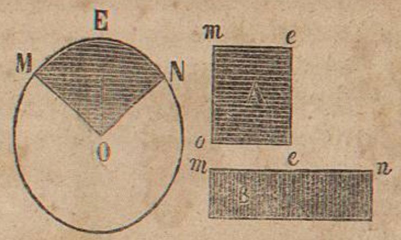

Fig. 148.

medio arco ME, y por altura todo el rayo MO, y tambien será igual al paralelógramo B, cuya base será igual á todo el arco M, E, N, y la altura la mitad del radio MO.

Dijimos en su lugar que el segmento era la parte del círculo comprendida entre la cuerda y el arco; por consiguiente, quitando del valor del sector (Fig. 149) el triángulo A hecho por la cuerda y dos radios, el resto será el valor del segmento.

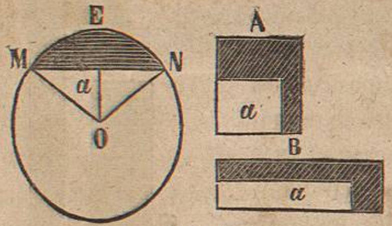

Fig. 149.

Para que esto se haga sensible pongamos los dos paralelógramos AB de la (Fig. 149), á los que reducimos el valor del sector, y reduzcamos ahora sobre ellos el triángulo *a* que está por bajo del segmento; reduzcámosle, digo, á los paralelógramos *a*, *a* para ver lo que resta; y primeramente empezando por el paralelógramo A, reduzcamos el triángulo *a* á un paralelógramo *a*, cuya base sea la mitad de la cuerda, y su altura todo el complemento de la flecha (esto es, de la altura del segmento). Siguiendo despues en el paralelógramo B, reduzcamos el triángulo *a* á otro paralelógramo *a*, cuya base sea toda la cuerda, y su altura medio complemento de la flecha, como se ve en la figura B. Hecho esto, veremos lo que resta, y eso será el valor del segmento. No hay duda que es una figura irregular; pero se resuelve en dos paralelógramos rectos fáciles de valuar.

Núm. 254. Luego el segmento del círculo es igual al paralelógramo que tiene el valor del sector, menos el paralelógramo que tiene el valor del triángulo hecho por la cuerda y radios, como se ve en la (Fig. 149).

§ IV.

Modo de reducir un paralelógramo á otro.

Núm. 255. De lo dicho al núm. 220 se sigue que podemos reducir cualquier paralelógramo oblicuángulo B (Fig. 138) á otro recto A que le sea igual. Prolongaremos una base B del oblicuángulo, y levantaremos de las estremidades de la otra base RS dos perpendiculares hasta encontrar la línea AB, y quedará el paralelógramo recto igual á B.

Ahora daremos varios métodos para reducir cualquier paralelógramo á otro que se nos pida. Para esto es necesario saber (Fig. 150), que cuando tiramos una diagonal en un paralelógramo, y por algun punto de dicha diagonal O tiramos dos paralelas á los dos lados del paralelógramo, formamos otros dos pequeños paralelógramos AB, que se llaman *complementos*.

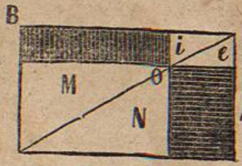

Fig. 150.

Para examinar si estos complementos AB son iguales, es preciso reparar en que la diagonal divide en triángulos iguales, no solo el paralelógramo total, sino tambien los dos paralelógramos parciales cortados por la diagonal; de este modo el triángulo M es igual á N, como el triángulo *i* es igual á *e*: por consiguiente, si del triángulo que está sobre la diagonal sacamos M é *i*, y del triángulo que está debajo de la diagonal quitamos N*e*, los dos rectos AB han de ser iguales,

Núm. 256. Luego los paralelógramos AB, que son complementos, son entre sí iguales. De esta regla general se toma la solucion de varios problemas:

I.

Núm. 257. Dado un paralelógramo A*a* (Fig. 151),

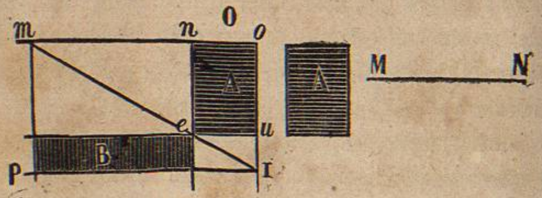

Fig. 151.

si nos piden otro igual que tenga un lado igual á la línea dada MN haremos lo siguiente:

1º Prolongaremos *on*, aumentándole con la dada MN ó *mn* su igual; y despues prolongaré igualmente *eu*, base inferior de A.

2º Prolongaremos indefinidamente los dos lados *ou* y *ne*, perpendiculares á *no*.

3º Tiraremos una diagonal desde *m* que pase por el ángulo *e* hasta encontrar la línea *ol*.

4º Del punto I, en que se encuentran las dos líneas, tiraré PI paralela, é igual á *mo*, y terminaré el paralelógramo *mo*, PI. Esto hecho, en él se ve que B es paralelógramo igual á A, y de la grandeza que nos le pidieron, porque ambos son complementos (núm. 256).

II.

Núm. 258. Si ademas de esto nos pidieren (Fig. 152) que el nuevo paralelógramo no solamente sea de la grandeza dada OE, sino que sea oblicuo y con un ángulo igual al ángulo M, haremos lo siguiente:

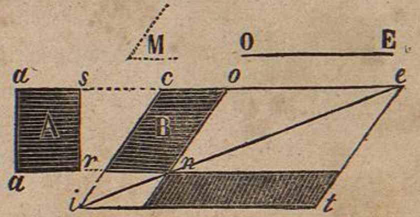

Fig. 152.

Continuaré indefinidamente las dos bases *as*, *ar*, y entre ellas formaré un paralelógramo oblicuángulo B igual á A (núm. 220), como el ángulo M.

Para reducir B á otro que sea igual, y tenga por un lado la línea dada OE, haremos la operacion como en el número precedente, habiendo antes prolongado las dos bases de B y los otros dos lados *ci*, *on*; y tirando despues la diagonal *en* hasta encontrar la línea *ci*, y acabando el paralelógramo *ceit*, se determina la altura del paralelógramo D.

De este modo el paralelógramo D será igual á B, por ser ambos complementos (núm. 256), y por consiguiente D tambien será igual á A, y tendrá todas las circunstancias que se pidieron.

III.

Núm 259. Demos un campo como la representa la (Fig. 153), de forma que un dueño sea señor de todo el espacio blanco, y otro de todo el espacio oscuro; pídese que sin hacer mediacion alguna de las dos lindes se dé una línea recta *xy* paralela á E*i*, la cual divida los campos en tal forma, que sin perjuicio de los poseedores una sola línea separe sus posesiones. Haremos lo siguiente:

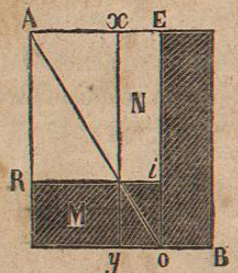

Fig. 153.

1° Prolongaremos la línea E*i* hasta O.

2° Pondremos uno de los dueños en O, y el otro en A.

3° Pasearemos por la línea R*i* hasta que nuestra persona impida el que los dos poseedores se vean,

4° Por el punto *n* en que esten nuestros pies tira-

remos la línea *yx*, la cual dará satisfaccion á lo que se pidió; la razon es porque el paralelógramo M, que el uno pierde de su antigua posesion, es igual á N que adquiere de nuevo, pues MN son *complementos* (núm. 256).

IV.

Núm. 240. Para convertir un paralelógramo cualquiera en un cuadrado igual haremos lo siguiente:

Núm. 241. Debemos traer á la memoria lo que se dijo de las proporcionales (núm. 145), que cuando tres cantidades estaban en progresion, el producto de los estremos era igual al cuadrado del término medio.

Ahora bien, siendo el paralelógramo dado M (Fig. 154), pondré como primer término de la progresion su altura A, y por tercer término su longitud C. Esto hecho, buscaré una media proporcional entre AC, la que será *b*, y este será el lado del cuadrado N que me piden, porque estando en progresion las tres líneas $\div a : b : c$, inferiremos luego $a \times c = b \times b$, ó b^2 (núm. 145), por consiguiente M es igual á N.

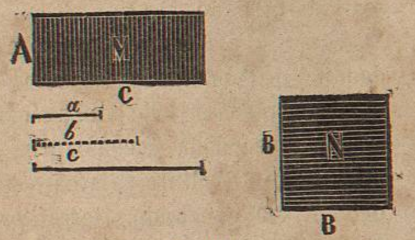

Fig. 154.

V.

Tambien podemos resolver por otro modo el problema del núm. 237 valiéndonos de las proporciones.

Núm. 242. Sea dado (Fig. 155) el paralelógramo

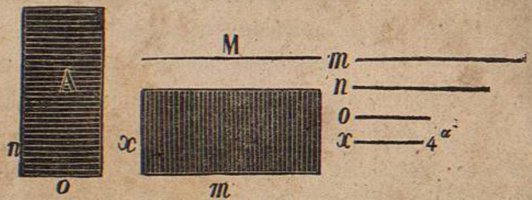

Fig. 155.

A, y pídase otro cuyo lado sea M: ignoramos cual deba ser su altura x para que este paralelógramo sea igual al dado.

Dijimos que estando en proporcion cuatro cantidades el producto de los estremos es igual al de los medios (núm. 141); de aquí se sigue, que si yo pusiere la línea dada M como primer término de la proporcion, la altura y la base del paralelógramo dado A como segundo y tercer término, tendré en el cuarto término x la altura del paralelógramo B, y podré entonces decir si $m:n::o:x$; luego $m\times x = n\times o$; por consiguiente A formado por $o\times n$ es igual á B hecho $m\times x$.

§ V.

Reduccion de las figuras irregulares á otras tambien irregulares.

Dijimos (núm 224) que los triángulos de la misma base y altura eran iguales; y de esta proposicion se sacan varias consecuencias.

I.

Núm. 243. Si nos dieren un pentágono B (Fig. 156) para reducirle á un cuadrilátero haremos lo siguiente:

1º Tiraremos una diagonal MN, y por el vértice I una paralela á la diagonal.

2º Continuaremos uno de los lados de la porcion inferior hasta encontrar en la paralela O, y tiraremos la línea MO: en este caso el triángulo que hacemos de nuevo MON es igual al que antes habia MIN, por tener la misma base y la misma altura; luego el cuadrilátero EMOA será igual al pantágono que nos habian dado.

Fig. 156.

II.

Núm 244. Supongamos que quieren reducir (Fig. 157) este ú otro cuadrilátero á un triángulo;

haremos la misma operacion tirando la diagonal MA

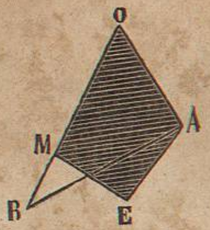

Fig. 157.

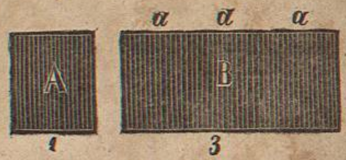

Fig. 158.

y la paralela RS, y despues la línea RA.

Porque esto hecho, el triángulo antiguo MEA es igual al nuevo MEA ; y de este modo el cuadrilátero MEAO será igual al triángulo RAO.

III.

Núm. 245. Si nos dieren un triángulo y pidieren un paralelógramo igual, haremos lo que se dijo al núm. 225.

IV.

Núm. 246. Si nos dieren un triángulo y nos pidieren un cuadrado igual, le reduciré primero á un paralelógramo, conforme á lo dicho (núm. 225), y despues reduciré este paralelógramo á un cuadrado por el método del núm. 244.

§ VI.

De las proporciones de las superficies del mismo nombre, supuesto que sean desemejantes entre sí.

Núm. 246. Conocido el valor de las superficies

conviene saber la razon que tienen entre sí : principiemos por las que tienen el mismo nombre, v. g., paralelógramos entre sí y triángulos entre sí, y para esto hemos de atender ya á sus bases, ya á sus alturas, y ya á todo igualmente.

Siendo la altura de los dos paralelógramos AB (Fig. 158) la misma, si una base entra en la otra tres veces, dividida la base por paralelas aparece A tres veces en B.

Núm. 248. Luego los paralelógramos de la misma altura estan entre sí como sus bases.

Ahora bien, los triángulos son las mitades de sus paralelógramos, y son entre sí como estos (núm. 154).

Núm. 249. Luego los triángulos de la misma altura (Fig. 159) estan entre sí como sus bases.

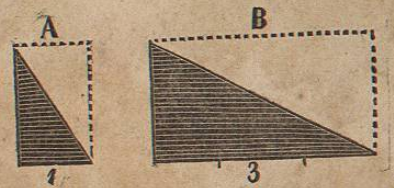

Fig. 159.

Si los paralelógramos AB (Fig. 160) tienen la misma base, en dividiendo la altura del mayor A por paralelas á la base, cuantas veces entra la altura del uno en la del otro, tantas entrará todo el paralelógramo B, que es el pequeño, en el grande A.

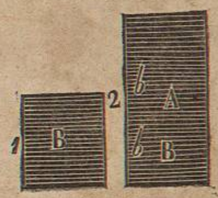

Fig. 160.

Núm. 250. Luego los paralelógramos de la misma base estan entre sí como sus alturas ; de suerte que si la altura de A fuere veinte veces mayor que la de B, por la operacion de las paralelas entrará B veinte veces en A.

Ahora bien, los triángulos ó las mitades de los paralelógramos son entre sí como estos.

Núm. 251. Luego los triángulos de la misma base (Fig. 161) estan entre sí como sus alturas, y si B es

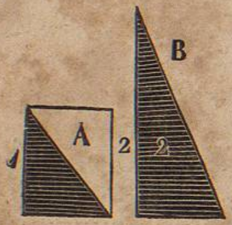

Fig. 161.

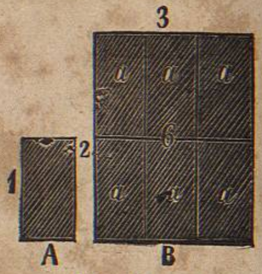

Fig. 162.

duplo de A, la mitad de B será duplo de la mitad de A.

Los paralelógramos pueden juntamente ser diferentes en la base y en la altura; de forma que (Fig. 162) divididas por paralelas las bases y las alturas, A puede entrar en B muchas veces por la cuenta de la base, y muchas por la cuenta de la altura.

Núm. 252. Luego los paralelógramos de diferente base y altura estan entre sí en la razon de sus bases, multiplicada por la razon de las alturas.

Y así si la base de A es tres veces mas pequeña que la de B, por esto solo entra A tres veces en B por el núm. 248; pero como en B la altura es dupla de A, las tres cantidades que ya se contenian en B vuelven á repetirse para formar el paralelógramo

B de altura dupla; por consiguiente B viene á ser seis veces mayor que A, esto es, está en razon de tres de la base multiplicada por dos de altura.

Ahora, pues, hemos dicho muchas veces que los triángulos, por ser la mitad de los paralelógramos, estan entre sí como ellos (núm. 154).

Núm. 253. Luego los triángulos de diversas bases y alturas (Fig. 163) estan entre sí en razon de las

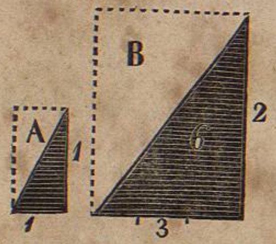

Fig. 163.

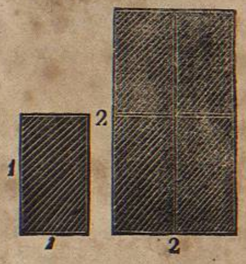

Fig. 164.

bases multiplicada por la de las alturas. Por esta razon completando los paralelógramos AB que les corresponden, se quedan siendo mitades de los paralelógramos que tienen entre sí esta razon.

§ VII.

De la proporcion de las superficies del mismo nombre y semejantes.

Núm. 254. Acabamos de decir que los paralelógramos y triángulos de diferente base y altura estan entre sí en la razon de las bases multiplicada por las alturas.

Pero cuando la razon de las bases y alturas es la misma, multiplicar una por otra es hacer el cuadrado de cualquiera de ellas.

Núm. 255. Luego los paralelógramos semejantes (Fig. 164) están entre sí como los cuadrados de cual-

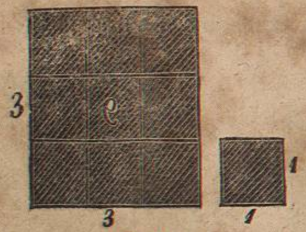

Fig. 165.

Fig. 166.

quiera de los lados, esto es, si el lado de uno fuere duplo del del otro, el paralelógramo grande será cuadruplo del pequeño. Asimismo (Fig. 165) si el lado de uno vale tres veces el del otro, todo el paralelógramo tendrá el valor del otro nueve veces.

Los triángulos son mitades de los paralelógramos.

Núm. 256. Luego los triángulos semejantes (Fig. 166) están entre sí como los cuadrados de los lados.

Núm. 257. De los triángulos semejantes podremos formar todas las figuras que fueren semejantes entre sí, y por consiguiente conservarán entre sí la misma razon que tenian los triángulos de que se formaron.

Núm. 258. Luego todas las figuras semejantes

(Fig. 167) tienen entre sí la misma razon que los cuadrados de sus lados homólogos.

Núm. 259. Luego todos los polígonos regulares y semejantes están entre sí como los cuadrados de sus lados homólogos. Pero como en los polígonos semejantes los lados están entre sí como los radios que los dividen, ó como los apotemas, esto es, como las líneas E*e* que salen del centro perpendiculares á los lados, diremos que los polígonos semejantes son como los cuadrados de los radios ó de los apotemas. De este modo (Fig. 167) el polígono B contiene cuatro veces A, pues el lado es dos.

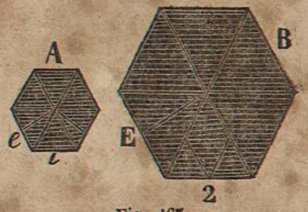

Fig. 167.

Sabemos que los círculos se pueden considerar como polígonos semejantes de infinitos lados, y que en este caso los apotemas se confunden con los radios; y por consiguiente los círculos están entre sí como los polígonos semejantes.

Núm. 260. Luego los círculos están entre sí como los cuadrados de los radios (Fig. 168). Y así si el radio de B es duplo del de A, el círculo B vale cuatro veces A.

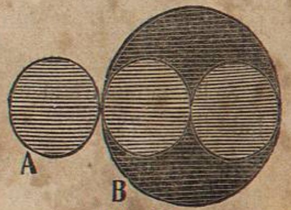

Fig. 168.

Los diámetros son cada uno dos radios, y tienen entre sí la misma razon que ellos.

Núm. 261. Luego los

círculos están entre sí como los cuadrados de los diámetros,

En los paralelógramos semejantes (Fig. 169) el esponente de la razon de las bases es el mismo que el de la razon de las alturas, y cuando se multiplica un esponente por otro se multiplica por sí mismo, y se hace un cuadrado de cualquiera de ellos. Pero lo que se dice de los paralelógramos semejantes se dice de los triángulos y de todas las figuras semejantes entre sí.

Núm. 262. Luego el esponente de figuras semejantes es el cuadrado del esponente de los lados (Fig. 169.

§ VIII.

De la razon que hay entre el círculo y los cuadrados inscrito y circunscrito, y del formado sobre el radio.

Núm. 264. Se llama cuadrado circunscrito aquel que se queda fuera del círculo, tocándole por todos cuatro lados. Este cuadrado precisamente ha de tener por lado el diámetro del círculo (Fig. 170).

Núm. 265. Se llama cuadrado inscrito el que se forma dentro del círculo, tocando la circunferencia con sus cuatro ángulos (Fig. 171).

Se llama cuadrado del radio el que le tiene por lado (Fig. 172).

Núm. 266. Ahora, pues, para conocer la razon que hay entre el círculo y el cuadrado circunscrito haré lo siguiente (Fig. 170).

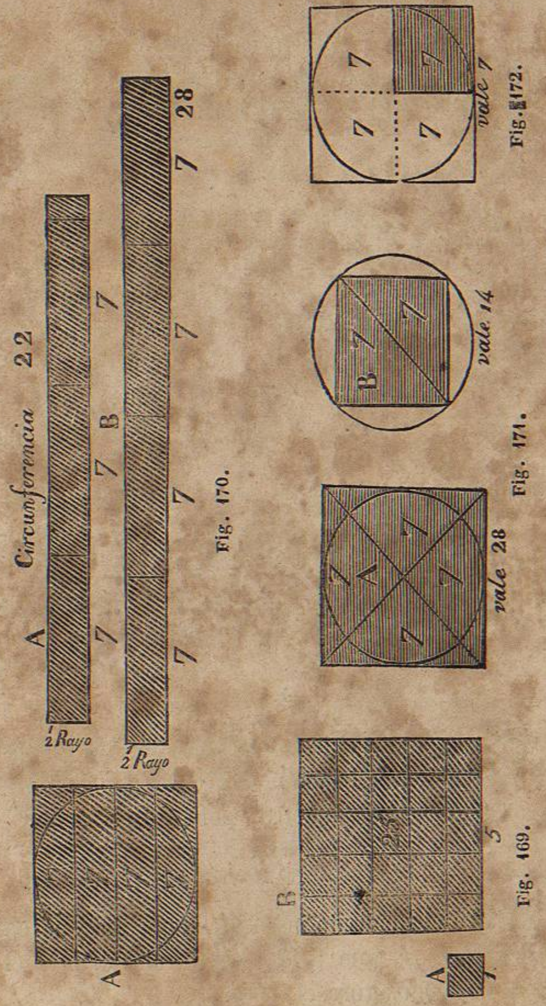

Fig. 169. Fig. 170. Fig. 171. Fig. 172.

I.

Reduciré el círculo á un paralelógramo A, cuya base sea la circunferencia y su altura medio radio (núm. 232): de este modo si el diámetro del círculo vale 7, la circunferencia de él ó grandeza del paralelógramo será 22 (núm. 130).

II.

Dividiré el cuadrado en cuatro paralelógramos iguales, quedando cada uno de ellos con la altura de medio radio y todo lo largo del diámetro; por consiguiente todos cuatro juntos hacen un paralelógramo B de la misma altura que A; pero su grandeza será cuatro veces 7, ó 28. Pero estos dos paralelógramos AB tienen la misma altura, y son como sus bases (núm. 248).

Núm. 267. Luego el círculo es al cuadrado circunscrito como la circunferencia es á cuatro diámetros, lo que viene á ser como 22 á 28.

Si queremos saber la proporcion del círculo con el cuadrado inscrito haremos lo siguiente (Fig. 171).

I.

Dividiremos el cuadrado circunscrito con dos diagonales en cuatro triángulos, y cada uno de ellos tendrá por base el diámetro y por altura el radio.

II.

Dividiré el cuadrado inscrito con una diagonal en dos triángulos, que tambien tendrán por base el diámetro y por altura el radio.

Núm. 268. Luego el cuadrado inscrito es la mitad del circunscrito. Por consiguiente el círculo es respecto del cuadrado inscrito como la circunferencia á dos diámetros, ó como 22 á 14.

Finalmente para saber la razon que hay entre el círculo y el cuadrado de su radio haré lo siguiente:

Dividiré el cuadrado circunscrito (Fig. 172) por dos diámetros en cuatro cuadrados iguales, y cada uno de ellos será cuadrado del radio; por consiguiente si el cuadrado circunscrito vale 28, el cuadrado del radio solamente valdrá 7.

Núm. 269. Luego el círculo es al cuadrado de su radio como la circunferencia á un diámetro, ó como 22 á 7. Luego los tres cuadrados que pertenecen á un círculo son como 7, 14, 28, valiendo el círculo 22.

§ IX.

De la razon que hay entre el cuadrado de la hipotenusa y los cuadrados de los otros dos lados.

Esta proposicion, que es famosísima, se atribuye á Pitágoras, de quien dicen que por haberla hallado sacrificó cien bueyes á las Musas en accion de gracias.

Para conocer, pues, la proporcion que hay entre el cuadrado T de la hipotenusa (Fig. 173) y los dos cuadrados AB, formados sobre los lados del triángulo *ab*, haremos lo siguiente:

I.

Tiraremos una perpendicular desde el vértice del