CARTA DÉCIMAOCTAVA.

DE LAS LINEAS PROPORCIONALES.

§ I.

Dividir las líneas en la proporcion pedida.

La doctrina, amigo Eugenio, que te dí acerca de la proporcion de los números se aplica fácilmente á las líneas, dividiéndolas en cierto número de partes iguales; y yo ahora tratando de las líneas proporcionales me iré fundando sobre lo que dije acerca de las razones y proporciones de los números.

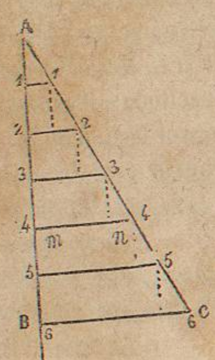

Fig. 90.

Núm. 168. Supongamos, pues, que nos dan una línea AC (Fig. 90), y que nos piden

que la dividamos en cierto número de partes iguales, v. g. seis; haremos lo siguiente.

I.

De una estremidad A, tiremos otra línea indefinida, como AB.

II.

Tomemos con el compas en esta línea indefinida AB varias porciones iguales, y del fin de la última porcion B tiremos una línea BC hasta la estremidad de la línea dada para dividir la AC.

III.

De todos los puntos que fué señalando el compas en AB tiremos paralelas á A, B, C.

IV.

De todos los puntos 1, 2, 3, que las paralelas van á tocar en AC, tiremos unas pequeñas líneas á AB. Hecho esto se infiere:

I.

Que estos triángulos pequeños tienen los lados de los puntitos iguales entre sí por ser iguales á las porciones que tomó el compas en la línea AB (núm. 114).

II.

Que estos triángulos tienen los ángulos correspondientes iguales entre sí por ser hechos por una línea que corta paralelas (núm. 45).

III.

Que en esta suposicion estos triángulos tienen un lado igual, y los ángulos adyacentes; y por esto (núm. 109), son iguales entre sí; y por consiguiente la línea AC está dividida en seis partes iguales, y del mismo modo que lo está la línea AB, aunque las partes de AC no son iguales á las de AB, así como las líneas totales no lo eran.

Núm. 169. Luego cualquiera de las paralelas á la base de este triángulo divide sus lados de tal suerte que las cuatro partes de ellas están en proporcion; porque la línea *mn*, v. g., de tal suerte divide las líneas AB, AC, que A*m*:*m*B::A*n*:*n*C, pues en ambas partes la razon es de 4:2.

Lo mismo podemos decir de cualquiera otra paralela así en este como en otro cualquier triángulo, porque le podemos aplicar la misma demostracion.

Núm. 170. Luego toda paralela á la base de un triángulo (Fig. 91) divide sus lados proporcional-

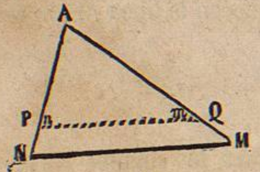

Fig. 91.

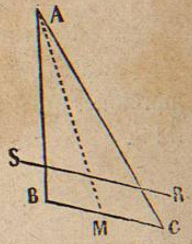

Fig. 92.

mente; y así PQ divide los lados del triángulo en tal forma, que AP:NP::AQ:QM.

Ahora bien, el punto Q, en que la línea AM queda dividida proporcionalmente, es punto único, solo corresponde á P; por consiguiente, toda línea que saliendo de P fuere á cortar el otro lado proporcionalmente ha de ir á parar á Q, y coincidir con la paralela PQ; y por consiguiente será tambien esa línea paralela á la base.

Núm. 171. Luego toda línea que cortare proporcionalmente los lados de un triángulo será paralela á la base de este.

Supongamos ahora (Fig. 92) que tiro yo desde A, vértice de un triángulo, una línea AM sobre la base: esta línea divide un triángulo en dos, y es un lado comun para ambos; y así la línea SR que fuere paralela á la base cortará proporcionalmente, no solo los dos lados antiguos AB, AC, sino tambien la nueva línea AM.

Luego toda línea que sale del vértice de cualquier triángulo queda cortada proporcionalmente á los lados por toda otra paralela á la base.

En esta suposicion podemos sacar de estas proposiciones muchos usos utilísimos para la práctica.

Demos que sea preciso reducir de un golpe muchas líneas diferentes á una séptima parte menos, ó á otra cualquiera proporcion, haremos lo siguiente.

I.

Sean las líneas que deben reducirse (Fig. 95) *a*O, *b*O, *c*O, *d*O, *e*O, *f*O.

II.

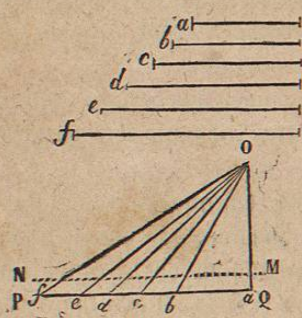

Fig. 95.

Tiraré una línea indefinida PQ : iré, pues, poniendo con el compas todas las líneas dadas, de tal forma que todas salgan del punto O, y terminen en la línea PQ, lo que es muy facil haciendo á O centro de muchos arcos, cuyos rayos sean las líneas dadas, los cuales irán á cortar la indefinida en *a*, *b*, *c*, *f*, *d*, *e*, etc.

III.

Cortaré de una cualquiera, v. g. O*a*, la parte que hayan pedido (núm. 168), y del punto M de la division tiraré la paralela MN : esta línea dividirá todas las demas con proporcion á la primera.

Núm. 172. Luego ya tenemos método para dividir muchas líneas juntamente en la misma razon pedida.

Dado un triángulo, cualquiera que sea (Fig. 94), supongamos que dividimos por medio el ángulo del vértice B : esta línea BP dividirá la base en dos

partes MN. Veamos ahora si son estas proporcionales á los dos lados, de suerte que podamos decir M:N::Q:T : para examinar este punto tiro de la estremidad *e* una paralela ABP, y continuo el lado TS hasta encontrar con la paralela en I.

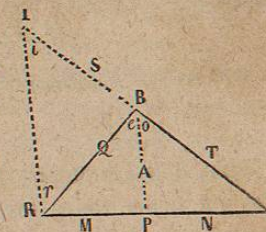

Fig. 94.

Por lo que queda dicho al número 170, por ser la línea BP paralela á RI, base del triángulo grande, dividirá sus lados proporcionalmente, y por consecuencia M:N::S:T.

Ahora bien, si el lado Q fuere igual á S se le podrá sustituir y poner en su lugar : de este modo tendremos la proporcion que buscamos. Para conocer que Q es igual á S, advertiremos que el ángulo *i*=*o* por las paralelas, *o*=*e* por la division en dos mitades, *e*=*r* su alterno : luego *i*=*r*; por consiguiente el triángulo IBR es isósceles (núm. 92), y su lado S igual Q; luego podemos en lugar de S poner Q sin perturbar la proporcion, y decir M:N::Q:T.

Núm. 173. Luego la línea que divide el ángulo del vértice por el medio divide la base proporcionalmente á los lados.

§ II.

De los lados proporcionales en los triángulos semejantes.

Núm. 174. Llamamos *triángulos semejantes* aquellos que tienen todos los ángulos correspondientes iguales (Fig. 95), v. g. los triángulos ABC y *abc*.

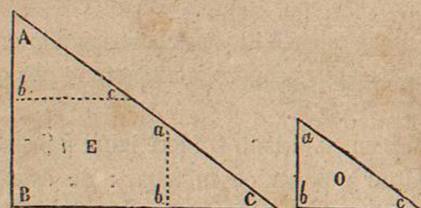

Fig. 95.

Los lados opuestos á angulos semejantes se llaman tambien *homólogos*. Si yo, pues, sobrepongo el triángulo pequeño O sobre el grande E á la parte del ángulo A, los dos ángulos A*a* y las líneas que los forman coincidirán. Ademas de esto como el ángulo *b*=B, y el ángulo *c*=C, la línea de puntos *bc* es paralela á BC (número 42), y así corta los dos lados AB, AC proporcionalmente (núm. 170); y comparando los dos triángulos OE, podemos decir *ab*∶ AB∶∶*ac*; AC.

Del mismo modo poniendo el triángulo pequeño O sobre el grande E en el ángulo C, se prueba que *ab*, que corresponde á AB, le es paralela, y que

por consiguiente corta en proporcion los dos lados AC, BC.

Núm. 185. Luego todos los triángulos semejantes tienen los lados proporcionales.

Amigo Eugenio, por ser esta proposicion la clave de infinitos descubrimientos en geometría procuraremos todos los modos de conocer cuando son semejantes dos triángulos, y á esto se ordenan las observaciones siguientes.

Sabemos que siempre que una línea es paralela á la base de un triángulo (Fig. 94) hace dos ángulos *mn* iguales á MN, adyacentes á la base (núm. 44); y que el ángulo del vértice A queda comun al triángulo antiguo y al nuevo. Pero cuando dos triángulos tienen los ángulos correspondientes iguales son semejantes.

Núm. 176. Luego toda línea que corte los lados de un triángulo siendo paralela á la base hace dos triángulos semejantes.

Dijimos tambien que todos los ángulos formados por líneas respectivamente paralelas eran iguales (núm. 45).

Núm. 177. Luego cuando todos los lados de un triángulo fueren paralelos á los de otro, los triángulos son semejantes.

Sabemos (Fig. 96) que si una línea fuere perpendicular sobre otra, si se la da una revolucion de 90 grados, ó coincide con ella, ó es su paralela (núm. 18); y así cuando un triángulo

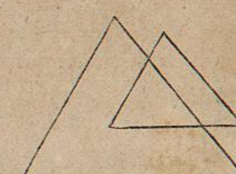

Fig. 96.

tuviere todos los lados perpendiculares á sus correspondientes en el otro, en dando una revolucion de 90 grados á un triángulo, todos los lados de uno (Fig. 97) serán paralelos á los del otro; y por consiguiente los ángulos respectivos iguales.

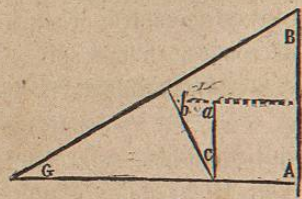

Fig. 97.

Num. 178, Luego cuando el triángulo tuviere todos sus lados perpendiculares á los de otro le será semejante.

Tambien dijimos que los ángulos opuestos en el vértice son iguales (núm. 15), y que tambien lo eran los ángulos alternos.

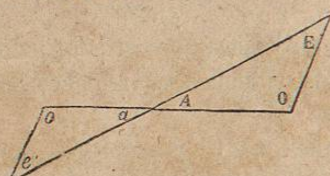

Fig. 98.

Núm. 179. Luego cuando los triángulos son formados por dos líneas que se cruzan, y por dos entre sí paralelas, son semejantes (Fig. 98), porque sus ángulos ó son verticalmente opuestos, ó son alternos.

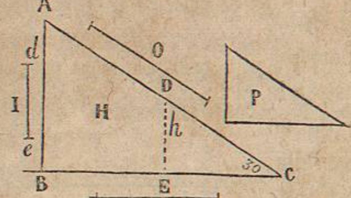

Fig. 99.

Formando un triángulo cualquiera H (Fig. 99), si tomamos tres líneas E, I, O proporcionales á sus lados, podremos hacer

de ellas un triángulo, v. g. P. Veamos ahora si necesariamente es este nuevo triángulo semejante al primero.

Poniendo los dos lados E, O sobre sus correspondientes (supongamos que son mitades de ellos) terminan en DE: tiremos por los puntos en que los lados quedan cortados proporcionalmente una línea, la que siendo por eso mismo paralela AB (núm. 177) formará el triángulo *h*, semejante á H por el núm. 176: solo falta demostrar que este pequeño triángulo *h* es lo mismo que P, hecho con las tres proporcionales, lo que se conoce así.

Como los triángulos *h* y H son semejantes, todas sus líneas serán proporcionales, y de este modo la vertical será á la vertical, como la horizontal á la horizontal; pero EC es la mitad de BC por la suposicion. Luego DE será lo mismo que *de*, mitad de AB; y por consiguiente el triángulo *h* será lo mismo que el triángulo P.

Núm. 180. Luego cuando los tres lados de un triángulo son proporcionales á los tres de otro, los triángulos son semejantes.

Esto supuesto, si nos pidieren una cuarta proporcional, esto es, si nos dieren (Fig. 100) tres líneas AB, AC, AD, y nos pidieren otra cuarta que con las tres haga proporcion, haremos lo siguiente.

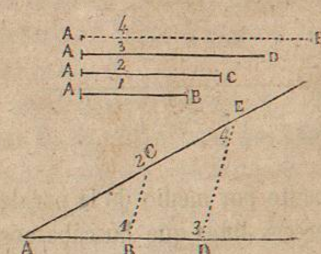

Fig. 100.

I.

Haré un ángulo arbitrario de líneas indefinidas BCA, y pondré por una parte la primera línea dada AB, y cerraré el triángulo con la línea de puntitos BC.

II.

Pondré en el primer lado la tercera línea dada AD, y tiraré una línea DE paralela á BC.

Esto hecho, los dos triángulos son semejantes por el núm. 176, y los lados proporcionales por el número 175 : luego AB:AC::AD:AE; por consiguiente AE es la cuarta proporcional que nos pedian.

Núm. 181. Luego tenemos modo de hallar una cuarta proporcional.

Del mismo modo, si dadas dos líneas AB, AC, nos pidieren una tercera proporcional, haremos lo siguiente (Fig. 101).

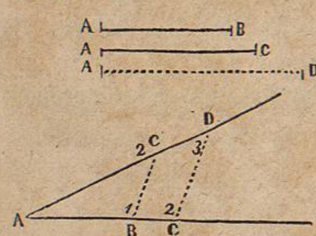

Fig. 101.

Hecho el ángulo arbitrario, pondremos de un lado la primera y segunda línea, y en el otro repetiremos la segunda, y cerraremos el triángulo con la línea BC; y últimamente por medio de la paralela CD hallaremos la tercera línea que buscábamos, y podremos decir AB:AC::AC:AD.

Núm. 182. Luego tenemos modo de hallar una tercera proporcional.

§ III.

Aplicacion de la doctrina precedente á medir distancias inaccesibles sin el socorro de la trigonometría.

Nada lisonjea mas el gusto de los principiantes que el medir distancias inaccesibles sin instrumentos ni cálculos embarazosos, lo cual pueden conseguir sacando varias consecuencias de la regla general que arriba hemos puesto, y es esta.

Todos los triángulos semejantes tienen los lados en proporcion.

De aquí se sacan las consecuencias siguientes :

I.

Núm. 183. Luego para medir la distancia inaccesible AB (Fig. 102) bastará hacer lo siguiente.

1º Poner una estaca en B y otra en Q, esto es, en la línea visual que va desde B hasta el objeto A. Despues se tira la línea visual desde B hasta C, en donde pondremos otra estaca C.

2º Tiraremos una línea visual *ab* paralela á la otra visual BA; la línea *ba* se notará con dos estacas; pero de modo que la estaca *a* esté tambien en la visual CA, y *b* en la visual CB.

3º Estas estacas con el objeto distante A hacen los términos de los triángulos semejantes C, B, A,