Núm. 280. Luego hay método para hacer un círculo duplo á otro.

IV.

Si nos dieren un círculo A (Fig. 187), y nos pidie-

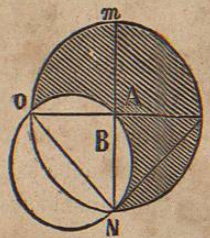


Fig. 187.

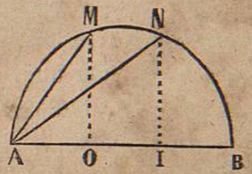


Fig. 188.

ren uno que sea la mitad del que nos dieron, lo haremos del modo siguiente.

Tírense los diámetros en ángulo recto y dos cuerdas *m*O, NO, que hagan con el diámetro un triángulo. Este será rectángulo (número 74); y como los arcos NO, *m*O son iguales, tambien las dos cuerdas lo son por el núm. 5, y queda el triángulo NO*m* isósceles y rectángulo; por consiguiente el círculo A, que tiene por diámetro la hipotenusa *m*N, será duplo del nuevo círculo B, que solo tiene por diámetro uno de los lados NO, como dijimos al núm. 278.

Núm. 281. Luego tenemos método para hacer un círculo B, que sea la mitad de otro dado A.

§ XI.

Modo de formar cuadrados y círculos en cualquiera razon que nos pidieren con respecto á los que nos fueren dados.

Núm. 282. Dijimos al núm. 196, que tirando de la estremidad de un diámetro (Fig. 188) una cuerda AM, esta era media proporcional entre todo el diámetro AB, y su segmento AO, cortado por la perpendicular MO.

Pudiendo entonces decir ∺AO:AM:AB; por consiguiente el producto de los estremos ha de ser igual al cuadrado de la cantidad media; esto es, $AO \times AB = AM^2$, que es lo mismo que $AM \times AM$. Del mismo modo (Fig. 188) puedo demostrar que la otra cuerda AN es media proporcional entre el diámetro AB y el segmento AI cortado por la perpendicular NI, pudiendo decirse AI:AN::AN:AB; y por consiguiente $AI \times AB = AN^2$.

Núm. 283. Hacemos esto sensible en la (Fig. 189): las dos cuerdas M*r*, M*s* son

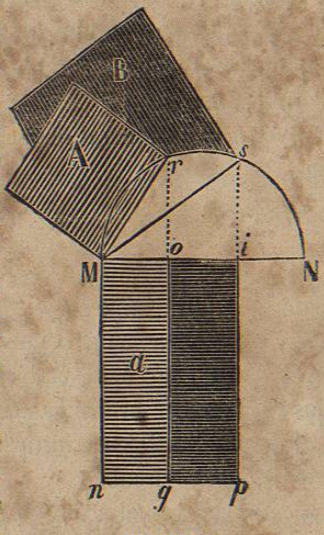


Fig. 189.

medias proporcionales entre el diámetro total MN, y sus dos segmentos Mo Mi; por consiguiente Mo: Mi::Mr:MN; luego Mo×MN=Mr×Mr.

Pero Mo×MN es el paralelógramo *a*, cuya base es Mo, y su altura es Mn=MN, y Mr×Mr es el cuadrado A: luego el paralelógramo *a* es igual al cuadrado A.

Del mismo modo se prueba que el paralelógramo total Mp es igual al cuadrado mayor B, cuyo lado sea la cuerda Ms.

Pero estos dos paralelógramos Mg, Mp teniendo la misma altura son entre sí como sus bases, esto es, como los segmentos Mo Mi; luego los dos cuadrados que le son iguales entre sí son como los segmentos Mo Mi.

Núm. 284. Luego los cuadrados de las cuerdas tiradas de la estremidad del diámetro son entre sí como los segmentos del diámetro cortados por sus perpendiculares.

De esta regla general se sacan varias consecuencias.

I.

Núm. 285. Si dado un cuadrado A (Fig. 190) nos pidieren á un tiempo otros varios que tengan diversa proporcion con el primero, v. g. 4 veces mayor 6, 9, 13 ó 15½ ó 20, en brevísimo tiempo podemos resolver este problema del modo siguiente.

1° Tírese una línea arbitraria, y descríbase sobre esta un medio círculo.

2° Tómese con el compas *ai*, lado del cuadrado A que nos dieron, y fórmese de él una cuerda *ai*,

que salga de la estremidad del diámetro; y de otra

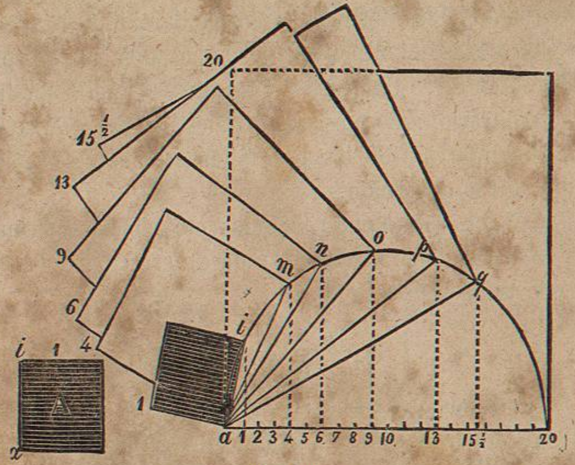


Fig. 190.

estremidad de la cuerda *i* tírese una perpendicular sobre el diámetro.

3° Tómese con el compas ese segmento *a* 1 del diámetro; con esta medida vamos dividiendo todo el diámetro en la forma de la figura.

4° Notaré el número 4, 6, 9, 13, 15½, 20, etc., que corresponden á los cuadrados que me pidieron; levantaré desde ellos perpendiculares, las cuales irán á terminar en los puntos de la circunferencia *m*, *n*, *o*, *p*, *q*, adonde tambien van á parar las cuerdas tiradas desde *a*, que serán los lados de los cuadrados que nos pidieren.

Por cuanto queda ya probado que estos diferentes cuadrados de la figura son entre sí, como los segmentos del diámetro, cortados por las perpendiculares (núm. 284); luego los nuevos cuadrados estan en esta misma proporcion de 4, 6, 9, 13, 15½.

Si acaso el número de los cuadrados que nos pidieren fuere tan largo que no quepa en el diámetro arbitrario que se escogió, tómese otra línea mayor á proporcion de las que faltaren, y repítase para estos la operacion.

Núm. 286. Luego tenemos método para formar con una sola operacion cualesquiera cuadrados en la razon que los pidan.

II.

Dijimos que los círculos estaban entre sí como los cuadrados de sus diámetros al número 261; por consiguiente podemos decir de los círculos, cuyos diámetros fueren las cuerdas (Fig. 191), que ellos

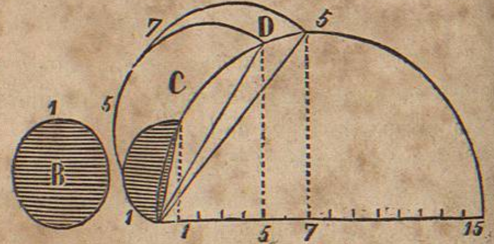


Fig. 191.

tienen entre sí la misma razon de los segmentos de un diámetro, cortados por varias perpendiculares que salen de las otras estremidades de las cuerdas; y así dándonos el círculo B, podremos hacer otros

CD, que sean cinco ó siete veces mayores, ó en cualquiera otra razon que los pidieren.

Núm. 287. Luego tenemos método para formar con una sola operacion los círculos que nos pidieren en cualquiera razon que se quiera respecto de algun círculo dado B.

III.

Núm. 288. Si nos dieren un círculo A (Fig. 192),

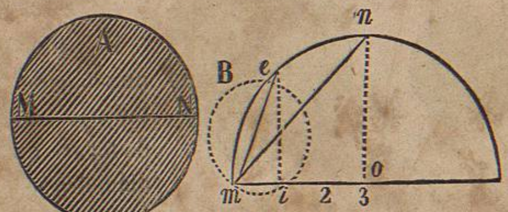


Fig. 192.

y nos pidieren otro que sea la tercera ó quinta parte de él, haremos lo siguiente.

1° Tírese una línea á discrecion, pero que sea mayor que el diámetro del círculo dado, y descríbase sobre ella un semicírculo; últimamente tírese una cuerda *mn* igual al diámetro MN del mismo círculo dado.

2° Tírese desde *n* una perpendicular sobre el diámetro *no*, y divídase este segmento del diámetro *mo* en tres partes iguales : de la division primera levántese una perpendicular, la que irá al punto *e* : desde este tírese la cuerda *em*, que será el diámetro del nuevo círculo B, el cual, por lo que ya que-círculos están entre sí como los cuadrados de los diámetros,

En los paralelógramos semejantes (Fig. 169) el esponente de la razon de las bases es el mismo que el de la razon de las alturas, y cuando se multiplica un esponente por otro se multiplica por sí mismo, y se hace un cuadrado de cualquiera de ellos. Pero lo que se dice de los paralelógramos semejantes se dice de los triángulos y de todas las figuras semejantes entre sí.

Núm. 262. Luego el esponente de figuras semejantes es el cuadrado del esponente de los lados (Fig. 169.

§ VIII.

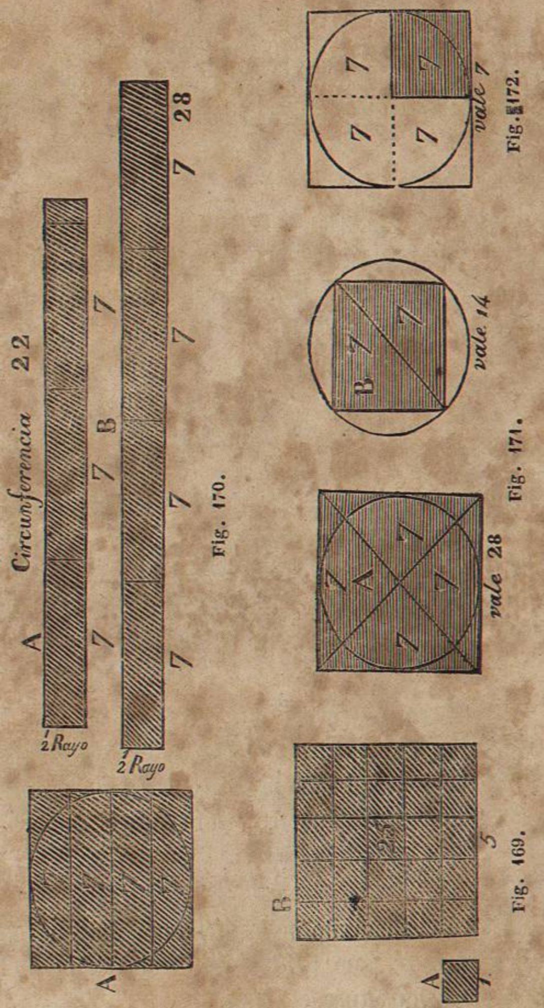
De la razon que hay entre el círculo y los cuadrados inscrito y circunscrito, y del formado sobre el radio.

Núm. 264. Se llama cuadrado circunscrito aquel que se queda fuera del círculo, tocándole por todos cuatro lados. Este cuadrado precisamente ha de tener por lado el diámetro del círculo (Fig. 170).

Núm. 265. Se llama cuadrado inscrito el que se forma dentro del círculo, tocando la circunferencia con sus cuatro ángulos (Fig. 171).

Se llama cuadrado del radio el que le tiene por lado (Fig. 172).

Núm. 266. Ahora, pues, para conocer la razon que hay entre el círculo y el cuadrado circunscrito haré lo siguiente (Fig. 170).



I.

Reduciré el círculo á un paralelógramo A, cuya base sea la circunferencia y su altura medio radio (núm. 232): de este modo si el diámetro del círculo vale 7, la circunferencia de él ó grandeza del paralelógramo será 22 (núm. 130).

II.

Dividiré el cuadrado en cuatro paralelógramos iguales, quedando cada uno de ellos con la altura de medio radio y todo lo largo del diámetro; por consiguiente todos cuatro juntos hacen un paralelógramo B de la misma altura que A; pero su grandeza será cuatro veces 7, ó 28. Pero estos dos paralelógramos AB tienen la misma altura, y son como sus bases (núm. 248).

Núm. 267. Luego el círculo es al cuadrado circunscrito como la circunferencia es á cuatro diámetros, lo que viene á ser como 22 á 28.

Si queremos saber la proporcion del círculo con el cuadrado inscrito haremos lo siguiente (Fig. 171).

I.

Dividiremos el cuadrado circunscrito con dos diagonales en cuatro triángulos, y cada uno de ellos tendrá por base el diámetro y por altura el radio.

II.

Dividiré el cuadrado inscrito con una diagonal en dos triángulos, que tambien tendrán por base el diámetro y por altura el radio.

Núm. 268. Luego el cuadrado inscrito es la mitad del circunscrito. Por consiguiente el círculo es respecto del cuadrado inscrito como la circunferencia á dos diámetros, ó como 22 á 14.

Finalmente para saber la razon que hay entre el círculo y el cuadrado de su radio haré lo siguiente:

Dividiré el cuadrado circunscrito (Fig. 172) por dos diámetros en cuatro cuadrados iguales, y cada uno de ellos será cuadrado del radio; por consiguiente si el cuadrado circunscrito vale 28, el cuadrado del radio solamente valdrá 7.

Núm. 269. Luego el círculo es al cuadrado de su radio como la circunferencia á un diámetro, ó como 22 á 7. Luego los tres cuadrados que pertenecen á un círculo son como 7, 14, 28, valiendo el círculo 22.

§ IX.

De la razon que hay entre el cuadrado de la hipotenusa y los cuadrados de los otros dos lados.

Esta proposicion, que es famosísima, se atribuye á Pitágoras, de quien dicen que por haberla hallado sacrificó cien bueyes á las Musas en accion de gracias.

Para conocer, pues, la proporcion que hay entre el cuadrado T de la hipotenusa (Fig. 175) y los dos cuadrados AB, formados sobre los lados del triángulo *ab*, haremos lo siguiente:

I.

Tiraremos una perpendicular desde el vértice del triángulo, la que le dividirá en dos *ab*, los cuales

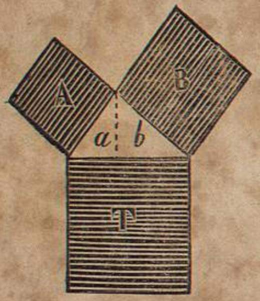


Fig 173.

Fig. 174.

son semejantes entre sí y al triángulo total por tener cada uno un ángulo recto.

II.

Debemos tener presente que los triángulos semejantes son entre sí como los cuadrados de sus lados (núm. 256); y así los tres triángulos *ab* y el total son entre sí como los cuadrados ABT.

III.

Observemos que los dos triángulos pequeños *ab* juntos son iguales al grande; luego tambien los dos cuadrados pequeños AB juntos son iguales al grande T.

Núm. 270. Luego el cuadrado de la hipotenusa es igual á los dos cuadrados de sus lados.

Supuesto que es tan famosa esta proposicion, no será desagradable á los principiantes la noticia de algunas otras demostraciones que añadiremos aquí.

Formemos un triángulo rectángulo R (Fig. 174), y sobre sus tres lados formemos los tres cuadrados A, B, H : bajemos desde el vértice del triángulo una perpendicular, que no solo divida la hipotenusa, sino tambien su cuadrado, en dos paralelógramos *ab*.

Pero segun el núm. 195 cuando se baja una perpendicular desde el vértice sobre la hipotenusa, cualquier lado del ángulo recto es media proporcional entre toda la hipotenusa y el segmento cortado por la perpendicular; y por consiguiente tenemos M*e*:MO::MO:MN; luego multiplicando el primer término por el último haremos un paralelógramo igual al cuadrado del término medio; y así el paralelógramo *a* es igual al cuadrado A. Por la misma razon *b* es igual á B; luego *a*+*b*, que hacen el cuadrado de la hipotenusa, es igual á A+B, cuadrados de los lados.

Tambien se puede demostrar por otro modo (Fig. 175). Tenemos el triángulo rectángulo AEO: queremos probar que el cuadrado de AO es igual al cuadrado de AE junto con el cuadrado de EO.

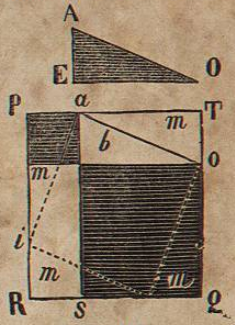


Fig. 175.

Pongamos el triángulo en *b*, y formemos sobre sus lados los dos cuadrados PQ; resultan los dos paralelógramos que se pintan claros, con los cuales se llenaria el cuadrado total de la figura P, T, R, Q.

Formemos ahora el cuadrado de la hipotenusa *ao*, y tendremos el cuadrado *a*, *o*, *i*, *s*. Este cuadrado deja cuatro triángulos *m*, *m*, *m*, *m*. Estos triángulos son iguales entre sí, y tambien iguales á *b*; lo que se conoce advirtiendo que los lados del cuadrado total PTRQ son iguales, y cada uno es igual á un lado pequeño de los triángulos junto con un lado grande, y como todos son rectángulos todos vienen á ser iguales. Pero cada paralelógramo claro vale dos triángulos *m*, *m* : luego tanto valen los dos paralelógramos claros como los cuatro triángulos *m*, *m*, *m*, *m*; pero si quitamos del cuadrado total los dos paralelógramos restan los dos cuadrados P y Q; y si quitamos del cuadrado total los cuatro triángulos quedará solo el cuadrado de la hipotenusa : luego tanto vale el cuadrado de la hipotenusa como los dos que se forman sobre los otros lados del triángulo.

El grande Euclides demuestra esta proposicion del modo siguiente (Fig. 176).

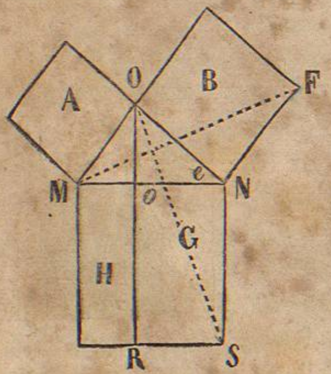


Fig. 176.

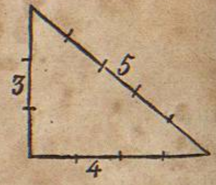


Fig. 177.

Forma el triángulo rectángulo MON, y los tres cuadrados sobre sus lados; tira una perpendicular sobre la hipotenusa, la cual divide su cuadrado en dos paralelógramos, y prueba despues que el paralelógramo G es igual al cuadrado B, así como el paralelógramo H es igual á A, lo que prueba del modo siguiente.

Primeramente los dos triángulos SON, NMF son iguales, pues ambos tienen un lado del cuadrado grande y otro lado del cuadrado B; y el ángulo comprendido entre ellos es compuesto del ángulo comun *e* y de un ángulo recto, lo que basta para ser iguales (núm. 112).

Pero el triángulo SON es la mitad del paralelógramo G, porque tiene el mismo valor que tendria si su vértice estuviese en *e*. Del mismo modo el triángulo NMF es la mitad del cuadrado B, porque tiene el mismo valor que tendria si su vértice M pasase á O : luego si la mitad de G es igual á la mitad de B, el paralelógramo G es igual al cuadrado B que le corresponde.

Del mismo modo se prueba que H es igual á A : luego si H y G hacen el cuadrado de la hipotenusa, será este igual á los dos cuadrados de los lados A+B.

Ve aquí las consecuencias de esta proposicion.

I.

Si el triángulo rectángulo (Fig. 177) tuviere un lado del ángulo recto que valga 3 y otro que valga 4, el cuadrado del 4 será 9 y el del otro 16, los cuales juntos hacen 25 : así el cuadrado de la hipotenusa será 25, cuya raiz es 5.