se volverán los derivados de X y X', por la suposicion de $x=a+\delta$, atendido á que α anula X, y que $B'=B$, pues estas dos cantidades representan los valores particulares que toman dos derivados iguales $x=\alpha+\delta$, el resultado final será:

$$A=B'\delta+B''\delta^2+\ldots\ldots A_,=B_,+B'\delta+\ldots\ldots$$

Pero siempre se puede tomar δ bastante pequeña para que A y A' sean del mismo signo para el primer término, luego X y X', son del mismo signo en $x=a+\delta$ y del signo contrario en $x=a-\delta$; luego, en el paso de la segunda á la primera, habrá una variacion cambiada en permanencia.

Pero si x continua creciendo cada vez que será igual á una de las raices reales de la propuesta, habrá una variacion cambiada en permanencia; luego, si se cuentan los números de las variaciones correspondiendo á las suposiciones $x=\alpha$ y $x=\beta$, la diferencia de estos dos números de variaciones espresará el número de raices comprendidas entre α y β.

Concluyo aquí esta carta, como tambien todo cuanto pienso oportuno tratar sobre el algebra; estas nociones no te enseñarán esta ciencia, pero tal vez te pongan en estado de leer con fruto tratados mas serios, los cuales, juntamente con la viva voz y demostracion práctica del maestro, acabarán de enseñarte una ciencia de lo que solo he anhelado establecer los cimientos.

En mi próxima carta pienso empezar la geometría.

GEOMETRIA.

CARTA DÉCIMAQUINTA.

SOBRE LAS LINEAS Y LOS ANGULOS.

§ I.

De la formacion de las lineas recta y curva.

Eugenio, imagínate que un punto se mueve : de cualquiera modo que se mueva siempre ha de seguir algun camino : este camino que lleva el punto es el que llamamos *línea*, como AB (Fig. 1). Ahora

A .... B

Fig. 1.

bien, si el punto se mueve en busca de otro punto determinado la *línea* es *recta*, como sucede al punto A, el cual se supone que va buscando siempre en su movimiento al punto B.

Mas si el punto que se mueve á cada paso fuere mudando de direccion (Fig. 2), la *línea* que describe se llamará *curva*, como sucede en el punto E de la *línea* EI.

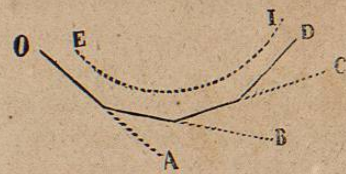

Fig. 2.

Esplico esto mas. Si juntásemos muchas rectas inclinadas mútuamente, claro está que el punto O, siguiendo estas *líneas*, ya buscaria el punto A, ya el B, ya C, y ya últimamente D : esto no lo dudas : lo mismo, pues, hace en la curva el punto movible E, porque á cada movimiento infinitamente pequeño va mudando de direccion.

Por eso cuando el punto movible caminase por una línea recta, llegará á su término mas presto que si antes de llegar á él fuese describiendo una curva. De aquí saco una consecuencia, que tú irás escribiendo á parte en un cuaderno para conservarlas mejor en la memoria.

Número 1. Luego la línea recta es menor que la curva si ambas salen de un punto, y ambas terminan en otro.

§ II.

De la línea circular.

Si la recta AB (Fig. 5), amigo Eugenio, se fuere moviendo alrededor, afirmándose sobre la estremi-

dad A, la otra estremidad B irá describiendo una

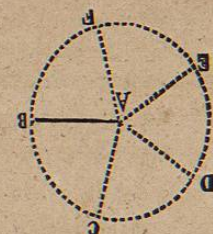
Fig. 3.

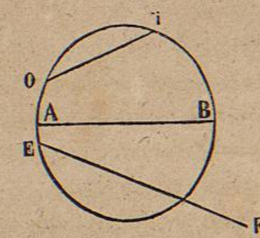

Fig. 4.

curva, la que vendrá á concluir en su principio, cuando la recta vuelva por último á su lugar antiguo.

Esta línea recta que se mueve se llama radio, como AB : el punto A ó la estremidad fija se llama centro.

La curva formada por la estremidad movible se llama circunferencia ó periferia, como B, C, D, E, F.

Cualquiera porcion de esta circunferencia se llama arco, como DC ó DE, etc.

El espacio comprendido dentro de la circunferencia se llama círculo.

La recta, que de un punto de la circunferencia llega hasta el otro, atravesando por el centro, se llama diámetro (Fig. 4).

La recta que no pasare por el centro, y termina por ambos estremos en la circunferencia, se llama cuerda, como OI.

La recta que saliere fuera del círculo se llama secante, como EF.

Ahora, amigo, de la formacion del círculo salen varias consecuencias.

I.

Los diferentes radios de un círculo (Fig. 5) no son otra cosa sino la misma línea AB, que se movió, haciendo el círculo, y puesta en diversas situaciones hace diversos radios.

Núm. 2. Luego todos los radios de un círculo son iguales entre sí.

II.

Los radios de un círculo son la medida de las distancias entre el centro y los puntos de la circunferencia; y como los rayos son iguales se sigue:

Núm. 3. Luego todos los puntos de la circunferencia están igualmente distantes del centro.

III.

Doblado un círculo por el centro (Fig. 5) si algun

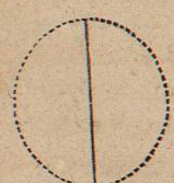

Fig. 5.

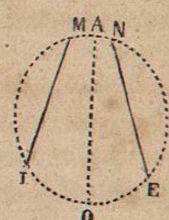

Fig. 6.

punto de alguna mitad saliere mas hácia fuera, ó entrase mas hácia dentro que los de la otra mitad,

distaria este punto del centro mas ó menos que los otros, lo que es imposible.

Núm. 4. Luego doblado cualquier círculo por el centro se ajustarán perfectamente las dos medias circunferencias ó semicírculos.

IV.

Si dos arcos en un círculo fueren iguales (Fig. 6), se podrá doblar el círculo por el centro de tal modo, que no solo se ajusten las dos medias circunferencias, sino tambien los dos arcos iguales, que son partes de ellas. Entonces poniendo las estremidades de un arco sobre las estremidades del otro se ajustará perfectamente la distancia entre estas estremidades ó las cuerdas que las miden.

Núm. 5. Luego en el mismo círculo los arcos iguales tienen cuerdas iguales.

Del mismo modo si en el mismo círculo son las cuerdas iguales, las estremidades de los arcos que estas atan estarán igualmente distantes, y por ser igual su curvatura, pues se forman con igual movimiento del mismo radio, se podrán ajustar y coincidir.

Núm. 6. Luego en el mismo círculo cuerdas iguales piden arcos iguales.

§ III.

De los ángulos en comun.

Amigo Eugenio, antes de hablar de los ángulos conviene esplicarte algunos términos que podrán ser estraños á los principiantes.

Cuando dos líneas van conservando siempre entre sí igual distancia se llaman *paralelas* : de estas trataremos adelante.

Cuando la distancia va siendo mayor al paso que van adelantando estas líneas, se llaman *divergentes*, v. g. (Fig. 6) las líneas MI y NE, que segun van bajando van distando mas entre sí.

Cuando las líneas van distando entre sí cada vez menos se llaman *convergentes*, v. g. las mismas líneas si se toman de abajo hácia arriba. Esto supuesto, sabrás que

Núm. 7. Angulo es la divergencia de dos rayos ó de dos líneas que se consideren como tales (Fig. 7).

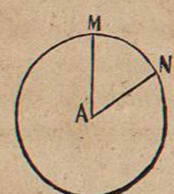

Fig. 7.

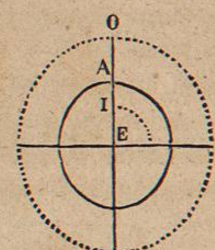

Fig. 8.

El punto A en que se unen se llama *vértice* : las dos líneas se llaman *lados* [1].

[1] Confieso que dos líneas unidas en un punto pueden hacer ángulo, aunque sea fuera del círculo : no obsta, como para medir la grandeza de este ángulo siempre se considera una punta del compas puesta en

De este conocimiento se siguen las consecuencias siguientes :

I.

Núm. 8. El ángulo mayor ó menor es la mayor ó menor divergencia de las líneas. Y así la longitud de las líneas no tiene conexion alguna con la grandeza del ángulo. Por esto (Fig. 8) el ángulo E no mudará de cantidad, bien sea que sus líneas se corten en I, ó paren en A, ó continuen hasta O.

II.

Núm. 9. La medida del ángulo es la medida de la divergencia, esto es, el arco comprendido entre los dos rayos que se forman y describen desde el vértice como de centro.

La circunferencia de cualquier círculo grande ó pequeño se divide en 360 partes iguales, las que se llaman *grados* : los círculos grandes tienen grados grandes, y los pequeños los tienen pequeños. Cada grado se puede dividir en 60 partes iguales, que se llaman minutos, y cada minuto en 60 partes iguales, que se llaman segundos, etc.

Núm. 10. Cuando el arco comprendido entre los lados de un ángulo es la cuarta parte de un círculo

el vértice, y se describe un círculo que corte sus dos lados en igual distancia, para conocer el valor del arco que comprende, en este particular se consideran como radios. Tambien advierto que algunas veces se nota ó señala el ángulo con tres letras : en este caso siempre se ha de poner en medio de las otras dos la letra que está en el vértice.

comprende 90 grados, y se llama ángulo recto, como A (Fig. 9).

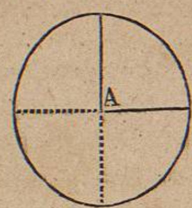

Fig. 9.

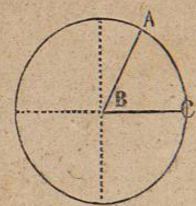

Fig. 10.

Cuando el arco es menos que la cuarta parte se llama *agudo*, como B (Fig. 10).

Cuando el arco comprende mas de la cuarta parte de un círculo se llama *obtuso*, como D (Fig. 11).

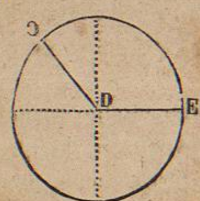

Fig. 11.

Fig. 12.

De estas tres definiciones se sacan varias consecuencias.

I.

Núm. 11. Luego solamente los ángulos rectos tienen medida constante y número sabido de grados, y todos son iguales entre sí.

II.

Núm. 12. Luego el semicírculo ó media circun-

ferencia es la medida de dos ángulos rectos, ó de dos ángulos que tengan el valor de estos (Fig. 12), porque es igual á dos cuartas partes del círculo ó á 180 grados.

III.

Núm. 13. Luego la circunferencia total es medida de cuatro (Fig. 8) ángulos rectos, ó de los ángulos que tengan el valor de ellos (Fig. 13), porque tiene por medida cuatro cuartas partes del círculo.

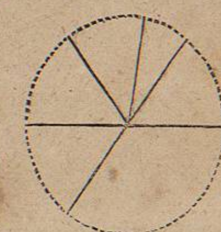

Fig. 13.

IV.

Núm. 14. Luego todos los ángulos que se pudieren formar sobre una línea recta y en un punto (Fig. 12) tienen el valor de dos rectos, porque todos juntos se pueden medir por la media circunferencia, ó tienen el mismo valor que un semicírculo.

V.

Núm. 15. Luego todos los ángulos que se pueden formar alrededor de un punto (Fig. 13) son iguales á cuatro rectos, porque se pueden medir por una circunferencia entera.

Se llama *suplemento* de un ángulo lo que falta á este para completar la media circunferencia ó semicírculo (Fig. 14), y así el ángulo A tiene por su-

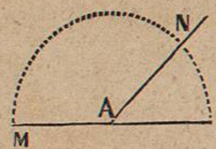

Fig. 14.

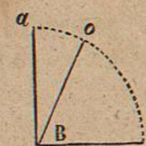

Fig. 15.

plemento la porcion de semicírculo MN. Se llama *complemento* de un ángulo lo que falta en este para la cuarta parte de un círculo, como B (Fig. 15), por lo cual el ángulo B tiene por complemento el arco *ao*.

De esta definicion se sacan las consecuencias siguientes.

I.

Núm. 16. Luego cuando dos ángulos tuvieren el mismo complemento ó el mismo suplemento serán iguales entre sí, porque si á ambos les falta el mismo número de grados para 90 ó para 180, ambos tendrán igual número de grados.

Cuando dos rectas se cruzan (Fig. 16) tenemos

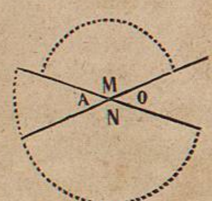

Fig. 16.

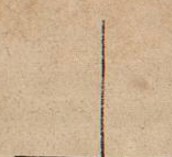
Fig. 17.

cuatro ángulos A, M, O, N. Aquellos ángulos que no

tienen un lado comun á los dos, v. g. AO, como MN, se llaman opuestos por el vértice, ó como algunos dicen opuestos verticalmente : adviértase bien que, como he dicho, han de ser formados por dos rectas que se crucen.

Si tomamos juntamente el ángulo M con el A, ambos se miden por un semicírculo, y por consiguiente A es el suplemento de M. Asimismo si tomamos juntos el ángulo N con el A tienen por su medida un semicírculo, y por consiguiente A es suplemento de N. Luego M y N tendrán el mismo suplemento A; y esto se puede probar con los ángulos A y O.

II.

Núm. 17. Luego los ángulos opuestos por el vértice son iguales.

§ IV.

De la línea perpendicular y de la oblicua.

Se llama línea perpendicular la recta, que cayendo sobre otra no se inclina mas hácia un lado que hácia otro (Fig. 17).

De esta definicion se sacan varias consecuencias.

I.

Núm. 18. Luego cuando la perpendicular hace dos ángulos con la otra línea sobre que cae, estos serán entre sí iguales; pues á no serlo se inclinaria mas hácia un lado que á otro (Fig. 17) y no seria perpendicular.

II.

Núm. 19. Luego los ángulos que hace la perpendicular son rectos, porque valen ambos dos rectos; y pues son iguales entre sí, cada uno será un recto; por consiguiente.

La línea que con otra hiciere dos ángulos rectos será perpendicular á esta otra supuesto que no se inclina mas á un lado que á otro.

III.

Núm, 20. Si dos líneas hicieren un ángulo recto (Fig. 18) podemos por el vértice ó prolongar una de

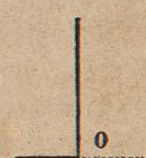

Fig. 18.


Fig. 19.

ellas, y aparecerá un nuevo ángulo, que tambien será recto (núm. 14): por consiguiente una línea será perpendicular á otra; y si prolongásemos las dos líneas que concurren en el ángulo O, tendremos por la misma razon cuatro ángulos rectos, y todas las líneas serian mutuamente perpendiculares.

Núm. 21. Luego siempre que una recta hace ángulo recto con otra la será perpendicular.

IV.

Cuando una recta es perpendicular sobre otra (Fig. 19), hace con ella un ángulo recto, y entonces tambien la segunda le hace con la primera, y por el núm 21 precedente la será perpendicular.

Núm. 22. Luego cuando una línea fuere perpendicular á otra, tambien esta otra lo será respecto de la primera.

V.

Puesta una recta *mn* (Fig. 20), y levantada una

Fig. 20.

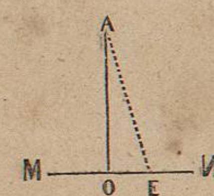

Fig. 21.

perpendicular AO, si desde el mismo punto queremos levantar otra, ó bien ha de pasar sobre la primera, y entonces no es línea distinta, ó ha de caer hácia alguno de los lados, y entonces no será perpendicular porque se inclina mas á un lado que á otro.

Núm. 23. Luego del mismo punto de una línea no se pueden levantar dos perpendiculares.

VI.

Del mismo modo (Fig. 21) si la perpendicular AO, no se inclina á un lado ni á otro, cualquiera otra línea que saliere de A, ó ha de venir á parar á O, y entonces no es línea diversa, ó ha de caer hácia uno de los lados, y se inclinará mas á un lado que á otro, y entonces no será perpendicular.

Núm. 24. Luego de un punto no se podrán tirar dos perpendiculares sobre la misma línea.

§ V.

De otras propiedades de las líneas perpendiculares.

Supuesto que la perpendicular no se inclina mas á un lado que á otro, saldrán las consecuencias siguientes.

I.

Núm. 25. Si del medio de una línea MN (Fig. 22 se levanta una perpendicular, su estremidad superior O distará igualmente de los dos estremos de la línea MN; pues de lo contrario, teniendo la perpendicular la estremidad inferior A igualmente distante de los estremos MN, y la de arriba O mas cerca del uno que del otro, toda la línea se inclinaria hácia esta parte, y ya no seria perpendicular.

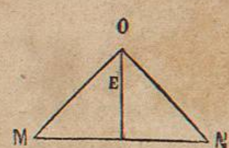

Fig. 22.

II.

Podemos partir esta perpendicular OE por cualquier punto que se quiera, y en este caso este punto, v. g. E, sería la estremidad superior, y por consiguiente igualmente distantes de los estremos MN.

Núm. 26. Luego si del medio de una línea se levantare una perpendicular todos los puntos de ella distarán igualmente de los estremos de la otra línea MN.

III.

Dijimos en el núm 25 que si del medio de la línea MN se levantase una perpendicular, iria á buscar el punto O igualmente distante de las estremidades MN; luego la línea que saliere de O y viniere á parar en A, será perpendicular; y como del punto O no se pueden tirar dos perpendiculares sobre la misma línea (núm. 24) se sigue que la línea que saliere de O igualmente distantes de las estremidades, si fuere perpendicular ha de venir á buscar el punto A tambien igualmente distante de ellas.

Núm. 27. Luego si la estremidad superior de la perpendicular dista igualmente de los estremos de la otra línea, tambien la estremidad inferior distará igualmente de ellos.

IV.

Ahora bien, pudiéndose cortar la perpendicular por el punto que se quiera v. g. por E (Fig. 22), y hacer que este sea la estremidad superior, se sigue :

Núm. 28. Luego dado en una perpendicular cualquier punto E, que diste igualmente de los estremos de la línea MN, la perpendicular vendrá á dar en el medio de ella (por el núm. 27).

V.

Núm. 29. Luego, generalmente hablando, dando en la línea perpendicular cualquier punto igualmente distante de los estremos MN, sea ínfimo ó superior ó cualquiera otro, ó por el medio, todos los otros puntos de la perpendicular tendrán igual distancia del uno y el otro estremo de la otra línea (núms. 26, 27 y 28).

VI.

Tambien podemos cortar la línea MO por donde nos parezca, y de cualesquiera puntos de ella haremos estremidades; y de este modo lo que hemos dicho de la perpendicular que dista igualmente de las estremidades de la otra línea, lo podremos decir de la perpendicular que distará igualmente de cualesquiera puntos notados en la otra línea.

Núm. 30. Luego la perpendicular que tuviere un punto (Fig. 23), cualquiera que sea, igualmente distantes de los dos notados MN en la línea sobre que cae, tendrá todos sus puntos igualmente distantes de ambos á dos.

Ahora bien, si todos los puntos de la perpendicular A, E, I, O (Fig. 23), se suponen igualmente distantes de MN (Núm. 30), todos los otros puntos que quedaron á los lados de esa perpendicular, ó han de quedar mas cerca de M ó de N; y así no es posible que punto alguno que quede fuera de la perpendicular diste igualmente de los dos puntos notados en la línea sobre que cae.

Núm. 31. Luego si un punto de la perpendicular

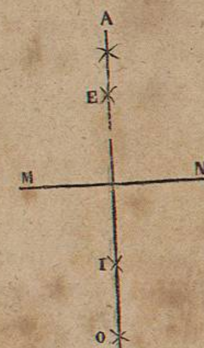

Fig. 23.

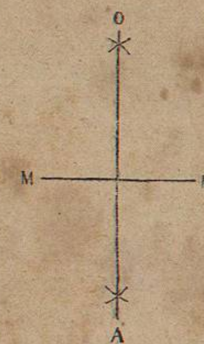

Fig. 24.

dista igualmente de los dos notados en la línea sobre que cae, la perpendicular pasará por todos los puntos que distaren igualmente de ellos.

§ VI.

Señales para conocer las perpendiculares y modo de formarlas.

Hasta aquí, amigo Eugenio, del conocimiento de la perpendicular te enseñé á sacar sus propiedades; ahora por las propiedades te enseñaré á conocer la perpendicular.

I.

Núm. 32. Si una línea (Fig. 24) tuviere dos puntos igualmente distantes de otros dos señalados en