I.

Haré un ángulo arbitrario de líneas indefinidas BCA, y pondré por una parte la primera línea dada AB, y cerraré el triángulo con la línea de puntitos BC.

II.

Pondré en el primer lado la tercera línea dada AD, y tiraré una línea DE paralela á BC.

Esto hecho, los dos triángulos son semejantes por el núm. 176, y los lados proporcionales por el número 175 : luego AB:AC::AD:AE; por consiguiente AE es la cuarta proporcional que nos pedian.

Núm. 181. Luego tenemos modo de hallar una cuarta proporcional.

Del mismo modo, si dadas dos líneas AB, AC, nos pidieren una tercera proporcional, haremos lo siguiente (Fig. 101).

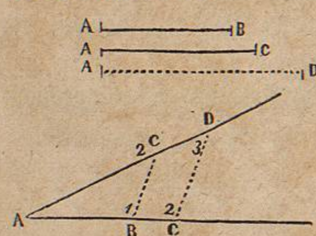

Fig. 101.

Hecho el ángulo arbitrario, pondremos de un lado la primera y segunda línea, y en el otro repetiremos la segunda, y cerraremos el triángulo con la línea BC; y últimamente por medio de la paralela CD hallaremos la tercera línea que buscábamos, y podremos decir AB:AC::AC:AD.

Núm. 182. Luego tenemos modo de hallar una tercera proporcional.

§ III.

Aplicacion de la doctrina precedente á medir distancias inaccesibles sin el socorro de la trigonometría.

Nada lisonjea mas el gusto de los principiantes que el medir distancias inaccesibles sin instrumentos ni cálculos embarazosos, lo cual pueden conseguir sacando varias consecuencias de la regla general que arriba hemos puesto, y es esta.

Todos los triángulos semejantes tienen los lados en proporcion.

De aquí se sacan las consecuencias siguientes :

I.

Núm. 183. Luego para medir la distancia inaccesible AB (Fig. 102) bastará hacer lo siguiente.

1º Poner una estaca en B y otra en Q, esto es, en la línea visual que va desde B hasta el objeto A. Despues se tira la línea visual desde B hasta C, en donde pondremos otra estaca C.

2º Tiraremos una línea visual *ab* paralela á la otra visual BA; la línea *ba* se notará con dos estacas; pero de modo que la estaca *a* esté tambien en la visual CA, y *b* en la visual CB.

3º Estas estacas con el objeto distante A hacen los términos de los triángulos semejantes C, B, A,

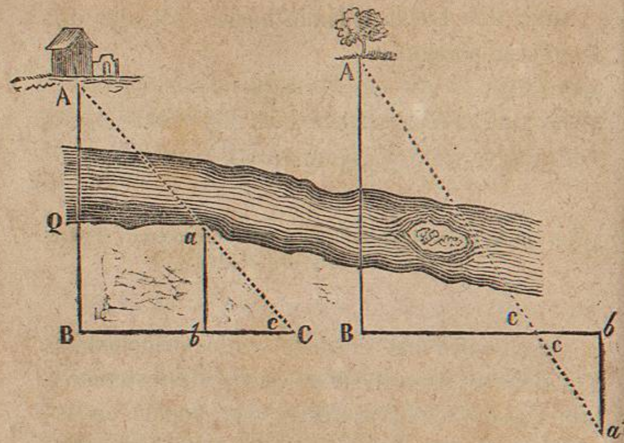

Fig. 102. Fig. 103.

y *c*, *b*, *a* : consideremos las dos líneas BC y *bc* como bases de los dos triángulos, cuyos vértices sean A y *a*. Ahora bien, como estos triángulos, por ser semejantes han de tener los lados proporcionales (núm. 175), se sigue que la pequeña base es respecto de la grande como la pequeña altura es respecto de la grande; y así tenemos esta proporcion *cb*:CB::*ba*:BA; y así si la pequeña base es, v. g., diez veces menor que la grande BC, tambien la línea *ba* será diez veces menor que la distancia BA, que es la que deseábamos conocer.

II.

Núm. 184. Cuando no se puede trabajar en el terreno que va desde la línea BC (Fig. 103) hácia adelante, por ser el terreno corto ó escabroso, se

puede hacer esta operacion en la parte opuesta en el terreno mismo que pisamos, y el modo es facil.

1º Puesta la línea visual BA, tiremos una perpendicular B*b*, y despues otra *ba* perpendicular á *b*B.

2º Estas dos líneas BA y *ba*, siendo perpendiculares á la misma línea B*b*, hacen los ángulos alternos iguales, y vienen á quedar paralelas entre sí (núm. 41).

3º Dividamos la línea B*b* en partes *alicuotas* (así se llaman las que repetidas agotan el valor de la cantidad, como si una línea se divide en doce dedos ó cuartas, que valgan tanto como toda la línea, se dice está dividida en partes *alicuotas*, porque alicuantas son las que se consideran mitades de mitades, etc.) : divídase, pues, la línea B*b*, y pongamos en una de ellas la estaca C.

4º Retirémonos por cima de la línea *ba* hasta que la estaca C nos embarace la vista del objeto distante A, y pongamos allí otra estaca *a*.

En este caso los dos triángulos *abc*, ABC, son semejantes (núm. 179), y los lados proporcionales : llamamos bases de estos triángulos las líneas BC y *bc*, luego la pequeña base es respecto de la grande como la altura del triángulo pequeño es á la altura del grande, y podemos hacer esta proporcion *bc*:BC::*ba*:BA; y así queda conocida la distancia BA que nos es inaccesible.

III.

Núm. 185. Si quisiésemos medir la altura de una torre por la sombra, lo podremos hacer del modo siguiente (Fig. 104).

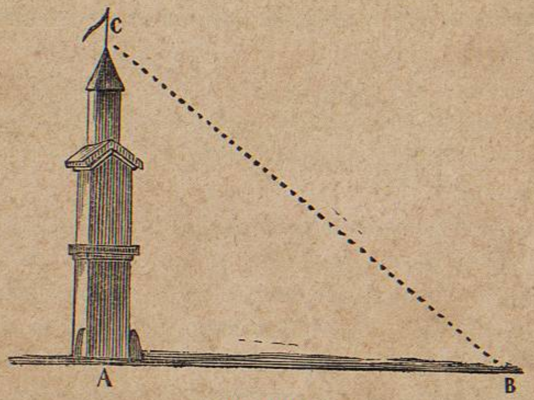

Fig. 104.

1º Me llegaré al fin de la sombra de la torre, de modo que la sombra de mi cabeza llegue á la última punta de la sombra que hace la torre.

2º Dejaré una señal en el suelo en el mismo lugar en que estaban mis pies; un criado notará tambien en el suelo el lugar B en que estuvo la sombra de mi cabeza, igual al mismo punto donde llegaba la sombra de la torre.

3º Hecho esto, ya tenemos dos triángulos semejantes, porque todos sus lados son respectivamente paralelos, pues la sombra de mi cuerpo es paralela á la de la torre: los rayos del sol que pasan por mi cabeza para terminar mi sombra, y los que pasan por la aguja de la torre para terminar la de esta y últimamente mi cuerpo con el de la torre, todos

están paralelos, pues estos dos últimos están á plomo.

4º Luego la sombra pequeña es respecto de la grande, como la altura de mi cuerpo es á la altura de la torre. Esto supuesto, como yo puedo medir el espacio que ocupa mi sombra en el tiempo de la operacion, pues quedaron señales en el suelo, así de mis pies como de la sombra de mi cabeza, y aun por el lugar de esta podemos conocer hasta donde llegó la sombra de la torre en aquel mismo tiempo; se sigue que si la sombra de la torre es, v. g. veinte veces mayor que la mia, tambien la altura de la torre será veinte veces mayor que la de mi cuerpo.

Adviértase que se debe contar en la sombra de la torre todo lo que hay desde su centro A, para que quede á plomo la línea que va hasta la aguja C, pues solo esta línea es paralela á mi cuerpo puesto á plomo.

Tambien se ha de notar, que esta operacion no admite tanta exactitud como las que se hacen con las líneas visuales, porque la sombra no termina en punto fijo: no obstante siempre se conoce la altura con corta diferencia.

Advertencia. — Cuando se forman estas proporciones, siempre se ha de guardar el término no conocido para cuarto lugar; y por consiguiente se ha de principiar por un término que no sea *homólogo*, ó correspondiente al término incógnito v. g., pues en el caso presente el término no conocido es la altura de la torre; ha de entrar en cuarto lugar, y no debo empezar por mi altura, porque es el término *homólogo* correspondiente al incógnito, sino que debo principiar por mi sombra, y decir : una sombra es á otra como una altura á otra altura, ó una sombra pequeña es á la altura pequeña como la sombra grande á la altura grande.

Te enseño este problema, amigo Eugenio, no porque en la práctica se pueda ejecutar con perfecta exactitud, sino porque sirve para una medida poco mas ó menos, y es facil.

Tambien te advierto, que cuando se comparan los lados de dos triángulos semejantes, solo se comparan entre sí los lados *homólogos*, esto es, los que están opuestos á ángulos iguales.

IV.

Núm. 186. Si hubiere un grafómetro (Fig. 105) y un semicírculo graduado (Fig. 106), se pueden medir las distancias inaccesibles con bastante exactitud de este modo.

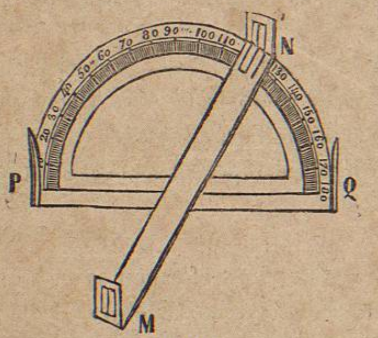

Fig. 105.

1° Poniendo dos estacas en BC (Fig. 102), las cuales con el objeto distante A hacen los tres puntos del triángulo visual : despues de esto en el lugar C pondré el grafómetro (Fig. 105) para medir el ángulo C.

El medio de medir los ángulos visuales con el grafómetro es el siguiente : pondré en C horizontal el instrumento, y de modo que por la regla ó *alidada* fija PQ vea yo la estaca fija en B, y sin mover el instrumento volveré la *alidada* ó regla movible MN, de forma que por las *pínulas* MN vea yo el objeto distante A : de este modo el arco del grafómetro, comprendido entre las dos alidadas, dará el número de grados comprendidos por el ángulo visual CA y CB de la (Fig. 105).

2° Medido por este modo el ángulo visual en C, quitaré el grafómetro de allí, y dejaré una estaca en su lugar : le pasaré al lugar de otra estaca en A : volveré el instrumento, de modo que por la alidada fija PQ pueda ver la estaca C, y sin tocar al instrumento volveré la alidada movible MN hasta ver el objeto distante en A ; y entonces el arco comprendido entre las dos alidadas mostrará el valor del ángulo visual en B,

3° Mediré la línea BC para ver cuantos pasos ó varas contiene.

4° Esto supuesto, haré en un papel (Fig. 106)

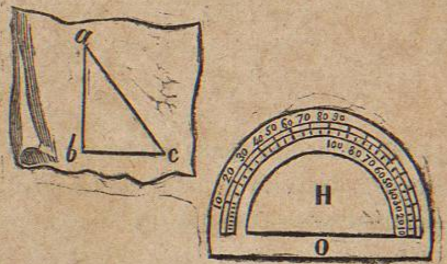

Fig. 106.

una línea bc, que tendrá tantas partes de pie de rey, ó cualquiera otro petipie, cuantas varas, brazas, etc., hubiere en la línea visual BC : tirada así esta línea bc, pondré en sus estremidades el centro O del semicírculo H, y haré allí dos ángulos iguales á los dos ángulos visuales que tenemos en B y en C: pondré dos puntitos en los grados que les corresponden en el semicírculo, por los cuales tiraré dos líneas, que se han de cruzar en alguna parte; y en donde se cruzan pondré la letra a, que corresponde al objeto distante A.

V.

Hechos estos triángulos, llamaré bases á las líneas BC y bc : llamaré alturas las líneas BA y ba, y diré que la base del triángulo pequeño es á su altura como la base del grande es á la suya. Y de este modo sabiendo yo cuantas partes de petipie tiene la línea bc, y pudiendo averiguar cuantas se contienen en ba; sabiendo tambien cuantas brazas tiene la línea visual BC, tengo una proporcion $bc:ba::BC:BA$: los tres términos son conocidos, y por consiguiente el cuarto lo será, y este cuarto término es la distancia que buscábamos.

VI.

Núm 187. Podemos medir de otro modo al mismo tiempo la distancia y altura de un objeto distante sin mas instrumento que dos estacas á plomo (Fig. 107).

1º Pongamos dos estacas á plomo P y Q.

2º Llegando á la estaca P notaré allí el punto a á

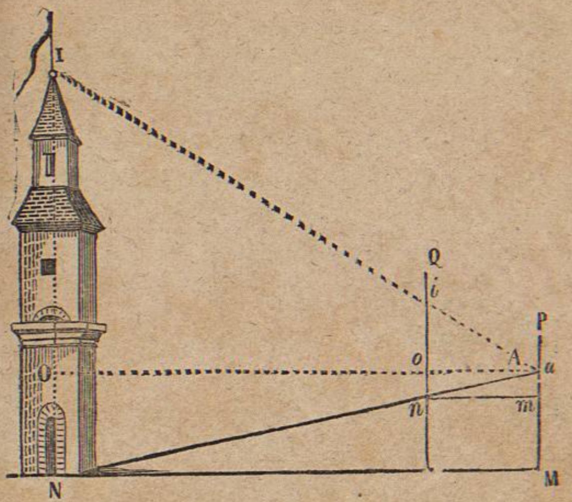

Fig. 107.

la altura de los ojos, y notaré en la otra estaca el punto n, por donde pasa el rayo visual que va á terminar á la base N del edificio.

3º Tomaré la distancia que hay desde n hasta el suelo, y la pasaré á la estaca P en el punto m : ya con esto tenemos un triángulo pequeño anm y otro grande que le es semejante ANM; y la razon de semejanza es, porque nm es paralela al suelo ó pavimento representado en la línea NM.

4º Supuesta la semejanza de los triángulos, llamaré su altura las líneas am y AM, y diré la altura del pequeño es á la del grande como la base del pequeño es á la base del grande; y así $am:AM::mn:MN$: siendo las tres primeras cantidades conocidas tambien lo será la cuarta, que es la distancia del edificio representada en la línea NM.

Mas para medir la altura haré lo siguiente :

I.

Llevaré á la estaca Q la altura *a*M, notando allí el punto *o*, de forma que la línea visual A*o* y O quede paralela al pavimento.

II.

Desde *a* miraré á lo mas alto del edificio, y notaré en la segunda estaca el punto *i*, por donde pasa el rayo visual.

III.

Con esto tenemos un pequeño triángulo *aio*, y otro grande AIO, el cual es semejante, porque la estaca Q está paralela al edificio.

IV.

Luego la base del pequeño triángulo es á la del grande como la altura del pequeño á la altura del grande; y así diré $ao : AO :: oi : OI$; pero las tres primeras cantidades son conocidas; luego tambien lo será la cuarta : y si juntáremos la altura OI con la altura *a* y M, ó bien ON, quedará conocida la altura total del edificio NI.

Advierto que tampoco esta operacion puede ser exactísima; pero hecha con cuidado dará á conocer la distancia y altura con corta diferencia.

V.

Núm. 188. Por semejante método tenemos el medio para medir una distancia inaccesible por ambas estremidades (Fig. 108).

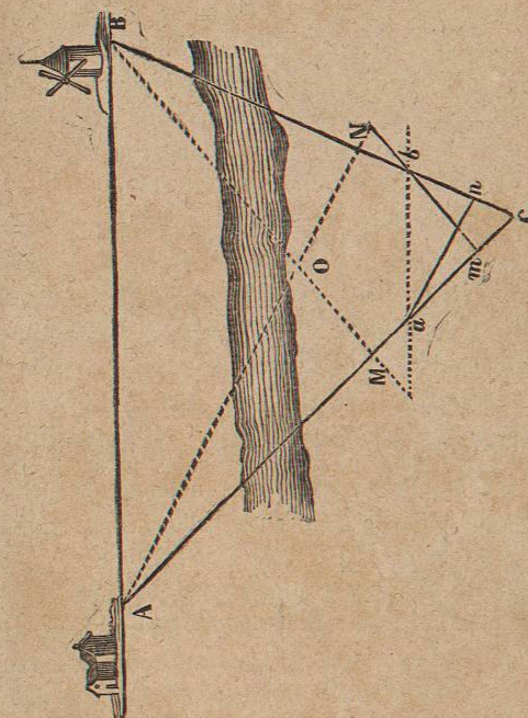

Fig. 108.

I.

Del punto C tomado á discrecion miraré á los dos objetos, cuya distancia quiero conocer, y tendré el triángulo ABC, cuyos tres lados por ser incógnitos parecen inútiles para toda operacion; mas para conocerlos haré lo siguiente :

II.

De un punto arbitrario M, tomado en la línea CA, miraré al objeto B, y tomando en esa misma línea una parte proporcional á mi discrecion notaré un punto *m*, del cual tiraré la línea *mb* paralela á la grande MB, lo que es muy facil, poniendo el grafómetro en M y despues en *m*, sin mudar la graduacion de la alidada movible, y notaré el punto *n*.

Esto hecho, ya tenemos dos triángulos semejantes *mbc* y MBC : llamaré bases á las líneas MC y *mc* : podré decir la base del pequeño es á la del grande, como la oblicua del pequeño es á la del grande, de este modo : C*m*:CM::C*b*:CB.

III.

Trasportaré á la línea CB las mismas distancias que tomé en la línea CA, esto es, notando los puntos N*n* que estan en las mismas distancias de C que *m* y M : tiraré de N una línea visual NA y otra paralela á esta *na*, con el fin de tener dos triángulos semejantes *nac*, NAC; y llamando bases de estos triángulos las líneas C*n*, CN, podemos decir la base del pequeño es á la del grande como la oblicua del pequeño es á la del grande, esto es, C*n*:CN::C*a*:CA, y como las tres primeras cantidades son conocidas, tambien lo será la cuarta CA.

IV.

Si el terreno no consintiere tomar los puntos *n*N en la misma distancia de *m*M, bastará tomar cualesquiera otros, con tal que la pequeña distancia C*n* sea respecto de la grande CN, como C*m* es á CM.

V.

Juntando ahora lo que tenemos probado conoceremos que si C*m* es v. g. la cuarta parte de C*m*, y C*n* de CN, tambien C*a* será la cuarta parte de CA y C*b* de CB.

VI.

Habiendo hallado los dos puntos *ab* que dividen en proporcion los dos lados CA, CB, tiraremos por ellos una línea *ab*, la cual por el número 171 es paralela á la no conocida AB; y así los dos triángulos C*ab*, CAB son semejantes y los lados proporcionales; por consiguiente llamando bases las líneas *ab*, AB, diremos que el lado del pequeño C*b* es al lado del grande CB como la base del *ab* pequeño á la del grande AC, esto es, B*a*:CA::*ab*:AB.

Y con esto se conocerá no solo la distancia AB, sino tambien en qué rumbo ó direccion se halla esta línea, pues debe ser la misma que la de su paralela *ab*.

§ IV.

Aplicacion de la doctrina dada á la division de cualquiera línea en partes proporcionales muy pequeñas.

Teniendo presente, amigo Eugenio, dos verdades esenciales ya probadas, una que la paralela que corta un triángulo hace dos triángulos semejantes (núm. 176), otra que los triángulos semejantes tienen los lados proporcionales (núm. 175), sacaremos de ellas varias consecuencias.

I.

Núm. 189. El modo de dividir exactamente cualquier línea muy pequeña en las partes que se pidieren (Fig. 109).

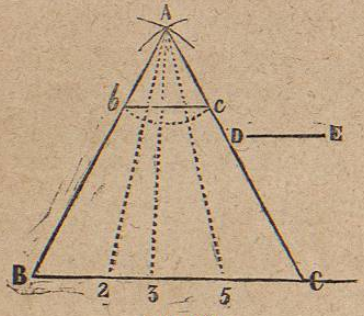

Fig. 109.

Sea la línea dada DE, y supongamos que las quieren dividir en 2, 3 ó 5 séptimas partes, lo que se espresa así : $\frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{5}{7}$.

1o Tomaremos una línea arbitraria CB, y en ella con el compas haremos siete medidas iguales entre sí, bien que tambien á discrecion.

2o Tomaré con el compas las siete medidas juntas que hace la línea BC, y describiré desde sus estremidades dos arcos que se cruzan en A para formar un triángulo equilátero.

3o De las divisiones 2, 3, 5 tiraré líneas al vértice A. Esto hecho, ya sé que toda línea que fuere paralela á BC quedará dividida como ella lo está, esto es, $\frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{5}{7}$.

4o Tomaré con el compas la línea dada DE, y desde el vértice A describiré un arco que corte los lados del triángulo en *bc*, y tiraré la línea *bc*, la cual será igual á DE, por cuanto el nuevo triángulo A*bc*, teniendo el vértice comun en A, y los ángulos de la base iguales con los del triángulo grande ABC, ha de ser equilátero como él, y por la misma razon todos los triángulos pequeños, cuyas bases hacen la línea *bc*, son semejantes á los grandes, cuyas bases juntas hacen la línea BC.

Luego la línea dada DE (ó su igual *bc*) se halla dividida como BC, esto es, en $\frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{5}{7}$.

II.

Núm. 190. Tenemos el modo de formar el petipie de centésimas, que muchos llaman de décimas.

El petipie de centésimas se halla en muchos instrumentos matemáticos para tomar las partes centésimas de una pulgada, y se puede aplicar á cualquiera otra línea ; este se forma del modo siguiente (Fig. 110).

1o Sea la línea dada AB, la cual se procura dividir en cien partes iguales; para esto la dividiremos en diez partes iguales, numerándolas por las decenas siguientes : 10, 20, 30, etc.

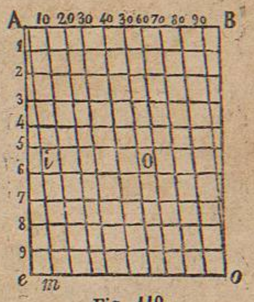

Fig. 110.

2o De las dos estremidades bajaremos las dos paralelas entre sí A*e*, B*o*, en cada una de las cuales tomaré con el compas diez partes iguales, notándolas con los números siguientes 1, 2, 3, etc.

3º Uniremos las dos paralelas A*e*, B*o* con la línea *oe* igual á AB.

4º Tiraremos paralelas AB por todos los puntos notados en A*e*.

5º Tiraremos una oblicua A*m*, y todas las demas paralelas á esta oblicua.

Esto supuesto demos que me pidan 56 partes iguales centésimas de la línea AB; buscaré en ella la division 50, y en A*e* la division 6, y veré en qué parte esas dos divisiones se encuentran, lo que sucede en el punto O : y tomando con el compas la distancia de O hasta 6, hallaré 56 partes centésimas. Por cuanto de O hasta *i* hay 5 divisiones, cada una de 10 partes, y desde *i* hasta 6 hay seis partes centésimas, lo que se prueba de este modo :

Estando este triángulo *e*A*m* dividido por paralelas, en cualquier parte que le corten estas siempre queda triángulo semejante al total : luego así como la altura del grande es á la del pequeño como 10 á 6, así la base del grande será á la del pequeño como 10 á 6; y asi *em* vale 10 partes centésimas, 6 *i* valdrá 6.

Del mismo modo se pueden hallar todas las partes centésimas desde 1 hasta 99.

§ V.

De las líneas que son medias proporcionales.

Núm. 191. Llamamos, Eugenio, media proporcional una línea, que si se pone entre otras dos líneas dadas haga con ellas una progresion geométrica ó proporcion continua.

Pero antes es preciso advertir que se llama hipotenusa en un triángulo la línea opuesta á un ángulo recto, v. g. (Fig. 111), la línea AB y el triángulo que tiene un ángulo recto se llama triángulo rectángulo.

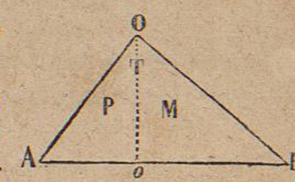

Fig. 111.

Tomemos ahora un triángulo rectángulo, bajemos desde el ángulo recto la línea O*o* perpendicular sobre la hipotenusa AB, ya tenemos el triángulo total T dividido en dos, uno pequeño P, otro mayor M.

P tiene un ángulo recto en *o*, así como el total le tiene en O, y ademas de esto tiene el ángulo A comun al triángulo P y al total T; y por consiguiente (núm. 86) será semejante al total.

Del mismo modo el triángulo M tiene un recto en *o*, y otro agudo en B, comun al triángulo M y al triángulo T; y por consiguiente será semejante al to-