cada una de las cuales tomaré con el compas diez partes iguales, notándolas con los números siguientes 1, 2, 3, etc.

3º Uniremos las dos paralelas A*e*, B*o* con la línea *oe* igual á AB.

4º Tiraremos paralelas AB por todos los puntos notados en A*e*.

5º Tiraremos una oblicua A*m*, y todas las demas paralelas á esta oblicua.

Esto supuesto demos que me pidan 56 partes iguales centésimas de la línea AB; buscaré en ella la division 50, y en A*e* la division 6, y veré en qué parte esas dos divisiones se encuentran, lo que sucede en el punto O: y tomando con el compas la distancia de O hasta 6, hallaré 56 partes centésimas. Por cuanto de O hasta *i* hay 5 divisiones, cada una de 10 partes, y desde *i* hasta 6 hay seis partes centésimas, lo que se prueba de este modo:

Estando este triángulo *e*A*m* dividido por paralelas, en cualquier parte que le corten estas siempre queda triángulo semejante al total: luego así como la altura del grande es á la del pequeño como 10 á 6, así la base del grande será á la del pequeño como 10 á 6; y asi *em* vale 10 partes centésimas, 6 *i* valdrá 6.

Del mismo modo se pueden hallar todas las partes centésimas desde 1 hasta 99.

§ V.

De las líneas que son medias proporcionales.

Núm. 191. Llamamos, Eugenio, media proporcional una línea, que si se pone entre otras dos líneas dadas haga con ellas una progresion geométrica ó proporcion continua.

Pero antes es preciso advertir que se llama hipotenusa en un triángulo la línea opuesta á un ángulo recto, v. g. (Fig. 111), la línea AB y el triángulo que tiene un ángulo recto se llama triángulo rectángulo.

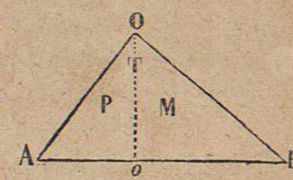

Fig. 111.

Tomemos ahora un triángulo rectángulo, bajemos desde el ángulo recto la línea O*o* perpendicular sobre la hipotenusa AB, ya tenemos el triángulo total T dividido en dos, uno pequeño P, otro mayor M.

P tiene un ángulo recto en *o*, así como el total le tiene en O, y ademas de esto tiene el ángulo A comun al triángulo P y al total T; y por consiguiente (núm. 86) será semejante al total.

Del mismo modo el triángulo M tiene un recto en *o*, y otro agudo en B, comun al triángulo M y al triángulo T; y por consiguiente será semejante al total, y semejante tambien á AP; de aquí sacaremos esta consecuencia general.

Núm. 192. Luego toda perpendicular sobre la hipotenusa divide el triángulo en dos, que son semejantes entre sí y al total.

Siendo, pues, los tres triángulos semejantes, sus lados serán proporcionales (núm. 175). Tomemos, pues, en P y en M los lados que forman los ángulos rectos para compararlos entre sí, y diremos : Ao : oO : : oO : oB.

Núm. 193. Luego la perpendicular bajada sobre la hipotenusa es media proporcional entre las dos partes de ella.

Luego si nos dieren dos líneas *ab* (Fig. 112), y nos

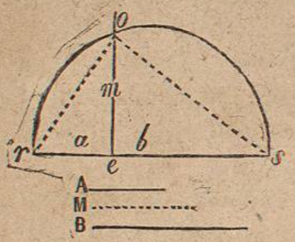

Fig. 112.

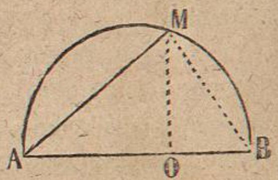

Fig. 113.

pidieren una media proporcional entre ellas, se podrá hallar de este modo :

Pondré las dos líneas *ab* seguidas una á otra; haré de ambas el diámetro de un semicírculo, y levantaré del punto *e* en que se juntan las dos una perpendicular : despues tirando las dos líneas *or*, *os*, haré un triángulo rectángulo (núm. 47), y por el núm. precedente *a* : *m* : : *m* : *b*.

Núm. 194. Luego tenemos método para hallar una media proporcional entre dos líneas dadas.

Por la misma razon de la semejanza de los triángulos P y T (Fig. 111), podemos comparar entre sí los lados que en uno y otro forman el ángulo comun, y decir : Ao : AO : : AO : AB. Lo mismo haremos en los triángulos M y T, comparando entre sí los lados que forman el ángulo comun C, y diremos : Bo : BO : : BO : BA.

Núm. 195. Luego dividido cualquier triángulo rectángulo por la perpendicular sobre la hipotenusa, cualquiera de los lados es media proporcional entre toda la hipotenusa y el segmento de ella que le corresponde.

Si describimos un semicírculo (Fig. 113), su diámetro será hipotenusa del triángulo hecho por ella, y por dos cuerdas terminadas en su circunferencia, porque estas precisamente hacen ángulo recto (núm. 74).

Núm. 196. Luego cualquier cuerda (Fig. 113) tirada de la estremidad del diámetro, es media proporcional entre todo el diámetro, y el segmento de este, cortado por la perpendicular bajada desde la estremidad de la cuerda, y podemos decir : AO : AM : : AM : AB.

Tambien podemos hallar una media proporcional por otro medio : si juntamos en un punto fuera del círculo (Fig. 114) una secante y una tangente, tenemos tres líneas, que son la esterior AO, la tangente AN, y la secante total AM. Para examinar si estan en proporcion tiraremos las líneas NO y NM, las cuales forman dos triángulos NAO, NAM. Llamemos al pequeño P y al grande T.

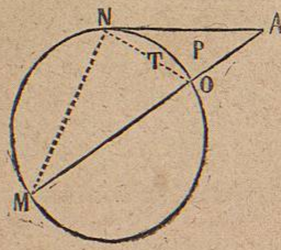

Fig. 114.

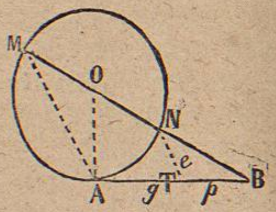

Fig. 115.

Estos dos triángulos tienen el ángulo A comun : ademas de esto el ángulo M tiene por medida la mitad del ángulo NO (núm. 72), y el ángulo ONA tiene tambien esta medida, por ser ángulo de cuerda y de tangente. Luego los dos triángulos son semejantes; y si comparamos los lados homólogos que forman el ángulo comun A, se hallará proporcionales, y podremos decir : AO:AN::AN:AM.

Núm. 197. Luego la tangente que toca en la estremidad de la secante es media proporcional entre toda la secante y su parte esterior.

§ VI.

Modo de dividir cualquier línea en media y estrema razon.

Núm. 198. Llamamos, amigo Eugenio, dividir una línea en media y estrema razon cuando la dividimos en tal forma, que la parte pequeña comparada con

la grande esté en la misma razon que la mayor tiene con la total (Fig. 115) : v. g. si nos dan la línea AB para dividirla, y la partimos en el punto *e*, quedará la parte pequeña *p* con la grande *g*, como esta grande comparada con la total T, y podremos decir : *p*:*g*::*g*:T. Para conocer que esto es verdad, haremos lo siguiente.

I.

Tomaré la mitad de la linea dada AB, y levantaré sobre la estremidad una perpendicular AO, igual á esa misma mitad, la que me servirá de radio para un círculo, quedando de este modo su diámetro igual á la línea dada AB.

II.

Tiraré de la estremidad B una secante que pase por el centro del círculo, y termine en la circunferencia M.

Esto hecho, ya tenemos una secante y una tangente unidas en un punto, y por consiguiente (núm. 197) la esterior BN es á la tangente BA, como esta es respecto de la secante BM, diciendo así : ÷BN:BA:BM, BN es á BA como BA á BM.

Ahora pues el diámetro MN es igual á la tangente AB, y se puede sustituir por ella sin perturbar la progresion ; luego podemos decir ÷ BN:NM:BM, quedando de este modo dividida la secante en media y estrema razon.

Pero si tiramos las dos paralelas MA, N*e*, tenemos dos triángulos semejantes, cuyos lados estan cortados proporcionalmente y del mismo modo (núm. 170).

Núm. 199. Luego tenemos modo de cortar cualquiera línea dada en media y estrema razon.

§ VII.

De las líneas que estan en proporcion recíproca.

Núm. 200. Llamamos proporcion recíproca siempre que un objeto comprende á otro tantas veces en una circunstancia, cuantas es comprendido por él en otra: de esta suerte en la proporcion recíproca el segundo y tercer término pertenecen al mismo objeto, y el primero con el cuarto pertenecen á otro.

En esta suposicion, si tiramos en un círculo dos cuerdas AN, EM (Fig. 116), las cuales se corten, y

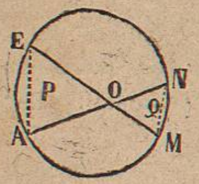

Fig. 116.

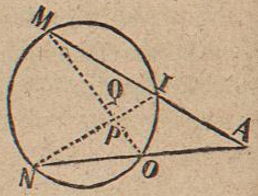

Fig. 117.

unimos sus estremidades con dos líneas EA, NM, haremos dos triángulos P y Q, los cuales son semejantes, porque los ángulos en O son opuestos en el vértice, y los ángulos en EN, por estar en la circunferencia y apoyados en el mismo arco AM, tambien son iguales. Luego los lados que forman los ángulos en O son proporcionales; y así se infiere que OA:OE::OM:ON. Bien se advierte que el segundo y tercer término pertenecen á una misma línea, así como el primero y el cuarto pertenecen á la otra.

Núm. 201. Luego cuando dos líneas se cruzan dentro de un círculo hacen cuatro segmentos que estan en proporcion recíproca.

Supongamos ahora que dos secantes se juntan en un punto fuera del círculo (Fig. 117), y que de los puntos OI en que cortan el círculo tiramos dos líneas de puntitos á las estremidades MN: en este caso tendremos dos triángulos NIA, MOA, los cuales tienen un ángulo comun en A, y los ángulos en MN iguales, por estar en la circunferencia, y apoyados en el mismo arco IO (núm72); por consiguiente serán semejantes, y los lados respectivos proporcionales; de suerte que el lado mas pequeño de P será al lado mas pequeño de Q como el lado máximo de P al máximo de Q, esto es, AI:AO::AN:AM.

Ahora, pues, el segundo término y el tercero pertenecen á la misma línea AN, así como el primero y cuarto pertenecen á otra AM, señal propia de proporcion recíproca.

Núm. 202. Luego cuando dos secantes se unen en un punto fuera del círculo, las esteriores estan en razon recíproca con las secantes enteras.

§ VIII.

De las circunferencias proporcionales en los polígonos y en los círculos.

Para conocer qué proporcion hay entre las circunferencias de varios polígonos semejantes ó diversos círculos podemos advertir lo siguiente :

I.

Que los polígonos se pueden dividir en triángulos.

II.

Que siendo los triángulos respectivamente semejantes, y puestos del mismo modo, vienen á formar polígonos semejantes : de esto se infieren varias consecuencias.

I.

Dado cualquier polígono irregular (Fig. 118), si nos pidieren otro semejante (Fig. 119), cuyo circuito sea duplo, triple, ó en cualquiera razon otra respecto del que fué dado, haremos lo siguiente :

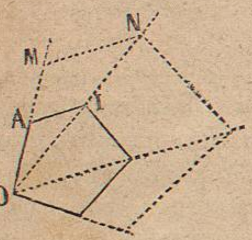

Fig. 118 y 119.

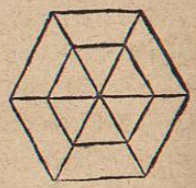
Fig. 120.

1º Del ángulo O tiraremos diagonales á todos los demas ángulos, y las prolongaremos indefinidamente.

2º Prolongaremos tambien indefinidamente los lados que forman el ángulo O.

3º Tomaremos en la línea OM una estension que tenga al lado OA la razon dupla, triple, etc. ; y del punto M, en que se termina el nuevo lado, tiraré una paralela AI al lado del polígono antiguo, y del punto N otra paralela al otro lado antiguo, y así en los demas lados.

Por cuanto hecho esto, el nuevo polígono será semejante al que nos dieron, pues los triángulos que le forman son semejantes á los que formaban el que nos dieron (núm. 176).

Ademas de esto como los lados son proporcionales, la misma razon habrá entre AO y OM, que entre AI y MN, y por consiguiente entre los dos circuitos de los polígonos.

Núm. 103. Luego en los polígonos semejantes los circuitos son proporcionales á los lados homólogos.

II.

Núm. 204. Si el polígono fuere regular (Fig. 120), dividido este en triángulos con los radios tirados desde el centro, y hecha la misma operacion, quedará el nuevo polígono semejante con el círculo en la razon de sus radios, por la misma razon que dimos en los polígonos irregulares.

III.

Pues los círculos se consideran como polígonos de infinitos lados, podemos decir de los círculos lo que dijimos de los polígonos regulares.

Núm. 205. Luego las circunferencias de los círculos son entre sí como los radios ó como sus diámetros (Fig. 121), por la razon del número precedente.

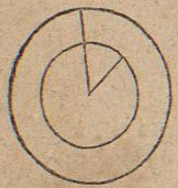

Fig. 121.

Ahora bien, amigo Eugenio, si hubieres entendido bien estas cartas puedes sosegar, pues no encontrarás en los elementos de geometría cosa que sea dificil, porque el peor camino ya está pasado: ten presente la comparacion que te hice, y creeme, que cada proposicion demostrada es como una nueva antorcha, que te ha de iluminar en el oscuro camino que resta; pero teniendo tantas hachas encendidas no debes temer las tinieblas. Dios te guarde, etc.

CARTA DÉCIMANONA.

DE LAS SUPERFICIES.

§ I.

De la formacion de la superficie.

Despues de tratar, amigo Eugenio, de las líneas y sus propiedades, pide el buen orden que ahora tratemos de las *superficies*, y despues de estas trataremos de los *sólidos*. Ahora te acordarás de que para darte la idea de la *línea* te dije que considerases un punto en movimiento, y que tuvieses por línea el camino por donde el punto va pasando: ahora te digo una cosa semejante para darte idea de la superficie. Cuando una línea se considera moviéndose toda hácia algun lado, el espacio por donde se considera que la línea entera va pasando se llama *superficie*.

Núm. 206. Debes ahora suponer que cuando una