Luego el cuadrado de la hipotenusa NM es duplo del cuadrado sobre uno de sus lados oM; y por consiguiente el nuevo cuadrado B es la mitad del que nos dieron A.

Núm. 275. Luego tenemos método para formar un cuadrado B que sea la mitad de otro cuadrado que nos hayan dado A.

V.

Núm. 276. Si nos pidieren que reduzcamos á un solo cuadrado dos cuadrados dados AB (Fig. 181), haremos lo siguiente :

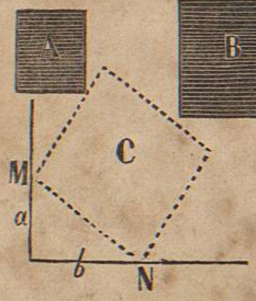

Fig. 181.

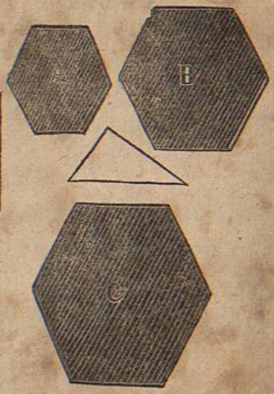

Fig. 182.

1° Formaremos un ángulo recto con líneas indefinidas.

2ª Pondremos de una parte el lado de A y de otra el de B : tiraremos una línea MN, que será hipotenusa, y por lo mismo el cuadrado C que está sobre ella será igual á los dos juntos AB.

§ X.

Aplicacion de la doctrina de la hipotenusa á los polígonos y círculos.

Dijimos al núm. 261 que todas las figuras semejantes eran entre sí como los cuadrados de sus lados correspondientes ; pero los polígonos regulares del mismo número de lados son figuras semejantes.

Núm. 277. Luego el polígono regular sobre la hipotenusa es igual á los dos polígonos semejantes sobre los dos lados. Y así el polígono C (Fig. 182) es igual á los dos AB.

Como los círculos se pueden considerar á manera de polígonos regulares, podemos decir de los círculos lo que acabamos de decir de los polígonos.

Núm. 278. Luego el círculo sobre la hipotenusa es igual á los dos círculos sobre los lados (Fig. 183); y así C será igual á B junto con A; y si el triángulo fuere isósceles, el círculo de la hipotenusa será doblado del círculo de cualquiera de los lados (núm. 275).

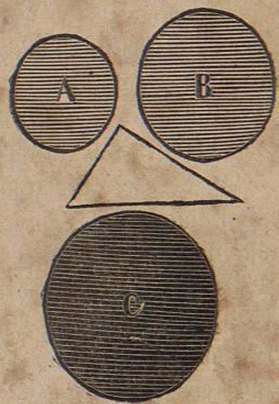

Fig. 183.

De esta definicion se sacan las consecuencias siguientes :

I.

Si nos dieren una corona ó un anillo (Fig. 184),

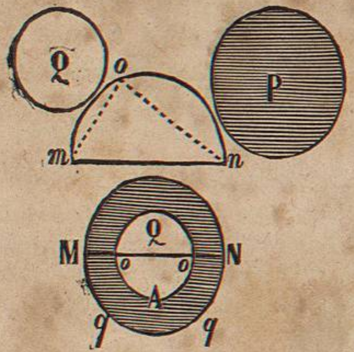

Fig. 184.

Fig. 185.

y nos pidieren un círculo que sea igual al anillo, la operacion se hará de este modo :

1º Tomaré el diámetro esterior del anillo MN para hacer de él una hipotenusa, describiendo sobre ella un medio círculo *mon*.

2º Tomaré el diámetro interior del anillo, y haré de él el lado *mo* del triángulo rectángulo.

3º Acabaré el triángulo con la línea *on*, y esta será el diámetro del círculo P, el cual será igual al anillo dado.

Pues el círculo A de la hipotenusa es igual á los dos PQ, luego A menos Q ha de ser igual á P; pero A menos Q es lo mismo que el anillo, porque el círculo Q es igual al vacío Q, y así lo mismo es decir A menos Q que decir el anillo, y por consiguiente el anillo A es igual á P.

Núm. 279. Luego hay método para reducir un anillo ó corona á un círculo entero.

II.

Si nos dieren (Fig. 185) una luna ó creciente B para reducirla á un círculo entero, procederé como en el caso precedente, porque tanto monta quitar de un círculo grande uno pequeño concéntrico, como sacarle mas de un lado que de otro, lo que hace que en lugar de una corona ó anillo tengamos una especie de luna nueva. No obstante se ha de advertir, que el círculo pequeño A no debe salir del grande en ningun caso para que la demostracion tenga su vigor.

III.

Si nos dieren un círculo A (Fig. 186), y nos pidieren otro que sea duplo de este, lo haré del modo siguiente :

1º Tiraré dos diámetros en ángulo recto y los uniré con una hipotenusa BO.

2º De esta hipotenusa me serviré como de radio para el nuevo círculo B.

En esta suposicion tenemos que B tiene como radio una hipotenusa, y A uno de los lados del triángulo, siendo este isósceles; pero ya dijimos que los círculos eran como los cuadrados por el núm. 260; y por el 277 se dijo que el cuadrado de la hipotenusa era duplo del cuadrado de cualquiera de los lados : luego B será duplo de A.

Fig. 186.

Núm. 280. Luego hay método para hacer un círculo duplo á otro.

IV.

Si nos dieren un círculo A (Fig. 187), y nos pidie-

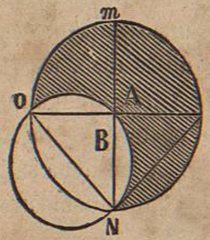

Fig. 187.

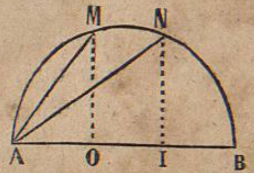

Fig. 188.

ren uno que sea la mitad del que nos dieron, lo haremos del modo siguiente.

Tírense los diámetros en ángulo recto y dos cuerdas *m*O, NO, que hagan con el diámetro un triángulo. Este será rectángulo (número 74); y como los arcos NO, *m*O son iguales, tambien las dos cuerdas lo son por el núm. 5, y queda el triángulo NO*m* isósceles y rectángulo; por consiguiente el círculo A, que tiene por diámetro la hipotenusa *m*N, será duplo del nuevo círculo B, que solo tiene por diámetro uno de los lados NO, como dijimos al núm. 278.

Núm. 281. Luego tenemos método para hacer un círculo B, que sea la mitad de otro dado A.

§ XI.

Modo de formar cuadrados y círculos en cualquiera razon que nos pidieren con respecto á los que nos fueren dados.

Núm. 282. Dijimos al núm. 196, que tirando de la estremidad de un diámetro (Fig. 188) una cuerda AM, esta era media proporcional entre todo el diámetro AB, y su segmento AO, cortado por la perpendicular MO.

Pudiendo entonces decir ÷AO:AM:AB; por consiguiente el producto de los estremos ha de ser igual al cuadrado de la cantidad media; esto es, $AO \times AB = AM^2$, que es lo mismo que $AM \times AM$. Del mismo modo (Fig. 188) puedo demostrar que la otra cuerda AN es media proporcional entre el diámetro AB y el segmento AI cortado por la perpendicular NI, pudiendo decirse AI:AN::AN:AB; y por consiguiente $AI \times AB = AN^2$.

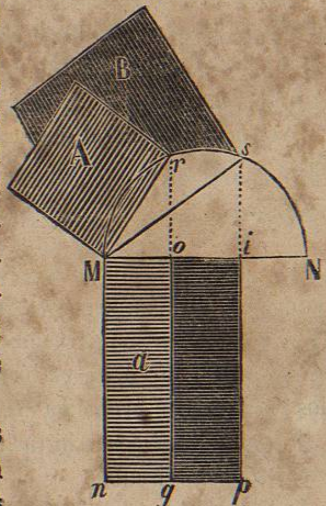

Fig. 189.

Núm. 283. Hacemos esto sensible en la (Fig. 189): las dos cuerdas M*r*, M*s* son medias proporcionales entre el diámetro total MN, y sus dos segmentos M*o* M*i*; por consiguiente $Mo : Mi :: Mr : MN$; luego $Mo \times MN = Mr \times Mr$.

Pero $Mo \times MN$ es el paralelógramo *a*, cuya base es M*o*, y su altura es $Mn = MN$, y $Mr \times Mr$ es el cuadrado A : luego el paralelógramo *a* es igual al cuadrado A.

Del mismo modo se prueba que el paralelógramo total M*p* es igual al cuadrado mayor B, cuyo lado sea la cuerda M*s*.

Pero estos dos paralelógramos M*g*, M*p* teniendo la misma altura son entre sí como sus bases, esto es, como los segmentos M*o* M*i*; luego los dos cuadrados que le son iguales entre sí son como los segmentos M*o* M*i*.

Núm. 284. Luego los cuadrados de las cuerdas tiradas de la estremidad del diámetro son entre sí como los segmentos del diámetro cortados por sus perpendiculares.

De esta regla general se sacan varias consecuencias.

I.

Núm. 285. Si dado un cuadrado A (Fig. 190) nos pidieren á un tiempo otros varios que tengan diversa proporcion con el primero, v. g. 4 veces mayor 6, 9, 13 ó 15½ ó 20, en brevísimo tiempo podemos resolver este problema del modo siguiente.

1º Tírese una línea arbitraria, y descríbase sobre esta un medio círculo.

2º Tómese con el compas *ai*, lado del cuadrado A que nos dieron, y fórmese de él una cuerda *ai*,

que salga de la estremidad del diámetro; y de otra

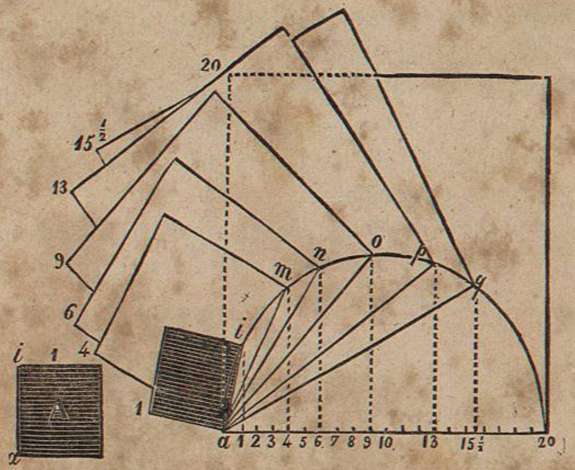

Fig. 190.

estremidad de la cuerda *i* tírese una perpendicular sobre el diámetro.

3º Tómese con el compas ese segmento *a* 1 del diámetro; con esta medida vamos dividiendo todo el diámetro en la forma de la figura.

4º Notaré el número 4, 6, 9, 13, 15½, 20, etc., que corresponden á los cuadrados que me pidieron; levantaré desde ellos perpendiculares, las cuales irán á terminar en los puntos de la circunferencia *m*, *n*, *o*, *p*, *q*, adonde tambien van á parar las cuerdas tiradas desde *a*, que serán los lados de los cuadrados que nos pidieren.

Por cuanto queda ya probado que estos diferentes cuadrados de la figura son entre sí, como los segmentos del diámetro, cortados por las perpendiculares (núm. 284); luego los nuevos cuadrados estan en esta misma proporcion de 4, 6, 9, 13, 15½.

Si acaso el número de los cuadrados que nos pidieren fuere tan largo que no quepa en el diámetro arbitrario que se escogió, tómese otra línea mayor á proporcion de las que faltaren, y repítase para estos la operacion.

Núm. 286. Luego tenemos método para formar con una sola operacion cualesquiera cuadrados en la razon que los pidan.

II.

Dijimos que los círculos estaban entre sí como los cuadrados de sus diámetros al número 261; por consiguiente podemos decir de los círculos, cuyos diámetros fueren las cuerdas (Fig. 191), que ellos

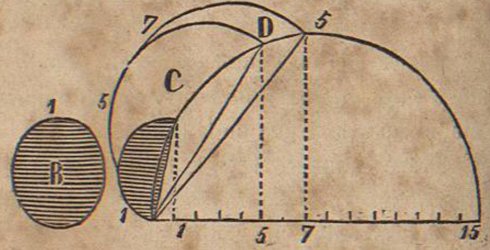

Fig. 191.

tienen entre sí la misma razon de los segmentos de un diámetro, cortados por varias perpendiculares que salen de las otras estremidades de las cuerdas; y así dándonos el círculo B, podremos hacer otros

CD, que sean cinco ó siete veces mayores, ó en cualquiera otra razon que los pidieren.

Núm. 287. Luego tenemos método para formar con una sola operacion los círculos que nos pidieren en cualquiera razon que se quiera respecto de algun círculo dado B.

III.

Núm. 288. Si nos dieren un círculo A (Fig. 192),

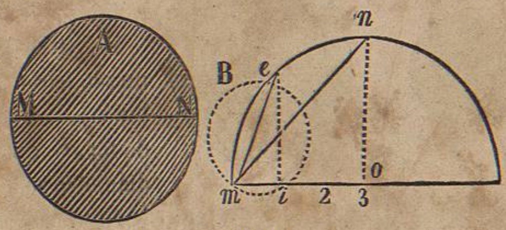

Fig. 192.

y nos pidieren otro que sea la tercera ó quinta parte de él, haremos lo siguiente.

1° Tírese una línea á discrecion, pero que sea mayor que el diámetro del círculo dado, y descríbase sobre ella un semicírculo; últimamente tírese una cuerda *mn* igual al diámetro MN del mismo círculo dado.

2° Tírese desde *n* una perpendicular sobre el diámetro *no*, y divídase este segmento del diámetro *mo* en tres partes iguales : de la division primera levántese una perpendicular, la que irá al punto *e* : desde este tírese la cuerda *em*, que será el diámetro del nuevo círculo B, el cual, por lo que ya queda dicho, será la tercera parte de A, por razon de que los círculos AB estan entre sí como los segmentos del diámetro *m* 1, *m* 3.

IV.

Núm. 289. Si habiéndonos dado dos cuadrados ó dos círculos AB (Fig. 193) nos preguntaren en qué razon estan entre sí, haremos lo siguiente.

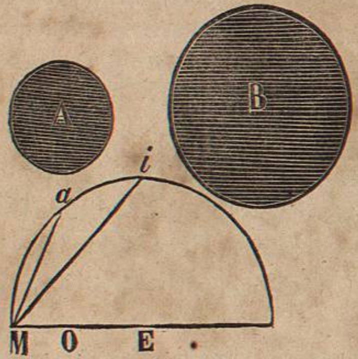

Fig. 193.

1º Descríbase un semicírculo arbitrario, bien que de forma que su diámetro sea mayor que el de cualquiera de ellos.

2º De los dos diámetros se harán dos cuerdas, ambas nacidas del punto M; y de las otras estremidades de las cuerdas bajaré perpendiculares sobre el diámetro del semicírculo.

3º Veré la proporcion que hay entre los dos segmentos de este diámetro MO, ME, y esa misma será la razon entre los dos círculos dados.

Del mismo modo se puede ejecutar si fueren cuadrados haciendo cuerdas de sus lados.

Núm. 290. Luego hay método para hallar la razon entre muchos cuadrados ó entre muchos círculos dados.

V.

Si nos dieren un círculo A (Fig. 194), y nos pidieren otro que sea, v. g. tres veces mayor, sin valernos de los cuadrados de las cuerdas, como el número 287, podremos hacerlo así.

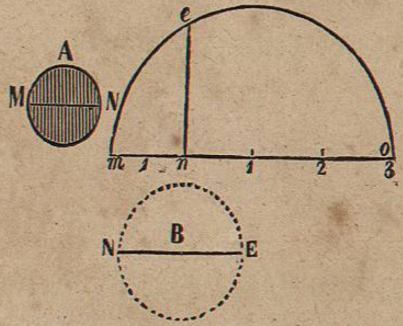

Fig. 194.

1º Pongamos el diámatro *mn* del círculo dado, y continuemos la línea, tomando otras tres porciones iguales.

2º Descríbase sobre esa línea total un semicírculo.

3º Levántese una perpendicular desde el punto *n*, y esta será el diámetro del nuevo círculo B, el que debe ser respecto de A como 3 á 1 : la razon ès, porque las tres líneas *mn*, *ne*, *no* estan en proporcion. Luego el cuadrado de la primera línea *mn* es al cuadrado de la segunda *ne*, como la primera línea es á la tercera *no* (núm. 116); y como los círculos estan entre sí como los cuadrados por el núm. 261, el círculo de *mn* es al de *ne*, como la línea de *mn* es á la línea *no*.

Luego tenemos otro método para hacer un círculo en la razon pedida respecto del que nos dieron, sin valernos de las cuerdas de los círculos.

§ XII.

Modo de hallar superficies que sean medias proporcionales entre dos superficies dadas.

Dijimos que cuando se multiplicaba una línea por otra se hacia un paralelógramo, en el que una de las líneas servia de base, y la otra de altura perpendicular (núm. 219); y que los paralelógramos de la misma base eran como las alturas (núm. 250), y los de la misma altura eran como sus bases (núm. 248).

Supongamos ahora que nos dan dos cuadrados AB (Fig. 195), que multiplicamos el lado de uno

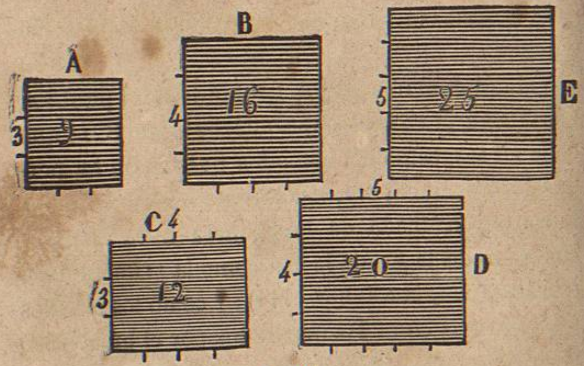

Fig. 195.

por el lado del otro, haremos el paralelógramo C.

Este paralelógramo respecto de A estará en razon de las bases, esto es, de tres á cuatro, y respecto de B, en razon de las alturas, tambien de tres á cuatro; pero como en los cuadrados la razon de las bases es la misma que la de las alturas, se sigue que la misma razon hay entre AC que entre CB; y por consiguiente C es media proporcional entre A y B.

Núm. 291. Luego hay método para hallar un paralelógramo que sea media proporcional entre dos cuadrados dados.

Por el mismo método (Fig. 195) si nos dieren otros dos cuadrados EB, en multiplicando un lado de B por otro de E, haremos el paralelógramo D, que será medio proporcional entre los dos, por la misma razon de arriba. Esto se confirma con los números; porque si A tuviere por lado 3 y B 4 (Fig. 195), A vale 9 y B 16; pero multiplicando 3, lado del 1, por 4, que lo es del otro, tendremos el paralelógramo 12, medio proporcional entre 9 y 16, porque podremos decir: 9:12::12:16, reinando en esta proporcion la razon de 3 y 4.

Del mismo modo si el lado de B vale 4, y el de E vale 5, multiplicando 4 por 5, haremos el paralelógramo, que vale 20, medio proporcional entre B, que vale 16, y E que vale 25, pudiendo decir: 16:20::20:25, pues en ambas partes reina la razon de 4 á 5.

Núm. 292. Si dados dos cuadrados nos piden otro nuevo, que sea medio proporcional entre los dos, haremos la siguiente.

Búsquese una media proporcional entre los la-