circunferencia de este irá por B y M; y, como queda dicho (núm. 59), el punto en donde se cortan ó cruzan R será el centro.

Esta carta, amigo, se ha dilatado mucho mas de lo que yo habia pensado, bien que la deduccion de las verdades que iban espontáneamente naciendo de las que ya estaban dichas no me permitia cortar el hilo: perdóname, aunque no te prometo la enmienda.

CARTA DÉCIMASESTA.

DE LA MEDIDA DE LOS ANGULOS.

§ I.

De la medida de los ángulos que tienen el vértice en la circunferencia.

Amigo Eugenio, supuesto que hayas entendido todo lo que te dije en la carta antecedente, y el grande gusto que me insinuas en que yo continue esta instruccion, prosigo; y te advierto que aunque el ángulo, segun la definicion que dimos, es formado por dos radios ó por dos cualesquiera líneas que se consideren como tales, y se debe medir poniendo el compas en su vértice, y describiendo un arco que corte los dos lados á igual distancia para conocer el valor del ángulo, no obstante, muchas veces no se necesita de esta diligencia para saber su valor, como sucede en los ángulos que tuvieren el vértice en la circunferencia, porque fácilmente se conoce cual sea su medida.

Pero de tres modos puede ser el ángulo que tiene el vértice en la circunferencia,

1. Si uno de los lados pasare por el centro (Fig. 51).

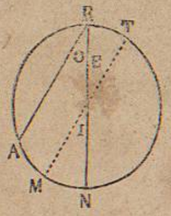

Fig. 51.

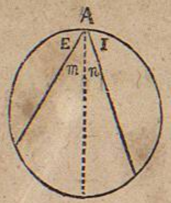

Fig. 52.

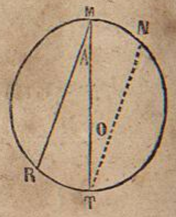

Fig. 53.

2. Si el centro quedase entre los lados (Fig. 52.

3. Si el centro estuviese fuera del ángulo (Fig. 53).

En el primer caso (Fig. 51), si por el centro se tirase una paralela al lado AR, quedará el ángulo central I igual al de la circunferencia O por causa de las paralelas (núm. 45). Luego el arco MN será medida de I y tambien de O.

Veamos ahora si el arco MN es la mitad del arco total AN, comprendido por el ángulo O. Los ángulos EI verticalmente opuestos son iguales (núm. 47). Luego MN es igual á RT. Ahora, pues, RT tambien es igual á AM, por ser arcos comprendidos entre paralelas (núm. 61). Luego MN es igual á MA; y por consiguiente MN, medida del ángulo O, es la mitad del arco AN comprendido por él.

Núm. 68. Luego en el primer caso el ángulo de la circunferencia tiene por medida la mitad de su arco.

En el segundo caso (Fig. 52), en que el centro queda comprendido dentro del ángulo, tírese desde el vértice A un diámetro, que divida el ángulo total en *mn*, y cada uno de ellos quedará en los términos del caso antecedente, y por eso tendrá por medida la mitad de su arco parcial.

Núm. 69. Luego en este segundo caso el ángulo de la circunferencia A tiene por medida la mitad de su arco total.

En el tercer caso (Fig. 53), en que el centro queda fuera del ángulo A, hágase lo siguiente.

Núm. 70. Tírese del punto T una línea TN paralela al primer lado RM : en este caso los ángulos OA son alternos é iguales, y tendrán la misma medida (núm. 46); pero el ángulo O por el caso precedente tiene por medida la mitad del arco MN, ó de su igual RT (núm 61). Luego A subalterno tendrá por medida la mitad de su arco RT.

Núm. 71. Si el nuevo ángulo O todavía no comprendiere el centro como se ve en (Fig. 54), se irán tirando sucesivamente paralelas al primer lado A, y despues al segundo, y de aquí al tercero, etc., hasta que un ángulo comprenda el centro ó pase por él, y entonces se discurre como arriba; pues todos los ángulos siendo alternos serán iguales, y todos los arcos estando entre paralelas tambien lo serán (núm. 61).

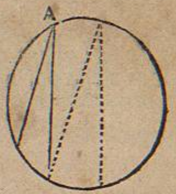

Fig. 54.

Núm. 72. Luego en todos los casos posibles el ángulo que tiene el vértice en la circunferencia tiene por medida la mitad de su arco.

De este conocimiento se siguen las consecuencias siguientes :

I.

Núm. 73. Luego (Fig. 55) todos los ángulos que

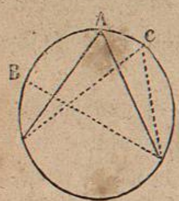

Fig. 55.

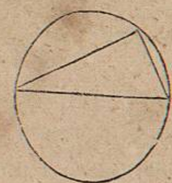

Fig. 56.

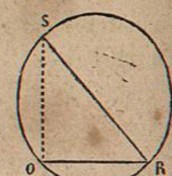

Fig. 57.

tienen el vértice en la circunferencia, y se apoyan sobre el mismo arco, son iguales, pues tienen la misma medida; y así los ángulos A, B, C, son iguales.

II.

Núm. 74. Luego el ángulo en la circunferencia (Fig. 56) apoyado sobre todo el diámetro es, recto, pues tiene por medida la mitad del semicírculo.

III.

Dada la recta OR (Fig. 57), la cual no se pueda alargar, si quisieren levantar de su estremidad O una perpendicular se hará lo siguiente.

Póngase el compas en un punto arbitrario, ábrase hasta que llegue al punto dado O, y descríbase un círculo, el cual cortará la recta dada en R : de aquí

tírese una línea por el centro, la que irá á terminar en S, y de este punto bájese una línea hasta O.

Esta línea hará con la dada un ángulo O que tiene el vértice en la circunferencia, y está apoyado sobre todo el diámetro RS : por consiguiente es recto; y así una línea es perpendicular á la otra.

Núm. 75. Luego por el ángulo en la circunferencia podemos levantar una perpendicular en la estremidad de una línea dada.

Si dado un círculo A (Fig. 58) se quisiere hallar el punto en que una tangente tirada desde el punto B toque al círculo dado, se hallará por el método siguiente.

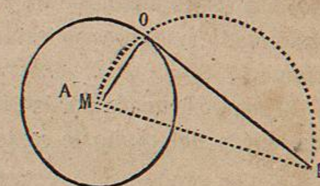

Fig. 58.

Tírese de M, centro del círculo A, una línea hasta B : descríbase sobre esta línea un círculo : el punto en que este cortare al antiguo ángulo A será el punto del contacto de la tangente.

Porque tirando la línea OM, ya tenemos el ángulo O, cuyo vértice está en la circunferencia, y está apoyado sobre el diámetro MB : por consiguiente es recto, y por ser OM un rayo : OB será tangente (núm. 52).

Núm. 76. Luego por el ángulo en la circunferencia podemos hallar el punto de contacto de una tangente tirada desde un punto dado, y sobre un círculo dado.

§ II.

De la medida de los ángulos formados en el círculo.

Amigo, los ángulos en la circunferencia siempre son formados por dos cuerdas, ó un diámetro con una cuerda; pero como en el círculo hay varias líneas que no son cuerdas ni diámetros, ya se advierte que hay varios ángulos diferentes de los que hemos examinado, y es preciso tratar de todos con separacion.

El ángulo formado por la tangente y por una cuerda nacida del punto de contacto (Fig. 59), ó ha de

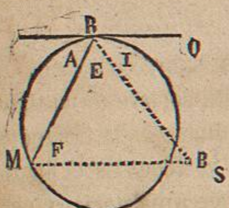

Fig. 59.

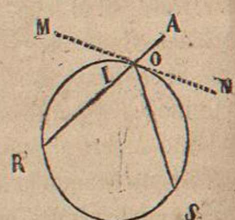

Fig. 60.

ser agudo ú obtuso: ambos los hemos de medir, y así empezaremos por el agudo A.

Pues sabemos medir los ángulos en la circunferencia, reduciré el ángulo de la cuestion A á otro igual en la circunferencia F, y esto ha de ser por medio de una línea MS paralela á la tangente: como F y A son alternos, la medida del uno será medida

del otro (núm. 46); pero el ángulo F tiene por medida la mitad del arco RS (núm 72), ó la mitad de MR su igual, por ser comprendidos entre paralelas (núm. 61). Luego tambien el ángulo A tiene por medida la mitad de ese mismo arco MR comprendido en él.

En cuanto al ángulo obtuso M, R, O, divídase en dos por medio de una cuerda, sea la que fuese RB, y en este caso el ángulo de la cincunferencia tiene por medida la mitad de su arco MB (núm. 72): el ángulo de la tangente en I tiene por medida la mitad de su arco BR, por lo que se acaba de decir, por consiguiente el ángulo total M, R, O, tiene por medida la mitad del arco total M, R, B.

Núm. 77. Luego todo el ángulo formado por cuerda y tangente tiene por medida la mitad del arco que comprende. Estos ángulos tambien se llaman ángulos en el segmento.

Ademas de estos ángulos se puede formar otro por una cuerda, y la continuacion de otra, v. g. el ángulo S, O, A (Fig. 60).

Para medir este ángulo divídase el ángulo total con una tangente MN: esto hecho, el ángulo inferior S, O, N tendrá por medida la mitad del arco SO que en sí comprende (núm. 77), y el ángulo superior N, O, A como es igual á I, por serle opuesto en el vértice, tendrá la misma medida de él, la que es la mitad del arco RI, por la misma razon del número preferente.

Núm. 78. Luego el ángulo total S, O, A hecho por una cuerda y la continuacion de otra, tiene por medida la mitad del arco comprendido, y mas la mitad del arco opuesto.

Tambien se puede formar un ángulo (Fig. 61)

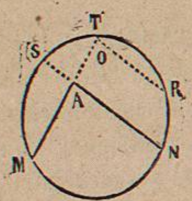

Fig. 61.

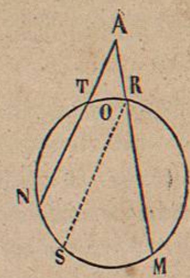

Fig. 62.

dentro del círculo, cuyo vértice se quede entre el círculo y la circunferencia.

Para medir este ángulo A prodúzcanse ó contiríúense ambos lados hasta la circunferencia, y del punto O tírese una línea paralela á AN : esto hecho, el ángulo O es igual A (núm. 45), y tendrá por medida la mitad del arco M, N, R (núm. 72), ó la mitad de MN y la mitad de NR; pero el arco NR es igual á ST comprendidos entre paralelas; y por consiguiente en lugar de la mitad de NR podemos sustituir ST. Luego esta misma será la medida del ángulo A su igual.

Núm. 79. Luego todo ángulo, cuyo vértice está entre el centro y la circunferencia, tiene por medida lo mitad del arco cóncavo sobre que estriba, y la mitad del convexo comprendido entre sus lados, si estos se prolongaran.

Ultimamente se puede formar un ángulo por dos

secantes que se junten fuera del círculo, y por consiguiente tendrá su vértice fuera de la circunferencia (Fig. 62).

Para medir este ángulo A, redúzcasele á otro igual ó hecho en la circunferencia por medio de una paralela RS : es así que este ángulo O tiene por medida la mitad de su arco SM; y por consiguiente si yo le diera por medida la mitad del arco total NM, debiera descontar lo que le dí de mas, que es la mitad de NS, ó la mitad de TR su igual (por el núm 61); y así tomando la mitad del arco cóncavo NM, menos la mitad del convexo TR, tendremos la medida verdadera de O, ó de A su igual.

Núm. 80. Luego el ángulo, cuyo vértice queda fuera de la circunferencia, tiene por medida la mitad del arco cóncavo, menos la mitad del convexo.

§ III.

De la medida de los ángulos en los triángulos.

Desembarazados ya, amigo Eugenio, de la medida de los ángulos que pertenecen al círculo, vamos á medir los ángulos en los triángulos.

Llamamos *triángulo* una figura formada por tres líneas rectas, las que por consiguiente forman tres ángulos. Cualquiera de estos ángulos se puede llamar *vértice* del triángulo, y entonces las líneas que forman el ángulo del vértice se llaman *lados*, y la otra línea opuesta al vértice se llama *base*.

Esto supuesto, si consideramos los lados del triángulo hallamos tres especies de triángulos, porque ó los tres lados son iguales, y se llamará *equilátero* (Fig. 63), ó solo tiene dos lados iguales, y se

Fig. 63.

Fig. 64.

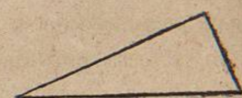

Fig. 65.

llamará el triángulo *isósceles* (Fig. 64), ó ninguno de los lados es igual á otro, y entonces se llama el triángulo *escaleno* (Fig. 65).

Considerando los ángulos de los triángulos hallamos otras tres especies, porque si tiene un ángulo recto, se llama *rectángulo* (Fig. 66). Si tiene un án-

Fig. 66.

Fig. 67.

gulo obtuso, se llama *obtusángulo* (Fig. 67). Si tiene todos los ángulos agudos, se llama *acutángulo* (Fig. 63 y 64).

Para saber el valor de los ángulos de cualquiera triángulo podremos tirar por el vértice (Fig. 68) una paralela á la base.

Fig. 68.

Esto hecho, se ve que M es

igual á su alterno O, así como N es igual al suyo E (núm. 46), pero M, A, N tienen el valor de dos rectos (núm. 11): luego O, A, E tienen ese mismo valor. En cualquier triángulo, pues, que sea rectilíneo podemos hacer esta misma demostracion.

Núm. 81. Luego todo triángulo rectilíneo tiene en sus tres ángulos el valor de dos rectos. De este conocimiento se siguen las consecuencias siguientes :

I.

Núm. 82. Luego en un triángulo no puede haber dos ángulos rectos, porque entonces estos dos con el tercer ángulo tendrian el valor de mas de dos rectos.

II.

Núm. 83. Luego en un triángulo no puede haber dos ángulos obtusos, por la misma razon.

III.

Núm. 84. Luego sabiéndose el valor de un ángulo se sabrá el valor de la suma de los otros dos, porque este será lo que falta para el valor de dos rectos.

IV.

Núm. 85. Luego sabiéndose el valor de dos ángulos se sabrá el valor del tercero, porque este será lo que faltare á la suma de los dos para llegar á 180 grados, valor de dos rectos.

V.

Núm. 86. Luego si un triángulo tiene dos ángulos iguales á dos de otro triángulo, el tercer ángulo será tambien igual al tercero del otro.

Núm. 87. Si se prolongase un lado de cualquier triángulo (Fig. 69), este ángulo que se continuase

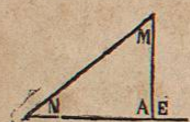

Fig. 69.

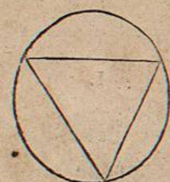
Fig. 70.

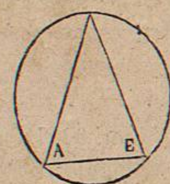

Fig. 71.

haria un nuevo ángulo con el lado AM, y se llama ángulo esterno.

Este ángulo A, que junto con E vale dos rectos (núm. 11), tambien junto con NM vale dos rectos, por lo que se acaba de decir; y así tanto vale el ángulo E solo como el M y el N juntos.

Núm. 88. Luego el ángulo esterno de cualquiera triángulo es igual á los dos internos opuestos.

Esta misma verdad de que los tres ángulos de cualquiera triángulo rectilíneo son iguales á dos rectos, se conoce tirando por los tres ángulos un círculo (Fig, 70); porque entonces por estar los tres ángulos en la circunferencia, cada uno tiene por medida la mitad de su arco, y por consiguiente entre todos tres la mitad del círculo, la que es la medida de dos rectos. De aquí se sacan otras consecuencias.

I.

En el triángulo equilátero los tres lados (Fig. 70) son tres cuerdas iguales que sostienen arcos iguales (núm. 6); por consiguiente siendo las mitades de estos iguales, dan á los tres ángulos opuestos medidas iguales.

Núm. 89. Luego todo triángulo equilátero es equiángulo.

II.

Por la misma razon, si los tres ángulos de un triángulo son iguales tendrán medidas iguales, y los arcos opuestos serán iguales, lo cual pide cuerdas ó lados iguales (núm. 5).

Núm. 90. Luego todo triángulo equiángulo es equilátero.

III.

Haciéndose la misma operacion en el triángulo isósceles (Fig. 71), se ve que los dos lados iguales piden dos arcos iguales, los cuales dan iguales medidas á los ángulos opuestos.

Y del mismo modo si dos ángulos AE son iguales, deben tener medida igual en los arcos opuestos; y estos por ser iguales piden cuerpos ó lados iguales (núm. 5).

Núm. 91. Luego todo triángulo isósceles tiene dos ángulos iguales.

Núm. 92. Luego todo triángulo que tiene dos ángulos iguales será isósceles.

IV.

Al triángulo escaleno (Fig. 72) por tener todos los

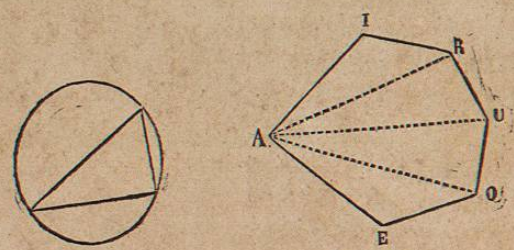

Fig. 72. Fig. 73.

lados desiguales, y por ser los lados cuerdas, forzosamente han de corresponder arcos desiguales; y por consiguiente la medida de los ángulos opuestos ha de ser desigual.

Núm. 93. Luego el triángulo escaleno tiene todos los ángulos desiguales, y todo triángulo que tenga los tres ángulos desiguales será escaleno.

V.

Núm. 94. Luego en el triángulo escaleno (por la misma razon) el mayor ángulo debe estar opuesto al mayor lado, y el ángulo menor al menor lado.

§ IV.

De la medida de los ángulos en los polígonos.

Llamamos polígono toda figura terminada por mas

de cuatro líneas rectas; pero como ya sabemos valuar los ángulos de los triángulos, bastará dividir los polígonos en triángulos (Fig. 73), tirando varias líneas de un ángulo hácia los otros; y de este modo medidos los ángulos de los triángulos quedarán medidos los del polígono.

En esta division sucede necesariamente que las líneas tiradas de A á los dos ángulos próximos coinciden con los dos lados inmediatos del polígono; por consiguiente hay dos líneas inútiles que no dividen el polígono en triángulos.

Considerando, pues, todos los triángulos con los vértices en el punto A, de donde salieron las líneas de division vemos, que todos los lados del polígono son bases de triángulos, escepto los dos lados AE, AI, que son los lados inmediatos.

Núm. 95. Luego en el polígono dividido habrá tantos triángulos cuantos fueren los lados, suprimiendo primero dos lados que no entran en cuenta.

Núm. 96. Luego en los polígonos habrá el valor de tantos rectos cuanto es el duplo de sus lados, habiendo suprimido dos de estos lados; ó de otro modo: en el polígono hay el valor de tantos rectos cuanto es el duplo de los lados menos cuatro rectos.

Luego en el pentágono, que es el polígono de cinco lados, se hallará el valor de seis rectos; porque quitando dos lados de los cinco quedan tres, y el duplo de estos es seis. En el exágono ó de seis lados habrá el valor de ocho rectos; en el eptágono ó de siete lados habrá el valor de diez; el octógono ó de ocho lados tendrá el valor de doce; el decágono de diez lados el de diez y seis; el dodecágono de doce lados tendrá valor de veinte rectos, etc,

Sabido el valor de la suma de los ángulos internos, de los polígonos, esto es, los ángulos que se forman dentro de ellos, conviene saber valuar la suma de los ángulos esternos, ó de los ángulos que habria si se continuasen todos los lados hácia fuera y hácia la misma parte como en la (Fig. 74).

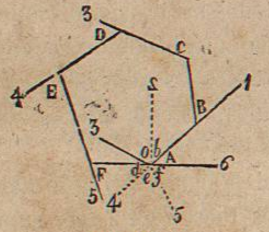

Fig. 74.

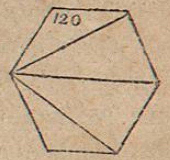

Fig. 75.

Para esto tómese cualquiera de los ángulos, v. g. A, y en su vértice por medio de las paralelas á los demas lados formemos ángulos iguales á todos los ángulos esternos; de suerte que *b* quedará igual á B, porque la línea *b*2 será paralela á B2, y por la misma razon el ángulo *c* es igual á C, y así de los demas, por razon de estar todos hechos por paralelas (núm. 45). Pero sabemos por el núm. 12 que los ángulos formados alrededor de un punto tienen el valor de cuatro rectos.

Núm. 97. Luego todos los ángulos esternos de un polígono, sea el que fuere, valen cuatro rectos.

Núm. 98. En los polígonos regulares, esto es (Fig. 75), en los que tienen todos los lados iguales y los ángulos iguales es muy facil valuar, no solamente la suma de todos los ángulos internos, como lo hemos hecho (núm. 96), sino tambien valuar á cada uno de ellos, solo con repartir la suma por el número de los ocho ángulos. De este modo se ve que el exágono tiene ángulos de 120 grados cada uno, porque la suma de ocho rectos ó 720 grados se reparte entre los seis ángulos, en el pentágono tenemos seis ángulos de 108, etc.

Núm. 99. Tomemos ahora un exágono regular, ó que en todos sus ángulos y lados sea igual y semejante: describamos un círculo que pase por los tres ángulos *aei* (Fig. 76) por el método que enseñé (núm. 62), y se hallará por centro el punto T: si se repitiere la operacion respecto de los ángulos *eio*, y de los demas sucesivamente, se hallará el mismo punto T por centro, porque cortando la perpendicular *m*T en T por la perpendicular al lado *ae*, tambien se verá cortada allí mismo por la otra perpendicular al lado *io* por ser igual á *ae*, y tan inclinada como ella *a*, *e*, *i*, si es perfecta la regularidad del polígono. Luego el círculo descrito desde el punto T no solamente pasará por *aei*, sino tambien por *ovs*.

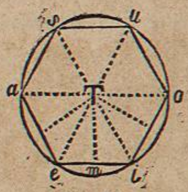

Fig. 76.

Núm. 100. Tiremos ahora desde el centro líneas á todos los ángulos (Fig. 77): los ángulos del centro todos serán de 60 grados para componer juntos el valor de 360 : los ángulos de la circunferencia

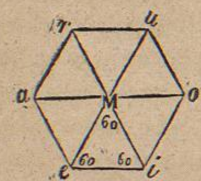

Fig. 77.

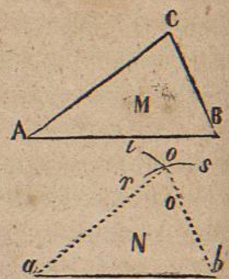

Fig. 78.

antes de ser divididos eran de 120, y ahora quedarán de 60. Luego el triángulo *eMi* es equiángulo. Lo mismo se dice de los otros triángulos, y todos los rayos M*a*, M*e*, M*i*, etc., serán iguales á los lados (núm. 90). Esto supuesto :

Núm. 101. Este círculo será formado de seis arcos, y la circunferencia del polígono es compuesta de seis cuerdas que sostienen esos arcos; y como cada uno de ellos es mayor que su cuerda, los seis arcos ó la circunferencia del círculo será mayor que los seis lados que hacen el circuito del polígono; pero estos seis lados son iguales á los seis rayos (núm. 100) ó á tres diámetros.

Núm. 102. Luego la circunferencia del círculo es mayor que tres diámetros de este, esto es, que si el diámetro vale siete la circunferencia ha de valer mas de 21.

Núm. 103. Hasta hoy no se ha hallado geométricamente la proporcion que tiene la circunferencia del círculo con su diámetro; en esto consiste la

grande dificultad de la cuadratura del círculo, ó de reducirle al espacio de un cuadrado perfectamente igual : no obstante, Arquimedes halló que el diámetro comparado con la circunferencia era como siete á casi 22, bien que algo menos que 22. De esta proporcion se sirven comunmente los geómetras, despreciando como muy leve el yerro que hay en ella ; y aunque haya otros números que se acerquen con mas exactitud á la razon que hay entre el diámetro y la circunferencia, usaremos de estos de Arquimedes por ser mas sencillos.

§ V.

Modo de formar triángulos ó polígonos iguales á los que nos dieren.

Núm. 104. Dado un triángulo A, B, C (Fig. 78), si nos pidieren otro triángulo igual y semejante le podemos hacer por varios modos : los mas comunes son tres :

Núm. 105. 1º Midiendo los tres lados.

2º Midiendo dos lados y el ángulo incluso.

3º Midiendo un lado y los dos ángulos adyacentes.

Primer modo. — Midiendo los tres lados.

Núm. 106. Pondré una base *ab* igual á AB (Fig. 78) : tomaré despues con el compas la distancia AC, y describiré un arco desde el punto *a* como centro; y últimamente tomando con el compas la otra línea