increiblemente su inteligencia. Pienso que tendrás presentes las nociones algebráicas que contienen mis cartas precedentes; mas, si por mala esposicion de mi parte ú otra causa cualquiera, no te hubieses penetrado de ciertos principios, no vaciles en avisarmelo para que te dé nuevas ilustraciones sobre el punto en cuestion.

CARTA DÉCIMASÉPTIMA.

DE LAS RAZONES Y PROPORCIONES.

§ I.

De la razon en general.

Amigo Eugenio, si bien, tratando de la aritmética, dejé esplicada la teoría de las razones y proporciones, pienso no obstante, á trueque de ser molesto, tratar de nuevo y mas difusamente este asunto, porque, siendo tanta su aplicacion á la geometría, es una llave precisa para entrar en mil gabinetes de verdades lindísimas, Empecemos, pues, que tal vez con el gusto no te parecerá enfadosa, y saltarás de contento al ver en las cartas siguientes las utilidades que esta trae.

Cuando comparamos entre sí dos cantidades del mismo género, v. g. 6 con 4 ó con 3 para saber su respectiva grandeza decimos que estan en esta ó aquella razon.

En esta comparacion la cantidad que se pone en primer lugar se llama *antecedente*, la segunda *consiguiente*; y ambas se llaman términos de la comparacion ó de la razon.

De dos modos se pueden comparar las cantidades; ó bien observando el esceso de una respecto de la otra, y esta diferencia ó esceso se llama *razon aritmética*; de este modo entre 8 y 5 la razon aritmética es 3.

O tambien podemos reparar en el número de veces que una cantidad contiene á la otra, y este número de veces se llama *razon geométrica*; y por eso entre 12 y 4 la razon es 3, porque el antecedente 12 contiene tres veces á su consiguiente 4.

Cuando el antecedente ó el primer término es mayor que el consiguiente, le contiene mas de una vez, como si digo 6:3, cuya razon es 2; ó 6:4, cuya razon es $1\frac{1}{2}$, que quiere decir uno y medio, ó si yo digo 11:3, cuya razon es tres y dos tercios, y se escribe así $3\frac{2}{3}$, porque el antecedente 11 contiene tres veces á tres, que hacen 9, y ademas de esto contiene dos unidades que son dos tercios de 3, que era el consiguiente.

Cuando el antecedente, pues, es igual al consiguiente solo le contiene una vez como 6:6, cuya razon es 1.

Pero cuando el antecedente es menor que el consiguiente, v. g. cuando digo 3:6 la razon es menos que uno, y es un quebrado ó fraccion, esto es, parte de 1; y en este ejemplo de 3:6 la razon es la mitad de uno, y se espresa $\frac{1}{2}$; y en este de 2:8 la razon es $\frac{1}{4}$, porque le contiene la cuarta parte de una vez.

§ II.

De la proporcion en comun.

Cuándo habiendo comparado dos cantidades *homogéneas*, esto es, del mismo género, hallamos la razon que hay entre ellas, y despues comparando entre sí otras dos cantidades hallamos entre ellas otra razon; si esta es igual, decimos que estos cuatro términos estan en proporcion; y así generalmente se dice que

Núm. 113. Proporcion es igualdad de razones de un mismo género: v. g., si entre 6 y 3 hay razon dupla, y entre 8 y 4 hay tambien razon dupla, decimos que estos cuatro términos estan en proporcion, y se escribe así: 6:3::8:4, que quiere decir la razon de 6 y 3 es igual á la razon de 8 respecto de 4.

Pero así como toda razon pide dos términos, la proporcion que envuelve dos razones pide cuatro, esto es, dos antecedentes y dos consiguientes.

No obstante, sucede tal vez que el mismo término puede ocupar dos lugares, y ser consiguiente para el primero, y antecedente para el tercero: v. g., si se dijere 12 es á 6 como 6 es á 3, se escribe así ∺12:6:3: y esto se llama proporcion continua; y cuando hay cuatro términos distintos se llama proporcion discreta, como esta 12:6::8:4.

Pero como hay dos especies de *razon* tambien debe haber dos especies de *proporcion* como despues diremos.

§ III.

De la razon aritmética.

Ya hemos dicho que el esceso ó diferencia que hay entre dos cantidades del mismo género se llama *razon aritmética.*

Núm. 116. El modo de conocer esta diferencia es sacar ó quitar una cantidad de otra, y el resto es la razon aritmética que se buscaba; v. g., 6 y 4 la razon es 2, porque si de 6 se quitan 4 quedan 2, lo que se escribe así $6-4=2$, comunmente se espresa esta razon aritmética poniendo un punto entre las dos cantidades de este modo 6.4, y se lee 6 4. Otro ejemplo (Fig. 83). Las líneas B y A son de-

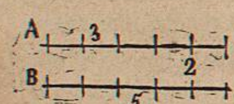

Fig. 83.

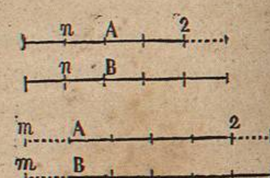

Fig. 84.

siguales, el esceso de una sobre la otra vale v. g. dos palmos; podemos, pues, decir $B-2=A$, y este esceso 2 es la razon aritmética entre B y A.

De esta simple nocion se deducen varias propie-

dades de la razon aritmética, las que esplicaré á mi modo: ten paciencia, Eugenio.

Por ser la razon aritmética, la diferencia que se halla entre dos cantidades, si esta diferencia desaparece, ó porque se añade á la que era mayor, ó porque se quita á la que era menor, las dos cantidades quedarán iguales, v. g. entre 5 y 3 la diferencia es 2, luego si añadimos 2 á 3 quedará igual á 5, y si quitamos 2 á 5 quedará igual á 3.

Ve aquí las varias propiedades:

I.

Núm. 117. Luego la razon aritmética, si se quita de la cantidad mayor la deja igual á la menor, y si se añade á la menor la deja igual á la mayor. V. g. la razon de 5 á 2 es 3. Luego $5-3=2$ y $3+2=5$. Del mismo modo (Fig. 83), $A+2=B$ y $B-2=A$.

Pasemos adelante: si puesta una razon entre dos términos añadimos ó quitamos á los dos la misma cantidad, quedarán ambos con la diferencia y desigualdad que tenian; porque ni en lo que se aumentó ni en lo que se quitó se produce diferencia alguna, v. g. en 8 y 6 la diferencia es 2: supongamos, pues, que se añade á ambos el valor de 3, quedarán 11 y 9, cuya diferencia es el mismo 2: supongamos por el contrario que quitamos de los dos 3, quedarán 5 y 3, y la diferencia será tambien 2. Lo mismo sucede en las líneas (Fig. 84) entre A y B la razon aritmética es 2: luego si de ambas líneas quitamos n, quedará la diferencia 2, y si á ambas añadimos n, la diferencia siempre será 2.

II.

Núm. 118. Luego si á ambas añadimos ó quitamos porcion igual, conservarán entre sí la misma razon aritmética.

Supuesto lo que queda dicho, esto es, que en la diferencia ó esceso de una cantidad respecto de otra consiste la razon aritmética, digo ahora que esta diferencia consiste en que una cantidad tiene lo que la otra no tiene, y así aumentar en la una ó quitar en la otra hará el mismo efecto para la diferencia entre ambas, v. g. entre 6 y 9 la diferencia es 3; pero si yo aumento 2 á un término, haré el mismo efecto que si quitase 2 del otro: si quito 2 de 6 quedan 4, y para 9 faltan 5; pero tambien si yo aumento 2 al 9 quedarán 11, y la diferencia de 11 á 6 es 5.

III.

Núm. 119. Luego para la razon aritmética tanto importa añadir una cantidad á un término como quitarla del otro.

§ IV.

Proporcion aritmética.

Ya dijimos que la igualdad de razones del mismo género hacian la proporcion de ese mismo género.

Núm. 120. Luego proporcion aritmética es la igualdad de dos razones aritméticas. V. g., entre estos cuatro términos 3 y 5, y 4 y 6; porque en ambas comparaciones la diferencia ó razon es 2.

Esprésase esta proporcion así: 3. 5 ⁚ 4. 6, ó poniendo el ejemplo en líneas, comparando A con B (Fig. 85) y C con D, lo que se escribe así: A. B ⁚ C. D.

Núm. 121. Cuando tres términos se disponen de modo que el primero escede al segundo tanto cuanto el segundo escede al tercero, se llama proporcion aritmética continua, como queda dicho, y se espresa así: 9. 7 ⁚ 7. 5, ó así: ÷ 9. 7. 5. Y se lee 9 á 7, como 7 á 5.

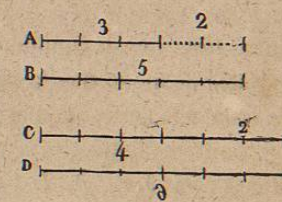

Fig. 85.

De esta nocion se sacan varias propiedades.

I.

La suma de los estremos es igual á la suma de los medios: v. g., si 3. 5 ⁚ 4. 6, podemos decir 3+6=5+4, que hacen 9. En líneas A. B : C D podemos decir A+D=B+C (Fig. 85).

Porque hecha la suma de los medios 5+4 tenemos 9; pero si en lugar de 5, que es término medio, ponemos 3, que es su estremo, y en el valor es 2 menos, quedará esta suma con dos de menos, y reducida á 7: pero si tambien trocásemos el otro medio 4, y pusiéremos su estremo 6, que tiene dos de mas, entonces quedará esa suma con 2 de mas, y de 7 pasará á 9, compensándose una diferencia en mas con otra en menos; y así $5+4=9$, y tambien $3+6=9$.

Núm. 122. Luego en toda proporcion aritmética la suma de los estremos es igual á la de los medios.

II.

Núm. 123. Luego cuando cuatro términos estan dispuestos de modo que la suma de los estremos se halle igual á la de los medios, es señal de que estan en proporcion aritmética: v. g., si $9+2=5+6$, podemos decir 9. 6 : 5. 2.

Porque la igualdad de las sumas es señal de que el primer estremo escede tanto á su medio, como el último estremo es escedido por el suyo, pues de lo contrario no se podia compensar el esceso del uno con la falta del otro.

III.

En la proporcion continua, v. g. 9. 7. 5, un término ocupa el lugar de dos, pudiendo decirse 9. 7 : 7. 5, y entonces $9+5=7+7$. Luego si el término medio repetido es igual á la suma de los estremos, no repetido será la mitad de esa misma suma.

Núm. 124. Luego en la proporcion continua aritmética la suma de los estremos es dupla del término medio.

IV.

Núm 125. Cuando tres términos estan dispuestos

de modo que la suma de los estremos es dupla del término medio, estan en proporcion continua, v. g., si $12+4$ es duplo de 8, puedo decir ÷12. 8. 4, porque en este caso, repitiendo el término medio, quedará igual á la suma de los estremos, lo que es señal, como está dicho, de que estan los términos en proporcion aritmética.

V.

Núm. 136. Dados tres términos de una proporcion aritmética es facil hallar el cuarto; porque haciendo la suma del segundo y tercero, y sacando de ella el primer término, el resto será el cuarto, porque este resto junto con el primero debe ser igual á la suma de los medios, y así quedarán en proporcion por el núm. 223.

Del mismo modo dados cualesquiera tres términos de una proporcion se puede hallar el que falta: v. g., si falta el segundo, hecha la suma de los estremos, y quitando de ella el tercero, tendremos el segundo, etc.

§ V.

De la razon geométrica.

Ya dijimos que el número de veces que una cantidad comprende á otra se llama razon geométrica, v. g., entre 6 y 2 la razon geométrica es 3, y en líneas (Fig. 86) entre B y A la razon geométrica es 3, porque B contiene tres veces A. Debe advertirse que cuando se dice razon absolutamente se entiende la geométrica.

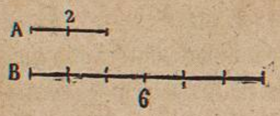

Fig. 86.

Núm. 127. Se conoce la razon que hay entre dos cantidades dividiendo el antecedente por el consiguiente, v. g. 6 por 2 : el cociente 3 que sale en la division manifiesta la razon que hay entre los dos términos : este número que sale en el cociente en la division se llama tambien *esponente*.

Esta razon se espresa de varios modos, ó bien poniendo dos puntos entre las dos cantidades, diciendo 6 : 2, ó bien poniendo los números con la señal de division, diciendo $\frac{6}{2}$.

Núm. 128. Siempre el antecedente se ha de dividir por el consiguiente ; y si le contiene dos veces la razon es *dupla*, si tres la razon es *triple*, si cuatro *cuadrupla*, etc. ; y así $\frac{6}{2}$ igual 3, ó (Fig. 86) $\frac{B}{A}=$ 3, porque el antecedente dividido por el consiguiente 2 da 3 á cada uno, porque le contiene tres veces, porque la línea B contiene la línea A tres veces.

Si por el contrario el antecedente fuere menor que el consiguiente, como si decimos 3 : 6, ó 3 : 9, ó 3 : 12, de tal suerte que el consiguiente contenga al antecedente dos, tres ó cuatro veces, la razon será subdupla, subtriple y subcuadrupla, y se pueden espresar así : $\frac{3}{6}$, $\frac{3}{9}$, $\frac{3}{12}$, y quiere decir que la razon es tres sestas partes, ó tres nonas partes, ó tres duo-

décimas partes ; de suerte que siempre ha de ser un quebrado ó fraccion.

En la aritmética se enseña que los quebrados se espresan con dos números, uno sobre la rayita, este se llama *numerador*, otro debajo de ella, este se llama *denominador* ; v. g., para decir tres cuartos se escribe así $\frac{3}{4}$: el de encima dice cuantos quebrados son, el de abajo qué especie de quebrados es, á saber : si son tercios, cuartos, quintos, etc.

Núm. 129. Dijimos al número 127 que la razon geométrica se espresaba en dos números puestos con la señal de division, v. g. el 6 y 3 colocados de este modo $\frac{6}{3}$. De aquí se sigue que en todos los casos el antecedente se puede tomar como *numerador*, y el consiguiente como *denominador ;* de suerte que en la espresion $\frac{6}{3}$, ó 6 comparados con 3, podemos decir seis tercios ; y la razon de 12 respecto de 7 es de 12 sétimos $\frac{12}{7}$, etc. Esto facilita mucho para conocer la razon entre cualesquiera números.

Núm. 130. Cuando la razon entre las cantidades se puede esplicar por números, bien sean enteros ó quebrados, se llama *racional ;* pero cuando no se puede esplicar por números algunos, v. g. el lado del cuadrado y su diagonal, ó el número 1, la raiz cuadrada del número 2, entonces esta razon se llama *surda* ó irracional.

Las cantidades que tienen entre sí razon de número á número son conmensurables ; las que tienen razon surda son inconmensurables por no haber medida comun que las pueda medir.

Tambien es preciso esplicar estas dos voces, partes *alicuotas* y *alicuantas* : las alicuotas son aquellas que multiplicadas cierto número de veces agotan el todo exactamente, como son palmos respecto de la vara : las alicuantas son las que nunca ajustan con el todo, como el codo respecto de una vara, porque esta no contiene un número de codos exactamente.

§ VI.

Propiedades de la razon geométrica.

Hemos dicho que la razon geométrica se conocia dividiendo una cantidad por otra, y que el cuociente espresaba la razon, v. g. $\frac{6}{3}=2$.

De esta nocion se sacan varias propiedades.

I.

Núm. 151. El consiguiente multiplicado por la razon es igual al antecedente : v. g., si yo digo $\frac{6}{3}=2$, diré luego $2\times3=6$, porque la multiplicacion vuelve á hacer lo que la division deshizo, y pone la cantidad en los términos en que estaba antes de dividida; y así vemos que por la multiplicacion se prueba si está bien hecha la division. Vaya otro ejemplo para cuando el antecedente fuere menor que el consiguiente : si decimos 3 : 6, ó $\frac{3}{6}$, la razon es $\frac{1}{2}$; pero el consiguiente 6 multiplicado por $\frac{1}{2}$ es igual al antecedente 3, ó seis medios $=3$.

II.

Los dos términos de una razon multiplicada por

una cantidad conservan la misma razon en que estaban : v. g., si 12 y 6 estan en razon dupla, y se multiplican por 3, siempre quedarán en razon dupla : así $12\times3=36$, y $6\times3=18$, que tambien estan en la misma razon dupla. Otro ejemplo (Fig. 87) : si D y B estan en razon dupla, multiplicando ambos por 3 quedarán en la misma razon; y así N y M estan en razon dupla.

Fig. 87.

Por cuanto si un antecedente, v. g. D, contiene dos veces á su consiguiente B, juntando otro antecedente igual á D, este nuevo antecedente comprenderá tambien otras dos veces á su consiguiente igual á B, y lo mismo será con todos los demas antecedentes iguales que fuéremos añadiendo respecto de sus consiguientes que les fuéremos uniendo : cada antecedente D llevará en sí el valor de dos consiguientes iguales á B. Luego tomando el antecedente primitivo D tres veces, y tomando otras tantas su consiguiente primitivo B, el valor de todos los antecedentes juntos N será duplo del valor de los consiguientes juntos M; pero tomar los términos tres ó cuatro veces, etc., es lo mismo que multiplicarlos por 3 ó por 4, etc.

Núm. 152. Luego la multiplicacion de dos términos por una misma cantidad los deja en la misma razon que ellos tenian.

III.

La division de dos términos por la misma cantidad los deja en la misma razon que ellos tenian. V. g., si 12 y 6 están en razon dupla, síguese que $\frac{12}{3}$ y $\frac{6}{3}$ están en la misma razon. Pongamos otro ejemplo (Fig. 88) : los dos espacios representados por Q y P están en razon dupla. Q consta de seis espacios, como el de A y P solo consta de tres : dividamos ahora á P y á Q por 3, y tendremos en P una A, y en Q dos; y así se ve otra vez la razon dupla.

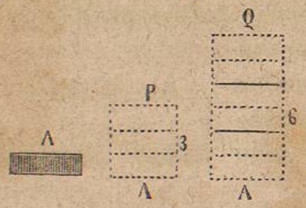

Fig. 88.

La razon de esto es porque dividido el valor del antecedente Q en tres partes iguales, y tambien el del consiguiente P, si un tercio del antecedente no contiene dos veces al tercio del consiguiente, ninguna de las otras partes iguales á la primera las contendrá dos veces. Luego todas las partes del antecedente juntas, ó el antecedente entero Q, no podrá contener dos veces las partes juntas del consiguiente entero P, como se suponia.

Núm. 153. Luego si dos términos se dividen por una misma cantidad deben conservar la misma razon que tenian. Adviértase que cuando dos cantidades se dividen igualmente por otra, las partes de estas se llaman proporcionales.

Núm. 154. Luego la misma razon que se hallare entre dos términos se hallará tambien entre sus partes proporcionales, esto es, entre sus mitades y entre sus tercios ó sus cuartos, etc.

IV.

Establecimos arriba que dos cantidades multiplicadas por una se quedaban en la misma razon que tenian (núm. 152); pero multiplicar dos cantidades por una ó una por dos es lo mismo.

Núm. 155. Luego cuando una cantidad se multiplica por dos se quedará en la misma razon que ellas tenian. V. g. A (Fig. 88) multiplicada, bien sea por 6 ó bien por 3, que están en razon dupla, hará que resulten los dos espacios Q y P, que están tambien en la misma razon dupla.

V.

Tambien dijimos arriba que dos cantidades divididas por una se quedaban en la misma razon que tenian antes de dividirse.

Núm. 156. Luego una cantidad dividida por dos queda en la razon de estas, pero inversa, esto es, si el divisor es duplo ó triple, etc., el cuociente es subduplo, subtriple, etc. : v. g. $\frac{24}{6}=4$; $\frac{24}{3}=8$; pero 4, 8 tienen razon subdupla, y los divisores 6 : 3 estaban en razon dupla. Pongamos otro ejemplo (Fig. 88) : el espacio Q dividido en seis partes queda con el valor de A, y dividido en tres partes, queda con el valor duplo de A. Luego cuando el divisor es subduplo el cuociente es duplo.

La razon de todo esto es, porque un mismo valor del dividendo Q repartido por mas partes, da menos valor á cada una de ellas. Luego en la misma razon que se aumentare el número de las partes ó creciere el divisor, se ha de disminuir el valor de cada una de ellas, ó será menor el cuociente.

VI.

Ya en el núm. 154 quedó establecido que las partes proporcionales de dos cantidades estaban en la misma razon que las cantidades tenian antes de dividirse.

Núm. 157. Luego si aumentaremos los dos términos con alguna parte proporcional, ó la quitamos de ellos, quedarán en la misma razon que antes tenian. V. g. 12 : 6 tienen la razon dupla, aumentemos en 12 su tercio, y en 6 el suyo, tendremos $12+4=16$, y en el consiguiente tendremos $6+2=8$; pues 16 y 8 tambien están en razon dupla. Del mismo modo, si de ambos términos quitamos una parte proporcional, v. g. un $\frac{1}{3}$, quedarán en la misma razon dupla; y así $12-4=8$, y $6-2=4$ quedan 8 : 4, que están en razon dupla.

La razon es, para que un antecedente contenga v. g. dos veces á su consiguiente, es preciso que cada parte proporcional del antecedente contenga dos veces á la que la corresponde en el consiguiente (núm. 155). Luego si acrecentásemos á ambos la tercera parte v. g., esta nueva parte del consiguiente se hallará inclusa dos veces en la que se aumentó al antecedente, y de este modo quedarán estos dos términos en la razon dupla en que se estaban.

Del mismo modo sucede en la division; si sacamos de ambos términos $\frac{1}{3}$ ú otra cualquiera parte proporcional, las que restaren así en uno como en otro se comprenderán dos veces, como sucedia en el antecedente y consiguiente. Por eso dijimos que aumentar ó quitar de dos términos una parte proporcional los deja en la misma razon que antes tenian.

VII.

Núm. 158. En la razon geométrica la misma mutacion causa el multiplicar un término por una cantidad que dividir por ella el otro término. V. g. en 24 y 6 la razon es cuadrupla; digo, pues, si yo conservo el consiguiente, y divido el antecedente por 3, diciendo $\frac{24}{3}$: 6, el cuociente $1\frac{1}{3}$, porque $\frac{24}{3}=8$; y $8 : 6=1\frac{1}{3}$; pero esto mismo sucederá si yo conservare el antecedente 24, y solo multiplicase el consiguiente por 3, diciendo : $24 : 6\times3$; pues $6\times3=18$, ya se ve que en 24 : 18 el cuociente es $1\frac{1}{3}$.

La razon es, porque el que el antecedente comprenda en sí al consiguiente mas ó menos veces, depende tanto de la grandeza del antecedente como de la pequeñez del consiguiente: luego lo mismo será disminuir el antecedente, partiéndole por un término, v. g. 3, como aumentar el consiguiente multiplicándole por él; como al contrario, lo mismo será aumentar el valor del antecedente multiplicándole por 2 v.g., que disminuir el consiguiente partiéndole por 2.