III.

Pues los círculos se consideran como polígonos de infinitos lados, podemos decir de los círculos lo que dijimos de los polígonos regulares.

Núm. 205. Luego las circunferencias de los círculos son entre sí como los radios ó como sus diámetros (Fig. 121), por la razon del número precedente.

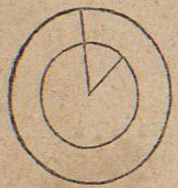

Fig. 121.

Ahora bien, amigo Eugenio, si hubieres entendido bien estas cartas puedes sosegar, pues no encontrarás en los elementos de geometría cosa que sea difícil, porque el peor camino ya está pasado: ten presente la comparacion que te hice, y créeme, que cada proposicion demostrada es como una nueva antorcha, que te ha de iluminar en el oscuro camino que resta; pero teniendo tantas hachas encendidas no debes temer las tinieblas. Dios te guarde, etc.

CARTA DÉCIMANONA.

DE LAS SUPERFICIES.

§ I.

De la formacion de la superficie.

Despues de tratar, amigo Eugenio, de las líneas y sus propiedades, pide el buen orden que ahora tratemos de las *superficies*, y despues de estas trataremos de los *sólidos*. Ahora te acordarás de que para darte la idea de la *línea* te dije que considerases un punto en movimiento, y que tuvieses por línea el camino por donde el punto va pasando: ahora te digo una cosa semejante para darte idea de la superficie. Cuando una línea se considera moviéndose toda hácia algun lado, el espacio por donde se considera que la línea entera va pasando se llama *superficie*.

Núm. 206. Debes ahora suponer que cuando una línea recta se mueve hácia un lado siempre va paralela á sí misma; y así el espacio que corrió la línea se llama paralelógramo (Fig. 122). La línea AB

Fig. 122.

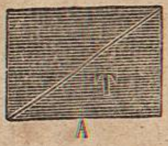

Fig. 123.

Fig. 124.

se considera *movible*, y la línea AC es la *directriz*, y se considera quieta.

Núm. 207. Si la movible con la directriz hacen un ángulo recto (Fig. 123), el paralelógramo se llama rectángulo, como A.

Núm. 208. Si ademas de ser el ángulo recto la movible es igual á la directriz, el paralelógramo se llama cuadrado, como B (Fig. 124).

Núm. 209. Si la movible hiciere con la directriz un ángulo que no sea recto, el paralelógramo se llama oblicuángulo; y en este caso si la movible es igual á la directriz, el paralelógramo se llama rombo, v. g. C (Fig. 125); pero si no fuesen iguales

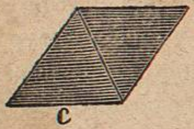

Fig. 125.

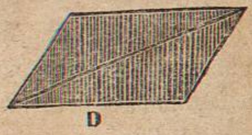

Fig. 126.

las dos líneas se llama romboide, como D (Fig. 126).

Núm. 210. Tomemos ahora un paralelógramo de

cualquier especie que sea, y tiremos en él una linea desde un ángulo al otro ángulo opuesto, y se llamará línea la *diagonal*; y cada mitad del paralelógramo será un triángulo, y los dos ó son rectángulos ú oblicuángulos, segun era el paralelógramo de donde salieron, como T y D (Fig. 123 y 124).

Núm. 211. Juntando dos triángulos, el uno á lo largo del otro, de modo que tengan un lado comun, resulta una figura de cuatro lados: si dos de ellos fueren paralelos la figura se llama *trapecio* (Fig. 127); pero si no hubiere lado alguno paralelo al


Fig. 127.


Fig. 128.

Fig. 129.

otro se llama simplemente cuadrilátero (Fig. 128.)

Núm. 212. Toda figura de muchos lados, y por consiguiente de muchos ángulos, se llama *polígono*: si los lados, como tambien los ángulos, fueren todos iguales será polígono regular, como M (Fig. 129); mas si los lados ó ángulos son desiguales, la figura será polígono irregular, como N (Fig. 130).

Fig. 130.


Fig. 131.

Fig. 132.

Núm. 213. El espacio comprendido dentro de una línea circular se llama *círculo* (Fig. 151): el espacio comprendido entre dos radios y el arco se llama *sector* (Fig. 152); pero el espacio comprendido entre la cuerda y su arco se llama *segmento* (Fig. 153).

Fig. 153.

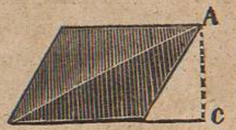

Fig. 154.

Dijimos al número 210 que en todo paralelógramo tirada una diagonal resultaban dos triángulos. Ahora decimos que estos triángulos (Fig. 123, 124, 125 y 126) tienen un lado comun, que es la diagonal; y ademas de esto los ángulos adyacentes á la diagonal son alternos; y así los dos triángulos vienen á ser iguales (núm. 113). Tienen ademas por base los lados que al mismo tiempo son base del paralelógramo, y son de la misma altura que este.

Núm. 214. Luego todo paralelógramo se divide en dos triángulos iguales de la misma base y de la misma altura del paralelógramo.

Núm. 215. Nótese que podemos llamar base á cualquiera de los lados de un triángulo, con tal que llamemos vértice al ángulo que la sea opuesto. Adviértase tambien que llamamos altura del triángulo ó del paralelógramo la perpendicular sobre la base ó sobre la continuacion de esta, como AC (Fig. 154).

Núm. 216. Luego el valor de cualquier triángulo es la mitad del valor que tendria su paralelógramo, esto es, siendo de la misma base y de la misma altura. Aquí se advierte que cuando hablamos del valor del triángulo, paralelógramo, círculo, polígono, etc., hablamos de la area ó espacio comprendido entre las líneas que la componen.

§ II.

Modo de valuar las superficies.

Núm. 217. Para valuar la superficie de un paralelógramo rectángulo se debe multiplicar la base por la altura; mas los principiantes no pueden bien comprender como se multiplica una línea por otra: para esto se advierte que cualquiera cantidad representada por una línea se debe dividir en cierto número de unidades, aunque la calidad de estas es arbitraria, pues cada unidad puede ser línea, pulgada, palmo, etc.; y así multiplicando el número de las unidades de una línea por el número de las de la otra, queda multiplicada una línea por otra.

Núm. 218. Adviértase tambien que no es lo mismo formar una superficie que valuarla, pues para su formacion se considera la línea matemáticamente, esto es, prescindiendo de su grueso; y esta línea se mueve de lado, caminando siempre paralela á sí misma, segun la direccion de otra línea para formar la superficie.

Pero si queremos valuar la superficie ya formada debemos numerar la cantidad de partes que la componen; y en esto ya se ve que esas mismas partes son tambien superficies, y no puramente líneas, por cuanto de líneas matemáticas sin latitud ó grueso no se puede componer una estension física, la cual tiene anchura, siendo cierto que la nada por mas que se multiplique no puede dar cosa positiva.

Es evidente, pues, que cuando se trata de valuar alguna superficie debemos considerar la línea movil como la primera serie de unidades estensas, esto es, pulgadas, palmos, cuadrados, etc.; y por la misma razon la línea directriz debe dividirse tambien en unidades, y entonces multiplicando el número de unidades de la una línea por el de la otra tendremos el valor de la superficie.

Supongamos ahora (Fig. 155) que el paralelógra-

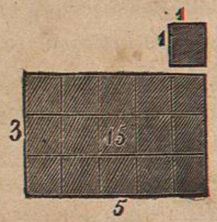

Fig. 155.

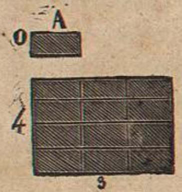

Fig. 156.

mo que debemos valuar tiene cinco pulgadas en la base y tres de altura: multiplicaré 5 por 3, y dará 15, porque la base tiene en sí cinco pulgadas cuadradas, la segunda serie tiene otras cinco, y las mismas la tercera: poniendo, pues, tres series de pul-

gadas cuadradas hemos agotado el paralelógramo que tiene tres de altura.

Núm. 219. Luego multiplicando la base del paralelógramo rectángulo por su altura tenemos su valor.

Si la unidad que ha de servir de medida no fuere cuadrado, sino paralelógramo (Fig. 156), v. g. si queremos saber cuantos ladrillos se necesitan para el pavimiento de una sala, debemos hacer la misma cuenta, mas con la cautela siguiente. Si A, que es el lado mayor del paralelógramo que sirve de unidad, fuere la base, el lado menor O debe servir para medir la altura del paralelógramo, porque de este modo multiplicando el primer orden tantas veces, cuantas la altura del ladrillo entra en la altura del paralelógramo, quedará agotado todo el espacio; y así $3 \times 4 = 12$, que es el valor del paralelógramo.

Para valuar los paralelógramos oblicuángulos haremos la reflexion siguiente: tomemos el paralelógramo rectángulo A (Fig. 157), y dividámosle en varios paralelógramos horizontales: si despues de esto, en vez de considerarlos unos sobre otros á plomo como en A, los considerare-

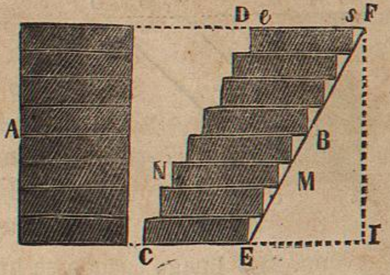

Fig. 157.

mos en la forma que se ve en B, el valor de ellos siempre será el mismo.

Tiremos ahora de las dos estremidades de la base CE dos paralelas á las estremidades de la línea DF; la línea CD cortará todos los triángulos que se ven en la figura, y la línea EF cerrará en la otra parte otros tantos espacios vacíos triangulares, en los que cabrian exactamente dos triángulos de la parte opuesta, pues la altura de los unos y de los otros es la misma; los ángulos adyacentes al lado que forma su altura son de un ángulo recto siempre igual, y otro ángulo formado por paralelas, que es igual por el núm. 45; por consiguiente cada triángulo de una parte es igual al vacío que le corresponde por la otra; y si los consideramos mudados á la parte opuesta, la llenarán perfectamente por el núm. 115. Hecho esto así, el paralelógramo rectángulo A se reduce al oblicuángulo B.

Núm. 220. Luego los paralelógramos que tienen la misma base y la misma altura son iguales; pues si el paralelógramo B (Fig. 138) es igual al rectángulo A, y este se valua multiplicando la base por la altura, del mismo modo se debe valuar su igual B, esto es, multiplicando la base RS, no por el lado SO, sino por la altura SE.

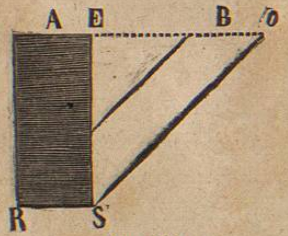

Fig. 138.

Núm. 221. Luego cuando se hubiere de valuar un paralelógramo oblicuángulo, se debe multiplicar

su base por la altura perpendicular, y no por uno de sus lados.

De paso observamos que el paralelógramo oblicuo B teniendo lados mas largos que el recto A, es igual á él en el valor. Luego puede el mismo espacio, sin mudar de valor, ser comprendido, ó por líneas mayores ó por menores (Fig. 138).

La razon es porque en los dos paralelógramos A y B los lados de A son líneas perpendiculares, los de B son oblicuas; y siendo siempre las líneas oblicuas mayores que las perpendiculares que caen sobre la misma línea por el núm. 57, pueden ser los espacios iguales, aunque las líneas que los comprenden no sean iguales.

Núm. 222. Luego los espacios ó superficies no siguen la misma proporcion de las líneas que los terminan.

Núm. 223. Dijimos que los triángulos eran la mitad de los paralelógramos que tuviesen la misma base y altura (núm. 216), y acabamos de decir que los paralelógramos de la misma base y altura son iguales; por consiguiente tambien lo serán las mitades respectivas.

Núm. 224. Luego los triángulos de la misma base y altura son iguales. A es igual á B (Fig. 139.

Núm. 225. Luego cuando nos dieren un triángulo para valuarle, lo podemos hacer por estos modos (Fig. 140).

I.

En el triángulo A multiplicando toda la base por

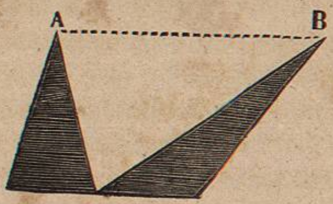

Fig. 139.

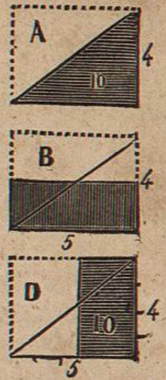

Fig. 140.

toda la altura, y tomando solamente la mitad de este producto para valor del triángulo. A, la base es 5, la altura es 4, el producto es 20, la mitad de este 10, será el valor del triángulo A.

II.

Multiplicando la base del triángulo B por media altura, entonces la base es 5, multiplicada por media altura 2 dará 10, valor del triángulo B.

III.

En D, multiplicando toda la altura 4 por la mitad de la base $2\frac{1}{2}$, resultan 10, valor del triángulo D; la razon es, porque de todos estos tres modos viene el triángulo á tener la mitad del valor de su paralelógramo.

Si nos dieren el trapecio de la (Fig. 141) : para hallar su valor haremos lo siguiente. Tiraremos la línea MN paralela á las dos faces ó lados paralelos

del trapecio, y en igual distancia de ellos : despues le multiplicaremos por la altura, haciendo un paralelógramo rectángulo. De este modo cortaremos del trapecio los dos triángulos inferiores, y formaremos en la parte superior otros dos, los que son iguales á los de abajo, porque la altura de ellos es la misma (pues esta se dividió por el medio) : los ángulos rectos son iguales, y los que son opuestos en el vértice tambien lo son; por consiguiente (núm. 115) el triángulo inferior es igual al superior que le corresponde; y así puestos los triángulos superiores en lugar de los inferiores, que son sus iguales, el trapecio se convierte en un paralelógramo rectángulo, cuyo valor es el producto de la paralela del medio multiplicada por toda la altura.

Núm. 226. Luego todo trapecio es igual al paralelógramo, en que la paralela del medio del trapecio se multiplica por la altura.

§ III.

Modo de valuar ó hallar el valor de los polígonos regulares y los círculos.

Núm. 227. Cualquiera polígono regular (Fig. 142)

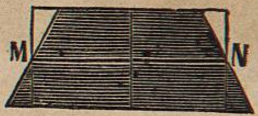

Fig. 141.

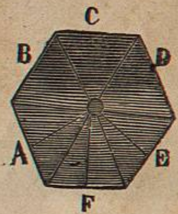

Fig. 142.

se puede dividir en triángulos iguales y semejantes, tirando líneas desde el centro á todos sus ángulos, por ser iguales todos los lados que forman la circunferencia y todos los ángulos, pues á no serlo no seria el polígono regular.

La línea perpendicular tirada desde el centro á los lados se llama *apóstema*.

Para hallar este centro, levantaremos una perpendicular del medio de un lado F, y levantando otra en medio del lado E se cruzarán en algun punto O; pero como el lado A tiene igual inclinacion á F, tambien la perpendicular desde el medio de este lado cortará á la de F en el mismo punto O, en que la cortó la perpendicular tirada de E. El mismo argumento se hace de los otros lados, y todas se cruzan en O.

Digo ahora que O será el centro del polígono, porque todos los triángulos tienen bases iguales en la circunferencia, y los ángulos adyacentes iguales, y así en todo son iguales; luego el círculo descrito de O, como de centro, puede pasar por todos los ángulos, pues todos los radios y lados de los triángulos son iguales.

Esto supuesto (Fig. 145), si yo separase todos

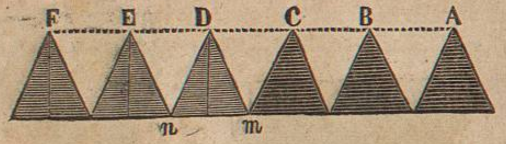

Fig. 145.

los triángulos en que se dividió el polígono, po-

niéndolos en línea recta, el conjunto de estos triángulos tendria el mismo valor del polígono.

Ademas de esto, ya se ve que los espacios vacíos que dejan entre sí estos triángulos, son otros triángulos iguales en situacion inversa, porque los lados son iguales, y los ángulos de los vértices comprendidos por ellos, tambien son iguales por ser alternos; pues los lados *CmDn* son paralelos por la igualdad de los ángulos de la base en todos los triángulos del polígono.

Supongamos, pues, que yo tomase los tres últimos triángulos D, E, F, para colocarlos sobre los tres primeros A, B, C (Fig. 144), ajustándolos en los vacíos que habia entre ellos, y que dividido por medio del triángulo F para colocarle en las estremidades: en este caso formaria un paralelógramo, cuya base seria media circunferencia del polígono, y su altura todo el apostema.

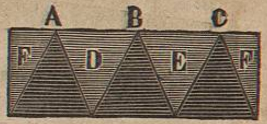

Fig. 144.

Núm. 229. Luego el polígono regular es igual á un paralelógramo, cuya base sea media circunferencia, y su altura todo el apostema.

Si divido por el medio el paralelógramo (Fig. 144), y pongo (Fig. 145) las dos mitades, una delante de

Fig. 145.

la otra, en este caso tendré un paralelógramo del mismo valor, cuya base seria toda la circunferencia, y su altura medio apostema solamente.

Núm. 230. Luego el polígono regular tambien es igual á un paralelógramo, cuya base sea toda la circunferencia, y cuya altura sea medio apostema.

Dividamos ahora este paralelógramo (Fig. 145), y tiremos en la una mitad la diagonal *ao*; haremos con ella un triángulo *n*, al cual podemos colocar sobre el punto *o* (Fig. 146), con el fin de que caiga

Fig. 146.

hácia otra parte, y haga un triángulo.

En estos términos el triángulo *m* seria igual á *n*, pues ambos tienen un ángulo recto, y los lados que le forman son iguales en uno y otro triángulo (núm. 115); y así el valor de ellos es el mismo: luego cortando el triángulo *m*, y poniendo *n* en su lugar, no se mudará el valor, y en este caso tenemos un triángulo, cuya base es toda la circunferencia, y su altura todo el apostema.

Núm. 231. Luego el polígono regular es igual á un triángulo, cuya base sea toda la circunferencia, y su altura toda el apostema.

Ahora, pues, el círculo (Fig. 147) se puede confundir con el polígono regular de lados infinitos, y

de este modo todo cuanto se dice el polígono regular se puede aplicar al círculo.

Núm. 232. Luego el círculo A es igual, lo primero al paralelógramo B, cuya base sea media circunferencia, y su altura todo el radio: lo segundo es igual á un paralelógramo C, cuya base sea toda la circunferencia, y su altura todo el radio.

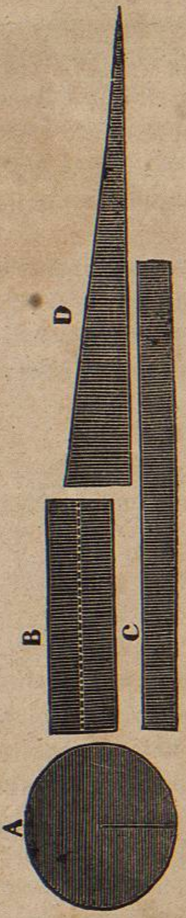

Fig. 147.

Hemos dicho que sector del círculo era una porcion de este comprendida entre dos radios y el arco (Fig. 148). En esta suposicion así como el círculo se reduce á un paralelógramo, cuya base sea toda la circunferencia, ó todos los arcos que le forman, y su altura medio radio, así podemos decir del sector. Y por la misma razon, así como el círculo se reduce á un paralelógramo, cuya base sea media circunferencia y su altura todo el radio, así tambien será el sector.

Núm. 233. Luego el sector del círculo (Fig. 148) será igual al paralelógramo A, que tiene por base

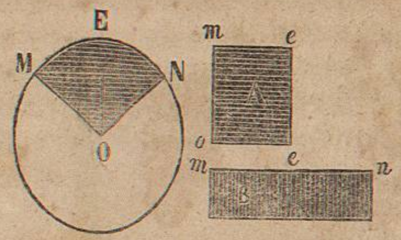

Fig. 148.

medio arco ME, y por altura todo el rayo MO, y tambien será igual al paralelógramo B, cuya base será igual á todo el arco M, E, N, y la altura la mitad del radio MO.

Dijimos en su lugar que el segmento era la parte del círculo comprendida entre la cuerda y el arco; por consiguiente, quitando del valor del sector (Fig. 149) el triángulo A hecho por la cuerda y dos radios, el resto será el valor del segmento.

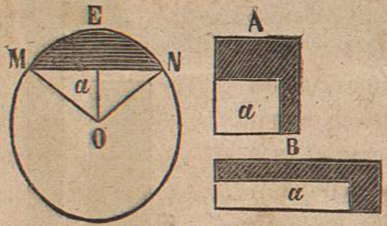

Fig. 149.

Para que esto se haga sensible pongamos los dos paralelógramos AB de la (Fig. 149), á los que reducimos el valor del sector, y reduzcamos ahora sobre ellos el triángulo *a* que está por bajo del segmento; reduzcámosle, digo, á los paralelógramos *a*, *a* para ver lo que resta; y primeramente empezando por el paralelógramo A, reduzcamos el triángulo *a* á un paralelógramo *a*, cuya base sea la mitad de la cuerda, y su altura todo el complemento de la flecha

(esto es, de la altura del segmento). Siguiendo despues en el paralelógramo B, reduzcamos el triángulo *a* á otro paralelógramo *a*, cuya base sea toda la cuerda, y su altura medio complemento de la flecha, como se ve en la figura B. Hecho esto, veremos lo que resta, y eso será el valor del segmento. No hay duda que es una figura irregular; pero se resuelve en dos paralelógramos rectos fáciles de valuar.

Núm. 254. Luego el segmento del círculo es igual al paralelógramo que tiene el valor del sector, menos el paralelógramo que tiene el valor del triángulo hecho por la cuerda y radios, como se ve en la (Fig. 149).

§ IV.

Modo de reducir un paralelógramo á otro.

Núm. 255. De lo dicho al núm. 220 se sigue que podemos reducir cualquier paralelógramo oblicuángulo B (Fig. 138) á otro recto A que le sea igual. Prolongaremos una base B del oblicuángulo, y levantaremos de las estremidades de la otra base RS dos perpendiculares hasta encontrar la línea AB, y quedará el paralelógramo recto igual á B.

Ahora daremos varios métodos para reducir cualquier paralelógramo á otro que se nos pida. Para esto es necesario saber (Fig. 150), que cuando tiramos una diagonal en un paralelógramo, y por al-