base sea la circunferencia y su altura medio radio (núm. 232) : de este modo si el diámetro del círculo vale 7, la circunferencia de él ó grandeza del paralelógramo será 22 (núm. 130).

II.

Dividiré el cuadrado en cuatro paralelógramos iguales, quedando cada uno de ellos con la altura de medio radio y todo lo largo del diámetro; por consiguiente todos cuatro juntos hacen un paralelógramo B de la misma altura que A; pero su grandeza será cuatro veces 7, ó 28. Pero estos dos paralelógramos AB tienen la misma altura, y son como sus bases (núm. 248).

Núm. 267. Luego el círculo es al cuadrado circunscrito como la circunferencia es á cuatro diámetros, lo que viene á ser como 22 á 28.

Si queremos saber la proporcion del círculo con el cuadrado inscrito haremos lo siguiente (Fig. 171).

I.

Dividiremos el cuadrado circunscrito con dos diagonales en cuatro triángulos, y cada uno de ellos tendrá por base el diámetro y por altura el radio.

II.

Dividiré el cuadrado inscrito con una diagonal en dos triángulos, que tambien tendrán por base el diámetro y por altura el radio.

Núm. 268. Luego el cuadrado inscrito es la mitad del circunscrito. Por consiguiente el círculo es respecto del cuadrado inscrito como la circunferencia á dos diámetros, ó como 22 á 14.

Finalmente para saber la razon que hay entre el círculo y el cuadrado de su radio haré lo siguiente:

Dividiré el cuadrado circunscrito (Fig. 172) por dos diámetros en cuatro cuadrados iguales, y cada uno de ellos será cuadrado del radio; por consiguiente si el cuadrado circunscrito vale 28, el cuadrado del radio solamente valdrá 7.

Núm. 269. Luego el círculo es al cuadrado de su radio como la circunferencia á un diámetro, ó como 22 á 7. Luego los tres cuadrados que pertenecen á un círculo son como 7, 14, 28, valiendo el círculo 22.

§ IX.

De la razon que hay entre el cuadrado de la hipotenusa y los cuadrados de los otros dos lados.

Esta proposicion, que es famosísima, se atribuye á Pitágoras, de quien dicen que por haberla hallado sacrificó cien bueyes á las Musas en accion de gracias.

Para conocer, pues, la proporcion que hay entre el cuadrado T de la hipotenusa (Fig. 173) y los dos cuadrados AB, formados sobre los lados del triángulo *ab*, haremos lo siguiente:

I.

Tiraremos una perpendicular desde el vértice del triángulo, la que le dividirá en dos *ab*, los cuales

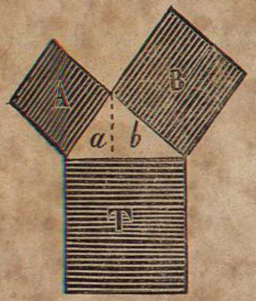

Fig 173.

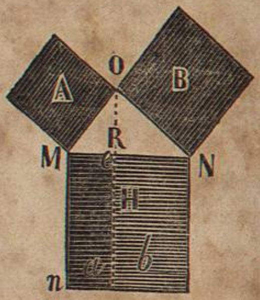

Fig. 174.

son semejantes entre sí y al triángulo total por tener cada uno un ángulo recto.

II.

Debemos tener presente que los triángulos semejantes son entre sí como los cuadrados de sus lados (núm. 256); y así los tres triángulos *ab* y el total son entre sí como los cuadrados ABT.

III.

Observemos que los dos triángulos pequeños *ab* juntos son iguales al grande; luego tambien los dos cuadrados pequeños AB juntos son iguales al grande T.

Núm. 270. Luego el cuadrado de la hipotenusa es igual á los dos cuadrados de sus lados.

Supuesto que es tan famosa esta proposicion, no será desagradable á los principiantes la noticia de algunas otras demostraciones que añadiremos aquí.

Formemos un triángulo rectángulo R (Fig. 174), y sobre sus tres lados formemos los tres cuadrados A, B, H : bajemos desde el vértice del triángulo una perpendicular, que no solo divida la hipotenusa, sino tambien su cuadrado, en dos paralelógramos *ab*.

Pero segun el núm. 195 cuando se baja una perpendicular desde el vértice sobre la hipotenusa, cualquier lado del ángulo recto es media proporcional entre toda la hipotenusa y el segmento cortado por la perpendicular; y por consiguiente tenemos Me:MO::MO:MN; luego multiplicando el primer término por el último haremos un paralelógramo igual al cuadrado del término medio; y así el paralelógramo *a* es igual al cuadrado A. Por la misma razon *b* es igual á B; luego $a+b$, que hacen el cuadrado de la hipotenusa, es igual á $A+B$, cuadrados de los lados.

Tambien se puede demostrar por otro modo (Fig. 175). Tenemos el triángulo rectángulo AEO : queremos probar que el cuadrado de AO es igual al cuadrado de AE junto con el cuadrado de EO.

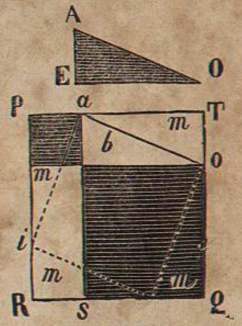

Fig. 175.

Pongamos el triángulo en *b*, y formemos sobre sus lados los dos cuadrados PQ; resultan los dos paralelógramos que se pintan claros, con los cuales se llenaria el cuadrado total de la figura P, T, R, Q.

Formemos ahora el cuadrado de la hipotenusa *ao*, y tendremos el cuadrado *a, o, i, s*. Este cuadrado deja cuatro triángulos *m, m, m, m*. Estos triángulos son iguales entre sí, y tambien iguales á *b*; lo que se conoce advirtiendo que los lados del cuadrado total PTRQ son iguales, y cada uno es igual á un lado pequeño de los triángulos junto con un lado grande, y como todos son rectángulos todos vienen á ser iguales. Pero cada paralelógramo claro vale dos triángulos *m, m*: luego tanto valen los dos paralelógramos claros como los cuatro triángulos *m, m, m, m*; pero si quitamos del cuadrado total los dos paralelógramos restan los dos cuadrados P y Q; y si quitamos del cuadrado total los cuatro triángulos quedará solo el cuadrado de la hipotenusa: luego tanto vale el cuadrado de la hipotenusa como los dos que se forman sobre los otros lados del triángulo.

El grande Euclides demuestra esta proposicion del modo siguiente (Fig. 176).

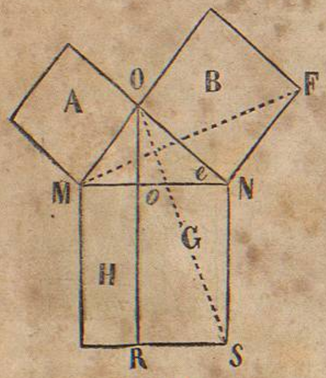

Fig. 176.

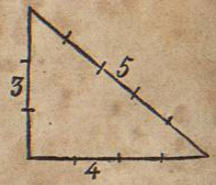

Fig. 177.

Forma el triángulo rectángulo MON, y los tres cuadrados sobre sus lados; tira una perpendicular sobre la hipotenusa, la cual divide su cuadrado en dos paralelógramos, y prueba despues que el paralelógramo G es igual al cuadrado B, así como el paralelógramo H es igual á A, lo que prueba del modo siguiente.

Primeramente los dos triángulos SON, NMF son iguales, pues ambos tienen un lado del cuadrado grande y otro lado del cuadrado B; y el ángulo comprendido entre ellos es compuesto del ángulo comun *e* y de un ángulo recto, lo que basta para ser iguales (núm. 112).

Pero el triángulo SON es la mitad del paralelógramo G, porque tiene el mismo valor que tendria si su vértice estuviese en *e*. Del mismo modo el triángulo NMF es la mitad del cuadrado B, porque tiene el mismo valor que tendria si su vértice M pasase á O: luego si la mitad de G es igual á la mitad de B, el paralelógramo G es igual al cuadrado B que le corresponde.

Del mismo modo se prueba que H es igual á A: luego si H y G hacen el cuadrado de la hipotenusa, será este igual á los dos cuadrados de los lados A+B.

Ve aquí las consecuencias de esta proposicion.

I.

Si el triángulo rectángulo (Fig. 177) tuviere un lado del ángulo recto que valga 3 y otro que valga 4, el cuadrado del 3 será 9 y el del otro 16, los cuales juntos hacen 25: así el cuadrado de la hipotenusa será 25, cuya raiz es 5.

Núm. 271. Luego en el triángulo rectángulo si el ángulo recto está hecho por lados del valor de 3 y de 4, la hipotenusa será 5.

II.

Núm. 272. Si quisiéremos levantar una perpendicular en la estremidad de una línea (Fig. 178),

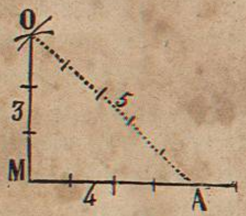

Fig. 178.

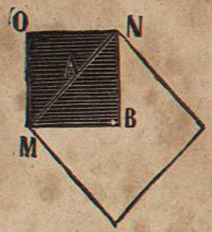

Fig. 179.

cuando el terreno no permite prolongarla ni trabajar mas abajo de ella, lo haremos con el método siguiente :

1º Señalaremos con el compas en la línea dada cinco medidas iguales.

2º Tomaremos tres medidas con el compas, y desde el punto M describiré un arco.

3º Tomaré con el compas cinco medidas, y llegando al punto A, que termina cuatro medidas, describiré otro arco que cortará al primero en O, y desde ese punto bajaré una perpendicular M, la cual sin duda es perpendicular, porque siendo el triángulo formado con lados de 3, 4, 5 medidas, necesariamente será rectángulo.

III.

Núm. 273. Siempre que el triángulo rectángulo fuere isósceles, v. g. como cuando (Fig. 179) dividimos un cuadrado por su diagonal, el cuadrado de la hipotenusa será duplo de cualquiera cuadrado que se forme sobre los lados, porque siendo el de la hipotenusa igual á la suma de los dos cuadrados de los lados, es duplo de las mitades de esa suma ; y así,

Si nos dan un cuadrado A (Fig. 179), y nos pidieren otro que sea doble de él, tiraremos una diagonal, y esa será el lado del nuevo cuadrado B, porque es hipotenusa de un triángulo isósceles.

Núm. 274. Luego hay método para formar un cuadrado duplo de otro dado.

IV.

Si en un cuadrado A tiramos las diagonales RM, ON, serán mutuamente perpendiculares (Fig. 180); porque la primera tiene dos puntos RM igualmente distantes de las estremidades de la otra (núm. 32); y del mismo modo la segunda respecto de la primera, y por tener cada una dos puntos igualmente distantes de las estremidades de la otra se cortan por el medio (núm. 33), por consiguiente el triángulo NcM es rectángulo é isósceles.

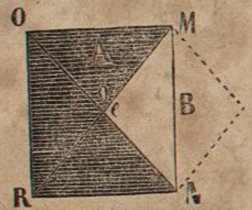

Fig. 180.

Luego el cuadrado de la hipotenusa NM es duplo del cuadrado sobre uno de sus lados oM; y por consiguiente el nuevo cuadrado B es la mitad del que nos dieron A.

Núm. 275. Luego tenemos método para formar un cuadrado B que sea la mitad de otro cuadrado que nos hayan dado A.

V.

Núm. 276. Si nos pidieren que reduzcamos á un solo cuadrado dos cuadrados dados AB (Fig. 181), haremos lo siguiente :

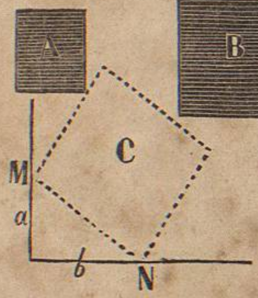

Fig. 181.

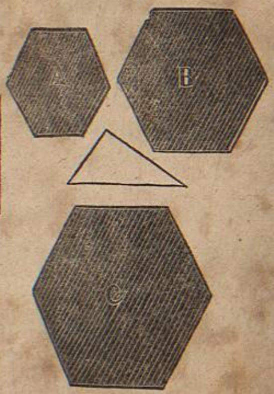

Fig. 182.

1° Formaremos un ángulo recto con líneas indefinidas.

2ª Pondremos de una parte el lado de A y de otra el de B : tiraremos una línea MN, que será hipotenusa, y por lo mismo el cuadrado C que está sobre ella será igual á los dos juntos AB.

§ X.

Aplicacion de la doctrina de la hipotenusa á los polígonos y circulos.

Dijimos al núm. 261 que todas las figuras semejantes eran entre sí como los cuadrados de sus lados correspondientes; pero los polígonos regulares del mismo número de lados son figuras semejantes.

Núm. 277. Luego el polígono regular sobre la hipotenusa es igual á los dos polígonos semejantes sobre los dos lados. Y así el polígono C (Fig. 182) es igual á los dos AB.

Como los círculos se pueden considerar á manera de polígonos regulares, podemos decir de los círculos lo que acabamos de decir de los polígonos.

Núm. 278. Luego el círculo sobre la hipotenusa es igual á los dos círculos sobre los lados (Fig. 183); y así C será igual á B junto con A; y si el triángulo fuere isósceles, el círculo de la hipotenusa será doblado del círculo de cualquiera de los lados (núm. 275).

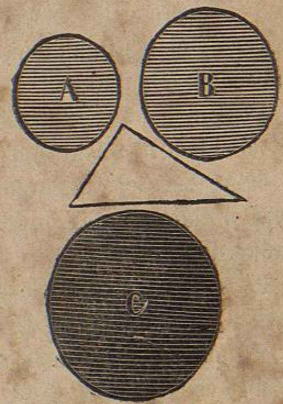

Fig. 183.

De esta definicion se sacan las consecuencias siguientes :

I.

Si nos dieren una corona ó un anillo (Fig. 184),

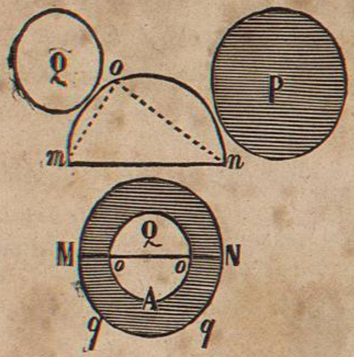

Fig. 184.

Fig. 185.

y nos pidieren un círculo que sea igual al anillo, la operacion se hará de este modo :

1º Tomaré el diámetro esterior del anillo MN para hacer de él una hipotenusa, describiendo sobre ella un medio círculo *mon*.

2º Tomaré el diámetro interior del anillo, y haré de él el lado *mo* del triángulo rectángulo.

3º Acabaré el triángulo con la línea *on*, y esta será el diámetro del círculo P, el cual será igual al anillo dado.

Pues el círculo A de la hipotenusa es igual á los dos PQ, luego A menos Q ha de ser igual á P; pero A menos Q es lo mismo que el anillo, porque el círculo Q es igual al vacío Q, y así lo mismo es decir A menos Q que decir el anillo, y por consiguiente el anillo A es igual á P.

Núm. 279. Luego hay método para reducir un anillo ó corona á un círculo entero.

II.

Si nos dieren (Fig. 185) una luna ó creciente B para reducirla á un círculo entero, procederé como en el caso precedente, porque tanto monta quitar de un círculo grande uno pequeño concéntrico, como sacarle mas de un lado que de otro, lo que hace que en lugar de una corona ó anillo tengamos una especie de luna nueva. No obstante se ha de advertir, que el círculo pequeño A no debe salir del grande en ningun caso para que la demostracion tenga su vigor.

III.

Si nos dieren un círculo A (Fig. 186), y nos pidieren otro que sea duplo de este, lo haré del modo siguiente :

1º Tiraré dos diámetros en ángulo recto y los uniré con una hipotenusa BO.

2º De esta hipotenusa me serviré como de radio para el nuevo círculo B.

En esta suposicion tenemos que B tiene como radio una hipotenusa, y A uno de los lados del triángulo, siendo este isósceles ; pero ya dijimos que los círculos eran como los cuadrados por el núm. 260; y por el 277 se dijo que el cuadrado de la hipotenusa era duplo del cuadrado de cualquiera de los lados : luego B será duplo de A.

Fig. 186.

Núm. 280. Luego hay método para hacer un círculo duplo á otro.

IV.

Si nos dieren un círculo A (Fig. 187), y nos pidie-

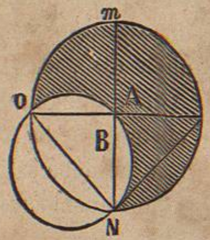

Fig. 187.

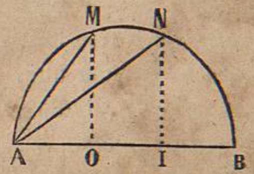

Fig. 188.

ren uno que sea la mitad del que nos dieron, lo haremos del modo siguiente.

Tírense los diámetros en ángulo recto y dos cuerdas *m*O, NO, que hagan con el diámetro un triángulo. Este será rectángulo (número 74) ; y como los arcos NO, *m*O son iguales, tambien las dos cuerdas lo son por el núm. 5, y queda el triángulo NO*m* isósceles y rectángulo ; por consiguiente el círculo A, que tiene por diámetro la hipotenusa *m*N, será duplo del nuevo círculo B, que solo tiene por diámetro uno de los lados NO, como dijimos al núm. 278.

Núm. 281. Luego tenemos método para hacer un círculo B, que sea la mitad de otro dado A.

§ XI.

Modo de formar cuadrados y círculos en cualquiera razon que nos pidieren con respecto á los que nos fueren dados.

Núm. 282. Dijimos al núm. 196, que tirando de la estremidad de un diámetro (Fig. 188) una cuerda AM, esta era media proporcional entre todo el diámetro AB, y su segmento AO, cortado por la perpendicular MO.

Pudiendo entonces decir ÷÷AO:AM:AB ; por consiguiente el producto de los estremos ha de ser igual al cuadrado de la cantidad media ; esto es, AO×AB=AM², que es lo mismo que AM×AM. Del mismo modo (Fig. 188) puedo demostrar que la otra cuerda AN es media proporcional entre el diámetro AB y el segmento AI cortado por la perpendicular NI, pudiendo decirse AI:AN::AN:AB; y por consiguiente AI×AB=AN².

Núm. 283. Hacemos esto sensible en la (Fig. 189): las dos cuerdas M*r*, M*s* son

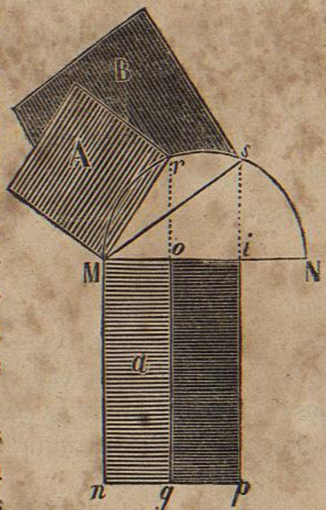

Fig. 189.