V.

Núm. 29. Luego, generalmente hablando, dando en la línea perpendicular cualquier punto igualmente distante de los estremos MN, sea ínfimo ó superior ó cualquiera otro, ó por el medio, todos los otros puntos de la perpendicular tendrán igual distancia del uno y el otro estremo de la otra línea (núms. 26, 27 y 28).

VI.

Tambien podemos cortar la línea MO por donde nos parezca, y de cualesquiera puntos de ella haremos estremidades; y de este modo lo que hemos dicho de la perpendicular que dista igualmente de las estremidades de la otra línea, lo podremos decir de la perpendicular que distará igualmente de cualesquiera puntos notados en la otra línea.

Núm. 30. Luego la perpendicular que tuviere un punto (Fig. 23), cualquiera que sea, igualmente distantes de los dos notados MN en la línea sobre que cae, tendrá todos sus puntos igualmente distantes de ambos á dos.

Ahora bien, si todos los puntos de la perpendicular A, E, I, O (Fig. 23), se suponen igualmente distantes de MN (Núm. 30), todos los otros puntos que quedaron á los lados de esa perpendicular, ó han de quedar mas cerca de M ó de N; y así no es posible que punto alguno que quede fuera de la perpendicular diste igualmente de los dos puntos notados en la línea sobre que cae.

Núm. 31. Luego si un punto de la perpendicular

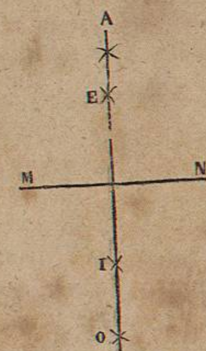

Fig. 23.

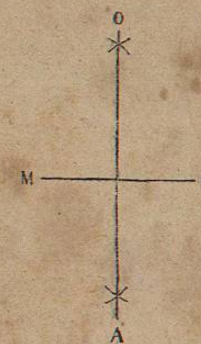

Fig. 24.

dista igualmente de los dos notados en la línea sobre que cae, la perpendicular pasará por todos los puntos que distaren igualmente de ellos.

§ VI.

Señales para conocer las perpendiculares y modo de formarlas.

Hasta aquí, amigo Eugenio, del conocimiento de la perpendicular te enseñé á sacar sus propiedades; ahora por las propiedades te enseñaré á conocer la perpendicular.

I.

Núm. 32. Si una línea (Fig. 24) tuviere dos puntos igualmente distantes de otros dos señalados en otra, basta esto para ser perpendicular; v. g. si AO tuviese A igualmente distante de MN, y tambien O igualmente distante de estos mismos, esto basta para ser perpendicular á MN.

Porque la perpendicular que pasase por el punto O, igualmente distante de MN, iria á tocar al punto A, tambien igualmente distante de los puntos MN (por el núm. 51). Luego si esta línea de que se trata llega de O hasta A pasa por donde pasaria la perpendicular; y por consiguiente lo será.

Núm. 53. Luego para levantar una perpendicular (Fig. 25) sobre un punto dado O, bastaria lo prime-

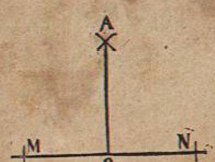

Fig. 25.

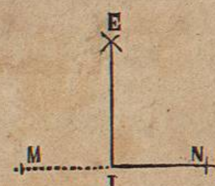

Fig. 26.

ro señalar en esa línea dos puntos MN igualmente distantes de O, y describir desde ellos como de centros dos arcos con igual abertura del compas, de modo que se crucen en A, y tirar la línea desde A hasta O; pues de este modo tenemos que O y A distan igualmente de M y N; y así por estos dos puntos podremos tirar la perpendicular que se desea segun el número precedente.

II.

Núm. 54. Si el punto dado para levantar la per-

pendicular (Fig. 26) fuere I, estremidad de la línea, podremos continuarla; y notando como hicimos arriba los dos puntos MN, si desde estos describimos los dos arcos hallaremos que el punto E es en donde se corta, y desde allí sacaremos la perpendicular hasta I.

III.

Si de las dos estremidades de una línea MN (Fig. 27) describiésemos dos arcos iguales para hallar un punto A igualmente distante de ellas, y repitiésemos la operacion con la misma ú otra abertura de compas para hallar otro punto donde cruce, igualmente distante de ellas, la línea tirada por los dos puntos en donde se cortan los arcos será perpendicular á la primera (núm. 52), y pasará por todos los puntos que tuvieren igual distancia de las estremidades (núm. 55), y así tambien pasará por el medio de la línea I.

Fig. 27.

Núm. 55. Luego para cortar una línea por el medio (Fig. 27) bastará describir desde sus estremidades dos arcos iguales que se crucen ó corten en un punto A, y otros dos que se corten en otro, y tirar una línea por los dos puntos en que se cruzan los arcos.

IV.

Si de un punto A (Fig. 28) describiésemos un arco que corte una línea en dos puntos MN, y de estos

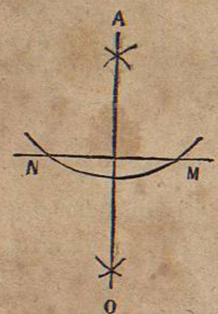

Fig. 28.

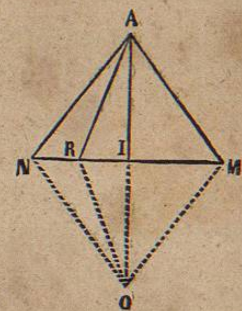

Fig. 29.

como de centro describiésemos dos arcos iguales que se corten en O, la línea AO tendrá los puntos igualmente distantes de MN, y por consiguiente le será perpendicular (núm. 52).

Núm. 56. Luego de este modo de un punto se puede bajar una perpendicular sobre otra línea.

§ VII.

De la línea oblicua.

La línea que se inclina sobre otra mas á un lado que á otro se llama *oblicua*.

Tres consecuencias se sacan de esta nocion.

I.

Que de un punto dado A (Fig. 29) podemos tirar

sobre una misma línea muchas oblicuas, dando mas ó menos inclinacion, aunque sola una perpendicular se puede tirar desde un solo punto.

Si habiendo tirado de A una perpendicular y muchas oblicuas sobre MN (Fig. 29), repitiendo la operacion hácia abajo tirásemos otras líneas iguales, y del mismo modo que las superiores, la línea AIO será recta y perpendicular, pues por la construccion hace los cuatro ángulos rectos (núm. 20), y pasa por donde pasaria la perpendicular AI continuada. Las otras líneas AMO, ARO, ANO, formadas de dos oblicuas inclinadas, serán mayores que la recta. Porque así como si el punto A llegase á O, no por una recta sino por una curva, llegaria mas tarde y andaria mas camino, lo mismo le sucederia si primero fuese á R ó N para ir desde allí á O. Luego la mitad de esas líneas compuestas ARO, ANO, serian mayores que la mitad de la recta AIO.

II.

Núm. 57. Luego la perpendicular es la mas corta de todas las líneas que se pueden tirar desde un punto á otra línea.

III.

Núm. 58. Luego la línea menor que se puede tirar desde un punto á otra línea será perpendicular á esta, supuesto que la menor de todas es una y única, y la perpendicular es esa menor de todas (por el núm. 57).

§ VIII.

De las paralelas.

Núm. 39. Si puesta una línea sobre otra fuésemos apartando igualmente las estremidades de una de los lugares en donde estaban (Fig. 30), estas líneas

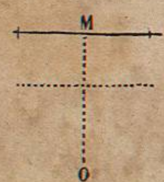

Fig. 30.

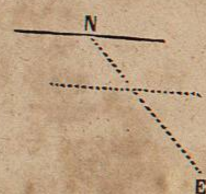

Fig. 31.

conservarian entre sí igual distancia, pues el movimiento fué igual; y esto se entiende, ó bien se haga el movimiento por una línea perpendicular, como MO (Fig. 30), ó bien por una linea oblicua como NE (Fig. 31).

Núm. 40. Estas líneas que conservan entre sí distancia igual por todas partes se llaman, como hemos dicho, *paralelas*.

De esta simple nocion de las paralelas se sacan las consecuencias siguientes:

I.

Si ajustásemos dos ángulos iguales (Fig. 32) EAM, ION, y despues hiciésemos mover la línea OM por encima de la línea AM, daremos igual movimiento

á todos los puntos de la línea OI; por consiguiente

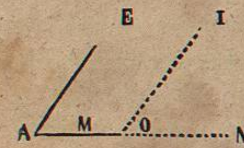

Fig. 32.

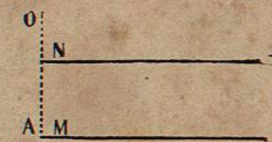

Fig. 33.

quedarán sus puntos igualmente distantes de los puntos correspondientes en la línea AE, y así las dos líneas serán paralelas.

Todas las veces pues que dos ángulos sean iguales, podemos ajustar muy bien uno con otro, y despues separarlos, como acabamos de hacer ahora.

Núm. 41. Luego siempre que dos líneas caen sobre otra, y hacen á la misma parte ángulos iguales, son paralelas.

Núm. 42. Luego siempre que dos líneas caen sobre otra, y son perpendiculares por hacer á la misma parte ángulos rectos, serán entre sí paralelas.

Luego para tirar una línea paralela á otra por un punto dado N (Fig. 33), bastará levantar una perpendicular AO que pase por el punto dado N, y despues levantar desde este punto otra que no sea perpendicular á la primera que se levantó.

Si dos líneas pues cayendo una sobre otra, v. g. si AEOI cayendo sobre AN son paralelas (Fig. 32), los puntos de una distarán igualmente de los que les corresponden en la otra; y así haciendo mover ON sobre AM, se ajustarán las dos líneas paralelas, y los dos ángulos tambien quedarán ajustados el uno con el otro, lo que no podria ser si no fuesen iguales.

Núm. 43. Luego cuando dos líneas son paralelas (Fig. 32) harán á la misma parte los ángulos iguales.

Considerando yo (Fig. 34), veo que si las dos pa-

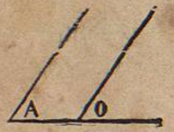

Fig. 34.

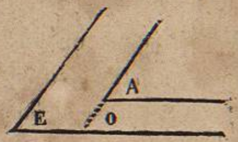

Fig. 35.

ralelas caen sobre otra tercera AO, tambien la línea AO va á encontrar las dos paralelas.

Núm. 44. Luego cuando una recta cae sobre dos paralelas hace por la misma parte ángulos iguales, y cuando una recta hiciere con dos líneas ángulos iguales por la misma parte, las dos son paralelas.

Supongamos ahora (Fig. 35) que formamos dos ángulos, cuyos lados sean respectivamente paralelos, y que prolongamos una de las líneas AO hasta encontrar un lado del otro ángulo E. En este caso el ángulo A será igual á O, pues una línea corta dos paralelas (núm. 34); y ademas de esto O será igual á E, porque dos paralelas caen sobre una línea (núm. 43). Luego A es igual á E.

Núm. 45. Luego todos los ángulos hechos por paralelas son iguales.

Cuando una recta corta dos paralelas (Fig. 36), los ángulos contrapuestos AO como tambien OM se

llaman *alternos*, por razon de estar el uno bajo la una paralela, y el otro encima de la opuesta; y si el uno está á la izquierda de la línea que corta, el otro está á la derecha; por la misma razon son alternos EN, y tambien IR.

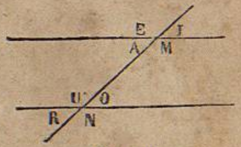

Fig. 36.

Ahora bien ya hemos dicho que A es igual á I opuesto en el vértice (núm. 13); tambien dijimos que el ángulo I era igual á O por las paralelas (núm. 43); y así A es igual á O por ser su alterno.

Núm. 46. Luego todos los ángulos alternos son iguales entre sí.

Luego cuando una recta cortando dos rectas hiciere los ángulos alternos iguales, las dos líneas son paralelas. Porque si O es igual á A, como A es igual á I, verticalmente opuesto, viene á ser O igual á I, y entonces por el número 41 serán las dos líneas paralelas.

Cuando una recta corta dos paralelas (Fig. 36) decimos que M junto con I valen dos rectos (núm. 11), y que I es igual á O por las paralelas; luego M junto con O valen dos rectos.

Núm. 47. Luego cuando una recta cortase dos paralelas, los dos ángulos internos hácia la misma parte valen dos rectos. La misma demostracion se aplica á los ángulos esternos de la misma parte.

Luego cuando una recta corta dos paralelas los ángulos esternos hácia la misma parte valen dos rectos. Y así I mas N son iguales á dos rectos, como tambien E mas R.

§ IX.

De las tangentes de los círculos.

Núm. 48. Cuando una recta toca un círculo sin poderle cortar, aunque se la prolongue por ambas partes, se llama *tangente*.

Ahora, pues, la recta nunca puede coincidir con la curva, ni la tangente con la circunferencia. Luego la recta que toca en la circunferencia, si la prolongan entrará en la circunferencia, ó saldrá fuera de ella; si entra, será *secante*, si sale será *tangente*.

Núm. 49. Luego la tangente solo toca en el círculo por un punto O (Fig. 57).

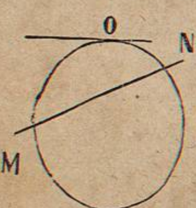

Fig. 57.

Fig. 58.

Núm. 50. Si del centro de un círculo A tirásemos una línea (Fig. 58) al punto del contacto O, y ademas de esto otras muchas hasta tocar en la tangente, sola la del contacto quedará sin salir del círculo, pues todos los demas puntos de la tangente están fuera de él.

Núm. 51. Luego el radio, que es la única línea que llega al punto del contacto, es la menor línea que se puede tirar desde el centro á la tangente.

Núm. 52. Luego el radio del contacto es perpendicular sobre la tangente, y la tangente lo es sobre el radio (núm. 58 y 22).

Núm. 53. Luego no se pueden tirar muchas tangentes á un mismo punto del círculo (Fig. 39), por-

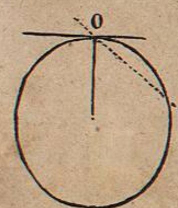

Fig. 39.

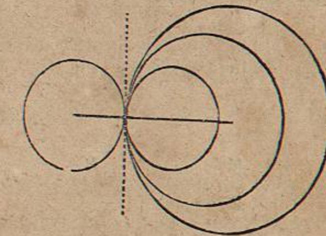

Fig. 40.

que entonces habria muchas perpendiculares sobre el mismo punto del radio O, lo que es imposible (núm. 25).

Núm. 54. Luego si muchos círculos (Fig. 40) se tocan en un punto comun, todos tendrán la misma tangente en este punto; pues no puede haber muchas en un mismo punto (núm. 53).

Ahora bien, cuando muchos círculos se tocan en un punto comun, todos los radios que vienen á parar al punto del contacto son perpendiculares á la tangente en este punto (núm. 52); y no pudiendo haber muchas perpendiculares sobre un solo punto (núm. 25), es preciso que estos radios hagan una sola línea.

Núm. 55. Luego cuando muchos círculos se tocan en un solo punto, los radios hacen una sola línea.

Los centros, pues, de estos círculos son las estremidades de los radios, los cuales todos están en una línea recta.

Núm. 56. Luego cuando muchos círculos se tocan en un solo punto, todos sus centros están en la misma línea recta.

Núm. 57. Luego si nos dieren un círculo M (Fig. 41), y nos pidieren el centro de cualesquiera otros

Fig. 41.

Fig. 42.

que le toquen en un punto determinado A, para hallarle bastará tirar desde el centro I una línea por el punto del contacto y prolongarla.

Por cuanto en esta línea prolongada se hallarán los centros de todos los círculos imaginables que pueden tocar el círculo M en el punto dado A (núm. 56).

§ X.

De las perpendiculares en los círculos.

Tirada una cuerda en el círculo (Fig. 42), y sobre

ella levantada una perpendicular, observamos que si la perpendicular pasa por el centro ya tiene un punto igualmente distante de las estremidades de la cuerda, porque estan en la circunferencia; y así (núm. 50) la perpendicular ha de pasar por todos los puntos que distan igualmente de ellas : uno, pues, de estos puntos es el medio de la cuerda.

Núm. 58. Luego la perpendicular sobre la cuerda si pasa por el centro la corta por el medio.

Núm. 59. Luego si la perpendicular pasa por el medio de la cuerda, pasa tambien por el centro (Fig. 42), porque aquí vale la misma razon del núm. 50.

Del mismo modo debemos discurrir acerca del arco, porque el medio del arco dista igualmente de las estremidades de la cuerda, pues esas mitades del arco son arcos iguales que tienen cuerdas iguales, y estas cuerdas son las distancias de las estremidades; y así la perpendicular que debe pasar todos los puntos que distan igualmente de las estremidades de la cuerda pasará tambien por el medio del arco (Fig. 42).

Núm. 60. Luego si la perpendicular pasa por el centro ó por el medio de la cuerda, pasará tambien por el medio del arco, como tambien si pasare por medio del arco, tambien pasará por el medio de la cuerda y del centro si la prolongan, por la misma razon del núm. 50.

Si en un círculo hubiese dos cuerdas (Fig. 43) paralelas entre sí y á una tangente, la perpendicular que pasare por el centro dividirá los arcos por el medio de este modo : *ea*, *eo*, serán iguales, como

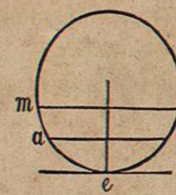

Fig. 43.

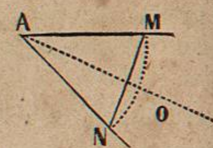

Fig. 44.

tambien *em*, *en*; por consiguiente, quitando de cada arco grande ó pequeño que en él se incluye, los restos *ma*, *no*, serán iguales.

Núm. 61. Luego los arcos de un círculo comprendidos entre paralelas son iguales.

Dijimos que la perpendicular que pasa por el medio de la cuerda corta al arco por el medio (núm. 60), y que los arcos son la medida de los ángulos núm. 8).

Luego si nos dieren un ángulo A (Fig. 44), para dividirle por el medio bastará describir desde su vértice como de centro un arco MN, y tirarle su cuerda, dividiendo esta por el medio con la perpendicular AO, supuesto que dividida la cuerda por el medio se divide por consiguiente el arco, el cual es la medida del ángulo.

Dijimos que la perpendicular sobre el medio de la cuerda pasa por el centro del círculo que hubiere de pasar por las estremidades de ella (núm. 59).

Núm. 62. Luego si nos dieren tres puntos (Fig. 45) M, N, O, que no esten en línea recta, y pidieren

un círculo que pase por todos ellos, resolveremos el problema del modo siguiente :

1. Ataremos los tres puntos por medio de dos líneas ON, OM.

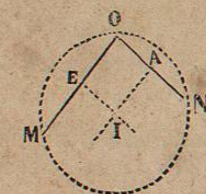

Fig 45.

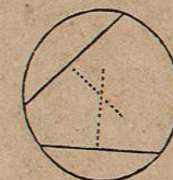

Fig. 46.

2. Levantaré del medio de cada una de ellas las perpendiculares, y estas se cortarán en I, y en donde se cortan ó cruzan me darán el centro del círculo deseado.

Porque la perpendicular AI demuestra que el centro del círculo que pasa por NO debe estar en ella : la perpendicular EI manifiesta que el centro del circulo que pasare por MO debe estar en ella. Luego ambas juntas demuestran que el círculo que hubiere de pasar por los tres puntos MNO debe tener el centro en el punto I, comun á entrambas.

Núm. 63. Luego para hallar el centro de un círculo (Fig. 46) bastará tirar dos cuerdas, y sobre el medio de cada una de ellas levantar su perpendicular, y entonces el punto en que se crucen será el centro deseado, por la razon del número precedente.

§ XI.

Problemas sobre los círculos que tocan á otros en puntos dados en la periferia, y pasan por puntos dados fuera de ella.

I.

Si te dieren, Eugenio, un círculo A (Fig. 47), y

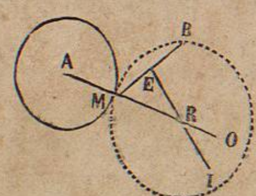

Fig. 47.

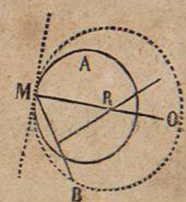

Fig. 48.

en él un punto M, para el contacto de un nuevo círculo que debe pasar por B, se hará lo siguiente :

1. Por el núm. 52 : todo círculo que hubiere de tocar en M ha de tener el centro en una línea que pase por ese punto y por el centro del círculo A; consiguiente estará el centro del nuevo círculo en la línea indefinita AMO.

2. Ademas de esto el círculo pedido no solo ha de pasar por M, sino tambien por B : para esto, pues, tirada la línea BM se levantará en el medio de ella la perpendicular EI, la cual (núm 57) debe pasar por el centro de cualquier círculo, cuya circunferencia haya de pasar por los puntos BM.

Núm. 64. Luego el centro del nuevo círculo que

toque en M y pase por B debe estar en el punto R, en el cual se cruzan las dos líneas.

II.

Núm. 65. Si el punto B dado fuera del círculo (Fig. 48) quedase dentro de la tangente que se retirase por el punto de contacto M, se debe hacer la misma operacion, y se hallará que el centro R cae en el punto en que se cruzan las dos líneas; y en este caso el nuevo círculo incluye al antiguo.

Núm. 66. Si el punto dado B (Fig. 49) por donde

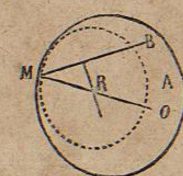

Fig. 49.

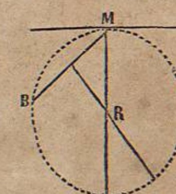

Fig. 50.

ha de pasar el nuevo círculo cayere dentro del círculo antiguo, siempre se hallará el centro por la misma operacion en el punto R, y el nuevo círculo quedará incluido dentro del primero.

Núm. 67. Si te diesen una línea recta (Fig. 50), y en ella un punto M, para que en él toque un círculo, el cual haya de pasar por el punto dado B, harás como se sigue : levántese una perpendicular M, porque en ella ha de estar el centro del círculo que se pide (núm. 53) : tírese despues la línea BM, y del medio de ella levántese una perpendicular, la cual pasará por el centro del nuevo círculo, y la circunferencia de este irá por B y M; y, como queda dicho (núm. 59), el punto en donde se cortan ó cruzan R será el centro.

Esta carta, amigo, se ha dilatado mucho mas de lo que yo habia pensado, bien que la deduccion de las verdades que iban espontáneamente naciendo de las que ya estaban dichas no me permitia cortar el hilo: perdóname, aunque no te prometo la enmienda.

CARTA DÉCIMASESTA.

DE LA MEDIDA DE LOS ANGULOS.

§ I.

De la medida de los ángulos que tienen el vértice en la circunferencia.

Amigo Eugenio, supuesto que hayas entendido todo lo que te dije en la carta antecedente, y el grande gusto que me insinuas en que yo continue esta instruccion, prosigo; y te advierto que aunque el ángulo, segun la definicion que dimos, es formado por dos radios ó por dos cualesquiera líneas que se consideren como tales, y se debe medir poniendo el compas en su vértice, y describiendo un arco que corte los dos lados á igual distancia para conocer el valor del ángulo, no obstante, muchas veces no se necesita de esta diligencia para saber su valor, como sucede en los ángulos que tuvieren el vértice en la circunferencia, porque fácilmente se conoce cual sea su medida.