los productos diferentes de m letras una á una, y el término n la suma de los productos diferentes de m letras $n-1$ á $n-1$; esta ley tendrá tambien lugar por la adicion de un nuevo factor $x+\lambda$. En efecto, el desarrollo

$$x^{M-1}\begin{array}{l}+A\\+\lambda\end{array}\Bigg|\, x^{M}\begin{array}{l}+B\\+A\lambda\end{array}\Bigg|\, x^{M-1}\begin{array}{l}+C\\+B\lambda\end{array}\Bigg|\, x-m-2+$$

verifica muy bien nuestra hipótesis; pues $A+\lambda$ es la suma de los productos diferentes de $m+1$ letras 2 á 2, etc.

Ahora podemos suponer por consiguiente que todos los segundos términos $abcd$, etc., de los factores $x+a$, $x+b$, $x+c$, etc., iguales á a; y en este caso particular podremos ver lo que sucede con el desarrollo

$$x^{M}+Ax^{M-1}+Bx^{M-2}+\ldots..K-x^{M-N}.$$

En efecto,

$$A=ma,\ B=\frac{mm-1}{1\quad 2}a^{2}\ldots.K=\frac{m(m-1)}{1\quad 2}\,\frac{[m-(n-1)a^{N}}{\ldots.(m-n)}$$

Así podemos escribir.

$$(x+a)^{M}=x^{M}+max^{M-1}+\frac{mm-1}{1\quad 2}a^{2}x^{M-2}+\ldots.$$

$$\frac{m(m-1)\ldots..[m-(n-1)]}{1\quad 2\qquad\qquad m-n},\ \text{etc.}$$

§ III.

Estraccion de raices de cualquier grado.

La cantidad, que elevada al cuadrado, reproduce una cantidad dada, se llama la raiz cuadrada de esta cantidad. Llámase raiz cuarta de una cantidad A, una cantidad B, que elevada á la potencia 4, ó que multiplicada 4 veces por ella misma, reproduce esta cantidad.

Para multiplicar la raiz n de A, se acostumbra escribir $\sqrt[n]{A}$, de suerte que se tenga $B=\sqrt[n]{A}$.

Para elevar un monomio á una potencia n, es preciso multiplicar por n los esponentes de los diferentes factores que lo componen.

$$\text{Así } (pqr\ldots.)^{N}=p^{N}q^{N}r^{N}.$$

Así para estraer la raiz n de un monomio, es preciso dividir cada uno de los esponentes por n.

Para estraer la raiz n de un polinomio, es preciso tener recurso al planteo del binomio. El método que debe seguirse en el caso general, siendo análogo al que se emplea para determinar la raiz cuadrada de un polinomio, lo espondré brevemente, porque es mas sencillo.

Sea por ejemplo un polinomio

$$a+b+c+d$$

en el cual a, b, c, d, representan cantidades cualesquiera. Si elevamos al cuadrado este polinomio tendremos

$$\begin{aligned}(a+b+c+d)^2=a^2&+2ab+b^2\\&+2(a+b)c+c^2\\&+2(a+b+c)d+d^2,\end{aligned}$$

de lo que se concluye que el cuadrado de un polinomio, cualquiera que sea el número de sus términos, contiene el cuadrado del primer término, mas el doble del primero por el segundo, etc.

Propongámonos ahora estraer la raiz cuadrada de un polinomio $A+B+C$, ordenado segun las potencias decrecentes de x, y representemos este polinomio por P.

Designemos por $a+b+c$ la raiz ordenada de la misma manera, su cuadrado deberá reproducir su polinomio P. Pero, segun la regla establecida, entre los términos que componen el cuadrado de esta raiz, el término en que x tiene el mas alto esponente es evidentemente a^2; luego A es el cuadrado de a. Luego el primer término de la raiz se obtiene sacando la raiz cuadrada del primer término del polinomio propuesto. Restemos de P el cuadrado de este término, el resto que llamaré R, será

$$R=B+C+\ldots$$

debiendo contener el doble del producto del primer término de la raiz por el segundo, mas el cuadrado del segundo, etc.; y como es facil ver que el doble producto del primer término por el segundo debe contener x con un esponente mas alto que las otras partes de R, resulta que B es este doble producto; luego el segundo término de la raiz se halla dividiendo el primer término del resto por el doble del primer término de la raiz.

El mismo razonamiento hace ver que para hallar el tercer término se debe restar del polinomio dado el cuadrado de $a+b$, y dividir el primer término del resto por el doble de $(a+b)$, ó por el doble de a.

Aplicando estos razonamientos á la estraccion de la raiz n, el planteo del binomio hará ver la ley de su composicion, y los razonamientos que he seguido para la estraccion de la raiz cuadrada demostrará que el primer término de la raiz se logra, despues de haber ordenado el polinomio segun las potencias decrecentes de x, y sacando la raiz n del primer término, y el segundo dividiendo el primer término del resto por n veces la $(n-1)$, potencia del primer término de la raiz, etc.

§ IV.

Resolucion de las ecuaciones numéricas de cualquier grado.

Toda ecuacion del grado m de una sola incógnita puede reducirse á la forma

$$y^M+\frac{pq^{M-1}}{p'}+\frac{q^{M-2}}{q'}{}^2+\ldots\frac{rx}{r'}+\frac{s}{s'}=0,$$

y poniendo

$$y=\frac{x}{p'q'\ldots r's'},$$

se reduce á la forma

$$x^M+Px^{M-1}+Qx^{M-2}+Tx+V=0.$$

en la cual PQ... son números enteros positivos ó negativos.

Toda cantidad positiva ó negativa, entera ó inconmensurable, real ó imaginaria, que, puesta en lugar de x en la ecuacion, la reduce á una identidad, se llama raiz de esta ecuacion.

Mírase como evidente que toda ecuacion tiene cuando menos una raiz.

Llamando a esta raiz, digo que el primer miembro de la ecuacion propuesta es divisible por $x-a$; en efecto, si se efectua la division de este primer miembro, se halla por resta

$$a^M+P^{M-1}+\ldots+a+V;$$

pero si, por hipótesis, a es raiz, este resto es nulo, luego la division es posible exactamente.

Llamando X el primer término de la ecuacion propuesta, tendremos

$X=(x-a)X'$, si designamos por X' el cuociente de la division de X por $x-a$.

Continuando de esta manera, llegaremos á la relacion

$$X=(x-a)(x-b)\ldots$$

que indica que una ecuacion del grado m tiene m raices. Buscando el producto de $(x-a)$ por $(x-b)$, etc., hállase una fórmula que debe ser idéntica á X, luego $P=-(a+b+\ldots)Q=(ab+bc+ca+)$, etc.

Cuando dos números α, α', puestos en lugar de X en x, dan dos resultados de signos contrarios, hay cuando menos una raiz real comprendida entre estos dos miembros; pues, cambiando en X, x en $x+\delta$, resulta

$$X+\delta(N+\delta P+\delta^2 Q+\ldots);$$

ahora bien, como es visible que tomando δ bastantemente pequeño, se podrá volver el término $\delta(N+\delta P+\ldots)$ tan pequeño como se quiera; luego se puede aumentar x desde α hasta α', de manera que el resultado de esta sustitucion varie por grados insensibles; por consiguiente este resultado no podrá cambiar de signo sin pasar por cero.

Este resultado pudiendo por otra parte pasar por cero un número impar de veces, resulta que puede haber entre α y α' un número impar de raices reales.

Si α y α' diesen resultados del mismo signo, ó bien no habria ninguna raiz real comprendida, ó habria un número par.

Llámase límite superior de las raices positivas de una ecuacion todo número mayor que la mayor raiz positiva de esta ecuacion. Llamando M el mayor de los coeficientes negativos de la ecuacion, y n el número de términos que le preceden, el primer término negativo $1+\sqrt[N]{M}$ será un límite superior de las raices positivas; pues la suma de los términos negativos es menor que

$$M(x^{M-N}+x^{M-N-1}\dots\dots\dots x+1), \text{ ó que}$$

$M\dfrac{(x^{M-N+1}1)}{x-1}$; pero si se hace $\sqrt[N]{M}=p$, de donde $M=p^N$, y que despues se haga $x=p+1$, la espresion superior se cambia en la siguiente:

$$p^{N-1}[(p+1)^{M-(N-1)}-1], \text{ ó bien}$$

$$\left(\frac{p}{p+1}\right)^{N+1}\times(p+1)^M-p^N-1$$

cantidad mas pequeña que $p+1$.

Así el valor $\sqrt[N]{M+1}$, puesto en lugar de x vuelve el primer término positivo.

Lógrase el límite superior de las raices negativas, cambiando x en $-x$, y buscando el límite de las nuevas raices positivas.

El límite inferior se logra buscando el límite superior en la nueva ecuacion que resulta cambiando x en $\frac{1}{x}$.

Esplicado esto, paso ahora á resolver el siguiente problema: Toda ecuacion que tiene una raiz imaginaria de la forma $\alpha+\beta\sqrt{-1}$ tiene otra de la forma $\alpha-\beta\sqrt{-1}$.

En efecto, puesto que $\alpha+\beta\sqrt{-1}$ es por hipótesis raiz, deberá, colocada en lugar de x, volver $X=0$ idéntica. Pero el resultado de esta sustitucion, que es de la forma $M+N\sqrt{-1}$, debe ser igual á cero; luego se debe tener $M=0$ y $N=0$. Ahora bien, sustituyendo en lugar de x en $X=0$ el valor $\alpha-\beta\sqrt{-1}$, el resultado de esta sustitucion será evidentemente igual $M-N\sqrt{-1}$, y por consiguiente igual á cero, puesto que M y N son nulos.

§ V.

Teorema de Descartes.

Cuando de un término se pasa al siguiente, dícese que hay variacion ó permanencia, segun que el signo cambia ó queda el mismo. Establecido esto, voy á demostrar que cualquiera ecuacion, completa ó incompleta, no puede tener mas raices positivas que variaciones.

Consideremos una ecuacion cualquiera, completa ó incompleta, conteniendo los signos que se quiera; la presentaré de esta manera.

$$x^M\dots-P\dots+Q\dots-+R\dots\pm T\dots\pm V=0.$$

Aquí P, Q, R, serán términos ordenados como de ordinario, y contendrán una potencia de x con su coeficiente; los puntos indican las lagunas de que está llena cada una por términos del mismo signo que el que precede; es decir que en x^{M} empieza una serie de signos $+$, $a-\mathrm{P}$, una serie de signos $-$, y así sucesivamente.

Para introducir en la ecuacion una nueva raiz positiva $+a$, es preciso multiplicarla por $x-a$, y la operacion puede disponerse como superiormente.

$$\begin{array}{l}
\quad x^{\mathrm{M}}\ldots-\mathrm{P}\ldots+\mathrm{Q}\ldots-\mathrm{R}\ldots\pm\mathrm{T}'\ldots\pm\mathrm{V} \\
\quad x-a \\
\hline
x^{\mathrm{M}-1}\ldots-\mathrm{P}'\ldots+\mathrm{Q}'\ldots-\mathrm{R}'\ldots\pm\mathrm{T}'\ldots\pm\mathrm{V}' \\
\qquad\quad -\mathrm{P}''\ldots+\mathrm{Q}''\ldots-\mathrm{R}''\ldots\pm\mathrm{T}''\ldots\mp\mathrm{V}a \\
\hline
x^{\mathrm{M}-1}\ldots-\mathrm{P}'''\ldots+\mathrm{Q}'''\ldots-\mathrm{R}'''\ldots\pm\mathrm{T}'''\ldots\mp\mathrm{V}a
\end{array}$$

P′, Q′, designan los productos $\mathrm{P}x$, $\mathrm{Q}x$, etc., ninguno es igual á cero.

P″, Q″, etc., designan los productos que provienen de la multiplicacion por a, en que contienen x en el mismo grado que P′, Q′, etc.

P‴, Q‴, etc., designan términos del mismo grado en x que P′, Q′, y ninguno de ellos debe ser nulo; en fin observaráse que en la segunda línea de los productos semejantes, las lagunas deben mirarse como llenas por términos de signos contrarios á los que se encuentran encima de ellos en la primera línea de los productos, de manera que los signos que afectan en el producto total los términos correspondientes á estas lagunas deben quedar indeterminados, en tanto que no se asigna los valores particulares á los coeficientes de la ecuacion propuesta.

Ahora bien, sean cuales fueren estos signos, es evidente que hay en el producto total á lo menos

una variacion de $x^{\mathrm{M}+1}$ á $-\mathrm{P}'''$, mientras que el multiplicando contiene solamente una sola de x^{M} á $-\mathrm{P}$. De la misma manera hay á lo menos una de $-\mathrm{P}'''$ á $+\mathrm{Q}'''$, y una sola de $-\mathrm{P}a+\mathrm{Q}$, y continuando así, se reconoce que al fin el producto tiene á lo menos una variacion de $\pm\mathrm{T}'''$ á $\mp\mathrm{V}a$, mientras que el multiplicando no tiene ninguna despues del término $\pm\mathrm{T}$, luego el producto tiene á lo menos una variacion de mas que el multiplicando; de lo que se concluye que cada raiz positiva, para ser introducida en una ecuacion, debe á lo menos traer una variacion.

§ VI.

De las raices iguales.

Si en una ecuacion $\mathrm{X}=0$ se reemplaza x por $x+\delta$, se hallará ordenando relativamente á las potencias ascendentes de δ.

$$\left.\begin{array}{ll}
x^{\mathrm{M}} & +mx^{\mathrm{M}-1} \\
+\mathrm{P}x^{\mathrm{M}-1} & +(m-1)\mathrm{P}x^{\mathrm{M}-2} \\
+\ldots & +\ldots \\
\ldots\ldots & \ldots\ldots \\
+\mathrm{R}x^{2} & +2\mathrm{R}x \\
+\mathrm{T}x & +\mathrm{T} \\
+\mathrm{V} &
\end{array}\right|\delta\left.\begin{array}{l}
+\dfrac{m(m-1)}{2}x^{\mathrm{M}-2} \\
+\dfrac{(m-1)(m-2)}{2}\mathrm{P}x^{\mathrm{M}-3} \\
\ldots\ldots \\
\ldots\ldots \\
\mathrm{R}
\end{array}\right|^{2}\ldots+\delta m=o.$$

Resultado que puede escribirse

$$\mathrm{X}+\mathrm{X}'\delta+\mathrm{X}''\delta^{2}\ldots\ldots\delta^{\mathrm{M}}=0.$$

El polinomio X' se llama polinomio derivado de X.

Si, en la ecuacion $X=0$ se hace $x=x'+\delta$, x' siendo una de las raices de la ecuacion, se tendrá $X_{,}+X'\delta+X''\delta^2+\ldots+\delta^M=0$; y puesto que x' es raiz $X_{,}=0$, suprimiendo pues $X_{,}$ y dividiendo por δ resulta

$$X'+X''\delta+\ldots+\delta^{M-1}=0\,;$$

δ espresa la diferencia entre la raiz x' y las demas.

Luego la ecuacion dada tiene dos raices iguales x'; la ecuacion en δ debe ser verificada por $\delta=0$, es preciso que para esto se tenga $X'=0$.

Las dos ecuaciones $X=0$ y $X'=0$ siendo verificadas por un mismo valor de x, tienen un factor comun.

Resulta pues que, para desembarazar una ecuacion de sus raices iguales, se debe buscar el mayor comun divisor entre el primer número de esta ecuacion y su polinomio derivado, y dividir este primer número por el mayor comun divisor.

§ VII.

Teorema de Sturm.

Sea $X=0$ una ecuacion cuyas raices sean diferentes, sea X' su polinomio derivado; busquemos el mayor comun divisor.

Llamemos q, q', q'', etc,, los cuocientes sucesivos. Cambiemos haciendo el cálculo el signo de cada resto, sean R, R', R'', estos restos, tendremos

$$\begin{aligned}X&=q\,X'-R\\X'&=q'R-R'\\R&=q''R'-R''\\&\ldots\ldots\ldots\ldots\\R^{N-2}&=q^{N+1}R^N-R^{N+1}\end{aligned}$$

Supongamos que diésemos á ax dos valores α y ϵ, y hagamos crecer x desde α hasta ϵ aumentándola sucesivamente de cantidades iguales á δ; ninguno de estos valores podrá anular á la vez dos términos consecutivos de la serie $XX'R\ldots$; pues si $R^2\,R^3$ resultasen nulos por las ecuaciones superiores R', R, X' y X resultarian nulos, lo que es imposible, puesto que la ecuacion propuesta no tiene raices iguales.

Si la suposicion $x=a$, anula algunos de estos términos, por ejemplo, el término R sin anular X, el número de las variaciones y permanencias formadas por estos términos no será cambiado, pues la relacion

$$R^{N-2}=q^{N+1}R^N-R^{N+1}$$

muestra que si en $x=a$, R^N es nulo, R^{N-2} y R^{N+1} son necesariamente signos contrarios, y relativamente los signos, estas tres cantidades formarán una de las series $+0-$, ó $-0+$, que dan siempre una variacion y una permanencia, sea que se tome 0 con el signo $+$, sea con el signo $-$.

Si la suposicion $x=a$ anula X, habrá una variacion cambiada en permanencia, pues si se hace $x=a+\delta$, llamemos A y A', lo que se volverán x y x', y designemos por B B' B'' y por $B_{,}$ $B'_{,}$ $B''_{,}$, lo que se volverán los derivados de X y X', por la suposicion de $x = a + \delta$, atendido á que α anula X, y que $B' = B$, pues estas dos cantidades representan los valores particulares que toman dos derivados iguales $x = \alpha + \delta$, el resultado final será :

$$A = B'\delta + B''\delta^2 + \ldots\ldots A_{,} = B_{,} + B'\delta + \ldots\ldots$$

Pero siempre se puede tomar δ bastante pequeña para que A y A' sean del mismo signo para el primer término, luego X y X', son del mismo signo en $x = a + \delta$ y del signo contrario en $x = a - \delta$; luego, en el paso de la segunda á la primera, habrá una variacion cambiada en permanencia.

Pero si x continua creciendo cada vez que será igual á una de las raices reales de la propuesta, habrá una variacion cambiada en permanencia ; luego, si se cuentan los números de las variaciones correspondiendo á las suposiciones $x = \alpha$ y $x = \beta$, la diferencia de estos dos números de variaciones espresará el número de raices comprendidas entre α y β.

Concluyo aqui esta carta, como tambien todo cuanto pienso oportuno tratar sobre el algebra ; estas nociones no te enseñarán esta ciencia, pero tal vez te pongan en estado de leer con fruto tratados mas serios, los cuales, juntamente con la viva voz y demostracion práctica del maestro, acabarán de enseñarte una ciencia de lo que solo he anhelado establecer los cimientos.

En mi próxima carta pienso empezar la geometría.

GEOMETRIA.