## § VII.

### De la proporcion geométrica.

Núm. 139. Proporcion geométrica es la igualdad de dos razones geométricas. V. g. entre 6 y 3 la razon es 2, entre 8 y 4 la razon es 2; entonces, pues, diremos que estos cuatro términos están en proporcion, lo que se espresa así, 6:3::8:4, ó así $\frac{6}{3}=\frac{8}{4}$, diré: 6 á 3 como 8 á 4.

Núm. 140. Cuando la proporcion geométrica consta de tres términos, en tal forma que el primero sea respecto del segundo, como el segundo es respecto del tercero, se llama continua, como ya se dijo, y se escribe así 12:6::6:3, ó de este modo ∺12:6:3.

De esta nocion se siguen varias propiedades.

I.

Puesta cualquiera porcion geométrica, v. g. la de 6:3::8:4, conviene examinar si el producto de los estremos es igual al de los medios, v. g. si 6×4 es =3×8.

Saquemos primeramente el producto de los medios 3×8=24 : si en lugar del medio 3 pusiéremos su estremo 6, que es duplo, el producto sube á ser duplo, y en lugar de 24 dará 48 (núm. 135) : para remediar esto trocamos tambien el otro medio 8 por su estremo 4, que es subduplo ; y en este caso



baja el producto de 48 á 24 (núm. 135); pero si de 48 baja á 24 se corrige en un trueque la desigualdad que hizo el otro, por ser las razones iguales.

Núm. 141. Luego en toda proporcion geométrica el producto de los estremos es igual al producto de los medios.

II.

Cuando cuatro términos están dispuestos de modo que el producto de los estremos sea igual al de los medios, están en proporcion geométrica, v. g., si 6×4=3×8, se sigue que 6:3::8:4.

Porque hecho el producto de los medios 3 por 8=24, si yo trueco el medio 3 por su estremo duplo 6, sube el valor á ser duplo de lo que antes era, y de 24 pasa á 48. Ahora bien, si el otro estremo 4 compensare con su disminucion respecto del 8 que es medio, el aumento que se hallaba en 6 respecto de 3 (lo que es preciso para la igualdad de los productos), es prueba de que tantas veces contiene 6 á su medio 3, como 4 es contenido en su medio 8.

Núm. 142. Luego si el producto de los medios es igual al de los estremos estarán los cuatro términos en proporcion.

Aquí advierto, que hacer el cuadrado de un número es multiplicarle por sí mismo, v. g. 3×3=9 es el cuadrado de 3; 5×5=25 es el cuadrado del número 5, y del mismo modo el cuadrado de 6 es 36, el cuadrado de 7 es 49, etc.

III.

La proporcion continua $\div 12:6:3$ se puede escribir repitiendo el término medio $12:6::6:3$. En este caso el producto de los medios, que es el cuadrado del término medio 6, es igual al producto de los estremos (núm. 141).

Núm. 143. Luego en la proporcion continua el producto de los estremos es igual al cuadrado del medio.

IV.

Cuando tres términos son tales que el producto de dos es igual al cuadrado de otro, se pueden disponer en proporcion continua : v. g. de $12\times3=6\times6$, podemos decir $\div 12:3:6$.

La razon es, porque en este caso poniendo como estremos los factores del producto, y repitiendo el término que se ha de multiplicar por sí mismo, para llenar los lugares de los medios quedan los términos en el caso del número precedente y en proporcion; pero entonces, suprimiendo una vez el término medio, quedará proporcion continua.

Núm. 144. Luego siempre que el producto de dos términos es igual al cuadrado de otro se podrán disponer en proporcion continua.

V.

Toda cantidad multiplicada por 1 queda en el mismo valor que tenia : luego si la unidad fuese estremo de una proporcion, el otro estremo solo será



igual al producto de los medios : v. g., si dijéremos $1:3::5:15$, ó al contrario $15:5::3:1$, el producto de los medios será igual á solo un estremo.

Núm. 145. Luego en toda multiplicacion podemos disponer una proporcion poniendo dos factores por medios, el producto por un estremo, y la unidad por otro.

VI.

Podemos considerar cualquier dividendo como un producto hecho por el divisor y cuociente como factores.

Núm. 146. Luego toda division nos da una proporcion si colocamos el divisor y el cuociente como medios, y el dividendo y la unidad como estremos. V. g. si $\frac{15}{3}=5$, podemos decir $15:3::1:5$, y tambien $1:3::5:15$, porque por la razon del número precedente el producto de los estremos es el dividendo : el cuociente y el divisor son factores.

VII.

Lo que llaman regla de tres consiste en hallar el cuarto término de una proporcion, dados los tres. Pero si el producto de los medios es igual al de los estremos, repartiendo el producto de los medios por el término primero, dará por cuociente el cuarto término de la proporcion.

Núm. 147. Luego teniendo tres términos de una proporcion podemos hallar el cuarto.

Núm. 148. Por el mismo método podemos hallar cualquiera de los dos términos. V. g. si faltaba el tercero, sacaremos el producto de los estremos, y la partiremos por el segundo, y dará por cuociente el tercero.

## § VIII.

De las mutaciones que se pueden hacer en los términos conservando la proporcion.

*Mutaciones de lugar solamente.* — De lo que dijimos arriba (núm. 142) se infiere, que toda mudanza, hecha en una proporcion que conserve la igualdad entre el producto de los medios y el de los estremos, conservará tambien la proporcion.

Núm. 149. Luego puesta cualquiera proporcion podemos hacer las mutaciones siguientes :

### I.

Trocar los medios entre sí, pues por esto no se muda el valor de su producto.

### II.

Trocar solos los estremos entre sí por la misma razon.

### III.

Hacer los estremos medios, y los medios estremos, lo cual no muda su valor; y esto da de sí muchas mutaciones.

De este modo puesta esta proporcion 6:3::8:4.

1. Podremos *trasponer*, esto es, poner primero los dos últimos términos, y en su lugar los que estaban antes, v. g. 8:4::6:3; porque los estremos se convierten en medios, y los medios en estremos.

2. Podemos *invertir*, esto es, hacer los antecedentes consiguientes, y los consiguientes antecedentes, diciendo. . . . . 3:6::4:8.

3. Podemos *alternar*, esto es, comparar los dos antecedentes entre sí, y entre sí tambien comparar los consiguientes 6:8::3:4; porque se truecan los lugares en los dos medios.

4. Podremos cambiar solos los estremos entre sí, lo que se llama *alternar*, *invertir* y *trasponer*, diciendo. . . . . 4:3::8:6.

5. Podemos tomar todos los cuatro términos al reves, lo que se llama *invertir* y *trasponer*, diciendo. . . . . . . . 4:8::3:6.



Pongamos otro ejemplo en líneas (Fig. 89). Si A:B::C:D, podemos hacer las mutaciones siguientes :

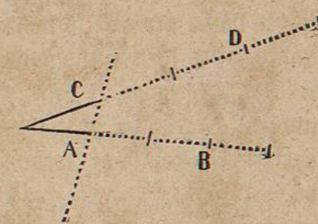


Fig. 89.

1. C:D::A:B. trasponiendo.
2. B:A::D:C. invirtiendo.
3. A:C::B:D. alternando.
4. D:B::C:A, y esto es alternando, invirtiendo y trasponiendo.
5. D:C::B:A, lo cual es invertir y trasponer.

Porque en todas estas mutaciones se halla que el producto de los medios es igual al de los estremos, que es una prueba de proporcion (núm. 142), Otras mutaciones se pueden hacer que se incluyen en estas, por las cuales se ve que si un medio se convierte en estremo, tambien el otro medio, lo que es preciso para que el producto de los estremos sea siempre igual al de los medios.

## § XI.

### De las mutaciones que se hacen componiendo ó dividiendo los términos.

Ademas de las mutaciones de lugar que hicimos de los términos, se pueden hacer algunas mas aumentando los unos con los otros, lo cual se llama *componer*, ó quitando el valor de unos del de los otros, lo que se llama *dividir*, ó mejor *disminuir*. Cuando se juntan, se forma una suma, cuando se quitan aparece la diferencia ; y estas sumas y diferencias tambien estarán en proporcion ; sobre lo cual hay varias proposiciones sacadas de lo que queda dicho.

Pero es preciso traer á la memoria lo que dijimos al núm. 157, que cuando aumentamos ó quitamos á dos cantidades sus partes proporcionales, quedan con la misma razon que antes tenian entre sí; pero los consiguientes de una proporcion son partes proporcionales de sus antecedentes.

Núm. 150. Luego puestos cuatro términos en proporcion, si á los antecedentes añadimos sus con-



siguientes, ó se los quitamos de su valor, quedarán en la misma razon que tenian entre sí. V. g. si decimos $A:B::C:D$, tambien podremos $A+B:C+D::A:C$, y asimismo $A-B:C-D::A:C$. Otro ejemplo en números : $12:6::8:4$, podemos decir $12+6:8+4::12:8$, ó bien $12-6:8-4::12:8$.

I.

En otros términos, la suma de los dos primeros términos es á la suma de los dos segundos, como el primer antecedente es al segundo, ó que dicen la misma proporcion.

II.

La diferencia de los dos primeros términos es á la diferencia de los dos segundos como el primer antecedente es al segundo.

III.

Núm. 151. Ahora bien, si las sumas entre sí y las diferencias entre sí son como un antecedente es al otro, las sumas entre sí y las diferencias entre sí vendrán á tener la misma razon, y podemos hacer esta proporcion : una suma es respecto de otra suma, como una diferencia es respecto de otra diferencia : v. g. si $12:6::8:4$ : luego $12+6:8+4::12-6:8-4$, ó bien si $A:B::C:D$ : luego $A+B:C+D::A-B:C-D$ ; y alternando esta tambien podemos decir : una suma respecto de su diferencia es como otra suma respecto de la suya. Y así $12+6:12-6::8+4:8-4$.

Núm. 152. Luego la suma de los primeros es á su diferencia, como la suma de los segundos es á la suya.

IV.

Núm. 153. Sentada esta doctrina, y la que dijimos de la alternacion, podemos sacar otras consecuencias, v. g. si dijimos :

$$12:6::8:4,$$

tambien podremos decir :

$$\begin{cases} 12+6:8+4::12:8. \\ 12+6:8+4::6:4. \end{cases}$$

Luego alternando la primera consecuencia, diremos :

$$12+6:12::8+4:8;$$

y alternando la segunda, diremos :

$$12+6:6::8+4:4.$$

Por la misma razon, si decimos :

$$A:B::C:D,$$

podremos inferir :

Luego $A+B:A::C+D:C$;

ó de otro modo :

$$A+B:B::C+D:D.$$

Núm. 154. Luego en cualquiera proporcion la suma de los dos primeros es á cualquiera de ellos, como la suma de los dos segundos al que le corresponde.



V.

Puesta la primitiva proporcion $12:6::8:4$, inferimos estas dos proporciones :

$$12-6:8-4::12:8.$$
$$12-6:8-4::6:4.$$

Luego alternando la primera, diremos :

$$12-6:12::8-4:8;$$

y alternando la segunda, diremos :

$$12-6:6::8-:4.$$

Núm. 155. Luego en cualquiera proporcion podemos decir : la diferencia de los primeros términos es á cualquiera de ellos, como la diferencia de los dos últimos respecto del que la corresponde.

Podemos alternar toda proporcion propuesta; y con esto haremos que los antecedentes sean términos primeros, y los consiguientes términos últimos.

VI.

Núm. 156. Todo cuanto hemos dicho de las sumas y diferencias de los primeros y últimos términos lo podemos decir de las sumas y diferencias de los antecedentes y de los consiguientes; de donde se deducen las siguientes proporciones nacidas de una proporcion dada, v. g. si

$$A:B::C:D.$$

Luego alternando será

$$A:C::B:D.$$

1. Luego combinando las sumas

$$A+C:B+D::A:B.$$

2. O bien

$$A+C:B+D::C:D.$$

3. Luego combinando las diferencias

$$A-C:B-D::A:B,$$

4. ó $$A-C:B-D::C:D.$$

5. Luego combinando sumas con diferencias

$$A+C:B+D::A-C:B+D.$$

6. Luego alternando

$$A+C:A-C::B+D:C-D.$$

*Ejemplo en números.*

Demos que sea la proporcion primitiva

$$12:4::9:3.$$

Luego alternando

$$12:9::4:3.$$

1. Luego combinando las sumas

$$12+9:4+3:12:4.$$

2. O bien

$$12+9:4-3+9:3.$$

3. Luego combinando las diferencias

$$12-9:4-3::9:3.$$

4. Luego combinando sumas con diferencias

$$12+9:4+3::12-9:4-3.$$



5. Luego alternando

$$12+9:12-9::4+3:4-3.$$

De aquí se prueban las proposiciones siguientes.

VII.

Núm. 157. Luego la suma de los antecedentes es á la suma de los consiguientes como un antecedente es á su consiguiente.

VIII.

Núm. 158. Luego la diferencia de los antecedentes es á la de los consiguientes como un antecedente es á su consiguiente.

IX.

Núm. 159. Luego la suma de los antecedentes es á su diferencia como la suma de los consiguientes es á la diferencia de estos.

Hasta aquí en estas seis proporciones, que son consecuencias de la proporcion primitiva, combinamos sumas con sumas, diferencias con diferencias, y sumas con diferencias. Ahora falta combinar las sumas de los antecedentes ó consiguientes, y sus diferencias con cada uno de ellos, y para esto bastará alternar las proporciones de arriba.

*Ejemplo.*

Sea la proporcion primitiva

$$A:B::C:D.$$

Luego alternando la primera consecuencia que pusimos arriba, núm. 156, diremos:

$$A+A:C::B+D:B;$$

y alternando la segunda diremos:

$$A+C:C::B+D:D;$$

y alternando la tercera, diremos:

$$A-C:A::B-D:B;$$

y alternando la cuarta, diremos:

$$A-C:C::B-D:D.$$

*Otro ejemplo en números.*

Sea la proporcion primitiva

$$12:4::9:3.$$

Luego alternando la primera consecuencia de arriba, diremos:

$$12+9:12::4+3:4.$$

alternando la segunda tendremos:

$$12+9:9::4+3:3.$$

alternando la tercera se dirá:

$$12-9:12:4-3:4.$$

y alternando la cuarta se dirá:

$$12-9:9::4-3:3.$$

De aquí se prueban las dos verdades siguientes:

X.

Núm. 160. La suma de los antecedentes es á cada



uno de ellos como la suma de los consiguientes es al que le corresponde.

XI.

Núm. 161. La diferencia de los antecedentes es para cada uno de ellos lo que la diferencia de los consiguientes para el que la corresponde.

## § X.

### De la razon compuesta.

Núm. 162. Sucede muchas veces, amigo Eugenio, que una cantidad escede á otra por muchos principios: v. g. una sala es mayor que un gabinete por ser mas larga, por ser mas ancha, y por ser mas alta: supongamos que tiene la longitud cuadrupla de la del gabinete, solo por este principio seria como $4:1$: supongamos tambien que la anchura es como tres á la del gabinete; ya solo por este principio debe ser como $3:1$; y combinando estas dos razones no hemos de juntar ó sumar una con otra, y $4+3=7$, sino multiplicar la una por la otra, y decir $4\times$ por $3=12$, siendo el 12 el esponente de esta razon compuesta.

Por cuanto si la anchura es triple podremos dividirla en tres iguales partes; y por haber en cada uno de estos tres tercios una longitud cuadrupla de la del gabinete, entrará en solo un tercio cuatro veces el gabinete, y otras tantas en cada uno de los otros dos tercios, lo que en todo compone 12; y así será preciso repetir doce veces el *area* ó el suelo del gabinete para llenar el area ó pavimento de la sala.

Ahora bien, si la altura de la sala fuere dupla, y la dividimos por medio con tablas, quedaria en la parte superior otro tanto vacío como en la parte inferior; esto es, se podian hacer otros doce gabinetes: volveremos, pues, á multiplicar por 2 (esponente de las alturas) el esponente compuesto del pavimento 12, y diremos que la sala es al gabinete como 24:1.

Núm. 163. Cuando el esponente de una razon es el producto de dos esponentes, la razon se llama compuesta de dos: cuando es producto de tres esponentes, la razon será compuesta de tres, etc.

Si las dos razones ó esponentes, que multiplicados dan una razon compuesta son iguales entre sí, v. g. 2×2, 3×3, 4×4, etc., entonces la razon compuesta se llama *duplicada*, y en el primer caso es duplicada de razon dupla, en el segundo *duplicada* de razon triple, en el tercero *duplicada* de razon cuadrupla, etc.

Del mismo modo si el esponente de la razon es el producto de tres esponentes iguales será esponente de una razon triplicada; y si los esponentes primitivos, v. g. de longitud, latitud y altura, fueren 2×=8, la razon será triplicada de razon dupla 3×3×3 igual, 27 será la razon triplicada de la razon triple; si fueren 4×4×4=64, la razon será triplicada de razon cuadrupla.

Aquí se ve la diferencia que hay entre la razon



dupla y la razon duplicada, entre la razon triple ó cuadrupla y la razon triplicada ó cuadruplicada. Las duplas, triples, cuadruplas se hacen añadiendo ó sumando unidades: las duplicadas, triplicadas, etc., se hacen multiplicando esponentes semejantes.

Tambien se advierte que cualquiera de las razones que componen la duplicada es subduplicada, las que componen la triplicada son subtriplicadas. Pongamos ahora dos proporciones.

10:5::4:2. (su esponente.. 2.
6:2::9:3. (su esponente.. 3.

Los esponentes son 2 y 3: multipliquemos ordenadamente los términos de una por los de la otra diciendo:

10×6, 5×2, 4×9, 2×3.

En los mismos productos resulta otra proporcion:

60:10::36:6,

cuyo esponente es 6, producto de los dos esponentes el 2 y el 3, por ser lo mismo multiplicar 10 por 6 que multiplicar dos veces 3 por tres veces 2; y en esto no solo multiplicamos los dos consiguientes 3 y 2, sino los dos esponentes, uno que dice *dos veces*, y otro que dice *tres veces*; y así el producto 60 no solo comprende á su consiguiente (10) las dos veces de la primera proporcion, sino las dos veces de esta primera proporcion multiplicadas por 3 de la segunda, que hacen 6. Ahora, pues, como en los otros dos términos de la proporcion 4×9 y 2×3 hay la misma razon, y en ellos se multiplica tambien el 4 *duplo* por 9 *triple*, el producto debe ser sestuplo, como vemos en 36 y 6; y así habiendo en ambas razones el mismo esponente quedan los cuatro términos en proporcion.

Núm. 164. Luego cuando se multiplican ordenadamente los términos de una proporcion por los de otra, los productos hacen tercera proporcion, y el esponente de esta es el producto de los esponentes primitivos.

Ahora, pues, si se multiplicaren los términos no solo de dos sino de muchas proporciones que tengan varios esponentes, v. g. 2, 3, 4, los productos, si la multiplicacion se hace por el orden en que se hallan antecedentes y consiguientes, harán una nueva proporcion, cuyo esponente será el producto de los tres esponentes primeros, esto es, $24=2\times3\times4$, porque aquí milita la razon que dimos para las dos razones combinadas; y las tres proporciones se pueden reducir á menos, combinando primero dos de ellas, y despues el producto de estas con el esponente de la tercera; y así lo haremos si fueren cuatro ó mas las proporciones dadas.

Luego cuando se multiplicaren ordenadamente los términos de muchas proporciones, los productos harán una nueva proporcion, cuyo esponente será el producto de todos los esponentes primitivos.

De aquí se sigue que si fueren solas dos las proporciones, y del mismo esponente, v. g. 2.

$$\begin{cases} 1:2::3:6. \\ 4:8::5:10. \end{cases}$$



los productos tendrán un esponente, que será 4 cuadrado del primero, y estarán en razon duplicada de la primera razon dupla; esto es, 4:16::15:60, cuyo esponente es 4, término cuadrado del esponente 2, que reinaba en las otras proporciones.

Y por la misma razon si juntaremos tres proporciones en que haya la misma razon, los productos tendrán por esponente un cubo del primero, ó el producto de tres razones iguales, y quedarán en razon triplicada de la primera.

Núm. 165. Luego puestos cualesquiera términos en proporcion 1:2::3:6, los cuadrados de estos 1:4::9:36, y sus cubos 1:8::27:216 tambien estarán en proporcion.

Porque entre cada antecedente y su consiguiente siempre se hallará razon igual, esto es, el producto de dos ó de tres razones iguales.

Núm. 166. Luego en la proporcion de los cuadrados el esponente será un cuadrado del esponente de la proporcion simple ó de la raiz, y en la proporcion de los cubos el esponente tambien será un cubo del esponente de la proporcion simple, por razon de que en la proporcion de los cuadrados el esponente es el producto de dos razones iguales; y en la de los cubos el esponente es el producto de tres razones iguales.

## § XI.

### De la proporcion recíproca.

La proporcion directa, que es la que hemos esplicado hasta aquí, se da cuando una cosa contiene á otra igualmente por dos circunstancias, v. g. si una puerta contiene á otra dos veces por la altura y dos veces por la latitud, entonces decimos que la altura mas grande es á la mas pequeña, como la latitud grande es á la longitud pequeña, creciendo siempre á proporcion tanto la longitud como la altura. Lo mismo decimos cuando una sala es seis veces mas ancha que un gabinete, como tambien seis veces mas larga.

Núm. 167. Cuando una cosa escede á otra, v. g. tres veces en una circunstancia, y es escedida de ella tambien tres veces en otra, estan en proporcion recíproca, v. g., cuando un campo es diez veces mas largo que otro, pero diez veces mas estrecho que el otro, escede en una dimension, pero igualmente es escedido en otra.

Pongamos otro ejemplo : cuando dos animales corren, y tanto mayor es la velocidad en el uno cuanto el tiempo preciso para andar una legua es menor que el del otro, decimos que entonces estan las velocidades en proporcion recíproca con los tiempos. Y la velocidad de un galgo v. g. es á la velocidad del hombre, como el tiempo que emplea el hombre es al tiempo que emplea el galgo.

Otro ejemplo : cuanto mayor es la tripulacion de una nave menos tiempo dura una determinada provision de alimentos, y decimos : la tripulacion de la nave grande es á la tripulacion de la pequeña como la duracion de las provisiones es en la nave pequeña respecto de la duracion de los alimentos en la grande.



En todos estos casos se ve que en la proporcion recíproca el segundo y tercero término pertenecen al mismo objeto, y el primero con el cuarto pertenecen al otro, v. g. en el ejemplo de las velocidades y tiempos, la velocidad del galgo es el primer término, y su tiempo que gasta es el cuarto; y la velocidad del hombre es el segundo término, y su tiempo el tercero, como se ve haciendo la proporcion; y para abreviar llamaremos á las velocidades V, á los tiempos T, al galgo G, y al hombre H.

VG:VH:TH:TG.

Y en esto está la diferencia de la proporcion directa, en que en la directa el primer término y el tercero pertenecen á un objeto, y el segundo con el cuarto á otro; pero en la recíproca el primero y el cuarto pertenecen á uno, y el segundo y tercero á otro.

Esta materia, amigo mio, es un poco cansada y oscura, pero es indispensable : si á la primera vez que lees esta carta no la comprendes bien, pasa adelante, ve leyendo las otras, y vuelve despues á leer en esta misma carta, que la irás entendiendo mejor : y créeme, amigo, que puse toda diligencia para tratar esta materia con la mayor facilidad posible : agradéceme la buena voluntad.