medio apotema, ó al paralelógramo H, en que se multiplica medio circuito de la base por todo el apotema.

Núm. 516. La superficie de la pirámide truncada P (Fig. 218) se compone de muchos trapecios, los cuales juntos hacen la figura B; pero reduciendo los trapecios á paralelógramos (núm. 226), esto es, multiplicando su altura *ma* por las medias paralelas *no*, todos ellos hacen un paralelógramo M, cuya base es la media paralela de los trapecios, y cuya altura es el apotema.

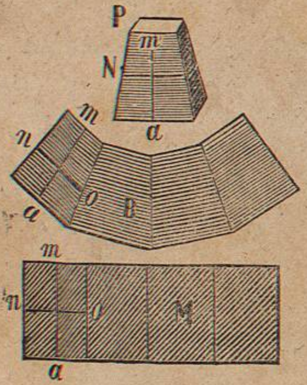

Fig. 218.

Núm. 517. Luego la superficie de una pirámide truncada P es igual á un paralelógramo M, cuya base es el circuito medio de la pirámide, y cuya altura sea todo el apotema.

Por la misma razon que confundimos el cono entero con la pirámide, debemos reputar el cono truncado por una pirámide truncada tambien y de infinitas caras.

Núm. 518. Luego la superficie del cono truncado E (Fig. 219) es igual al paralelógramo H, en el cual la base es el circuito medio del cono *ai*, y la altura todo su apotema *mn*.

Núm. 519. Si al cono entero le quitamos, aunque sea un solo punto del vértice, quedará truncado, y entonces no merece atencion la diferencia que solo procede de un punto. En este caso se puede reputar el uno como el otro, y discurrir de la superficie del uno como de la del otro, y así reducir la superficie del cono entero (Fig. 218) á un paralelógramo, cuya base sea el medio circuito Ae, y su altura todo el apotema, como se ve en H.

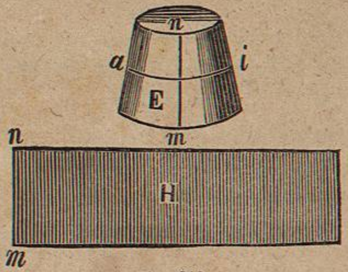

Fig. 219.

§ IV.

De la superficie de la esfera, y de los segmentos de esta.

Núm. 520. Así como podemos considerar un círculo como un polígono de infinitos lados, así tambien podemos confundir la esfera formada por un círculo, que da vuelta alrededor de su eje, como una esferoide formada por un polígono, que anda alrededor de su mismo diámetro (Fig. 220).

Por consiguiente para medir la superficie de la esfera bastará medir la superficie de la esferoide poligónica ó poliedro esferoide, no obstante que esta es de pocas caras, por cuanto esa misma doctrina se aplica á la de infinitas caras, y de esta se pasa á la esfera.

Para medir, pues, la superficie de esta esferoide haremos lo siguiente.

I.

Dividamos la esferoide (Fig. 220) en conos truncados, cortándola por las secciones *e*, *r*, *s*, *t*, etc.

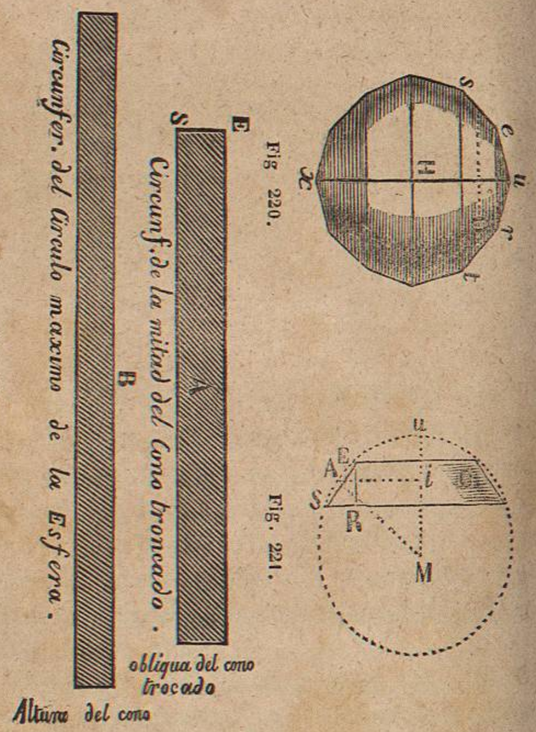

Fig. 220.

Fig. 221.

Fig. 222.

Ahora bien, supuesto lo dicho en el párrafo pre-

cedente podemos reducir la superficie de cada uno de estos conos truncados *s e* (Fig. 220), ó SE (Fig. 221) á un paralelógramo A (Fig. 222), en que la circular media sea la base, y los apotemos sean las alturas (núm. 518).

Mas como cada cono tiene su particular media circular y su especial apotema, es preciso que se procure reducir todas estas líneas á otras que sean de menos confusion; y para esto

II.

Tomemos uno de estos conos truncados *e*, *r*, *s*, *t*, que componen la esferoide, y pongámosle aparte (Fig. 221). Tírese una media paralela por la superficie de él, la que hará una circular, que debe tener su radio A*i*, que sale de M*u* eje del cono, y llega hasta A.

III.

Tírese desde el mismo punto A una línea hasta M, centro de la esferoide que se supone, y con la parte del eje M*i* completemos un triángulo de puntitos MA*i*.

IV.

Del punto E, en que termina el apotema del cono SE, bajaremos una perpendicular ER sobre su base.

V.

Dispuesto todo así tenemos dos triángulos, uno mayor MA*i*, otro menor SER.

Para probar, pues, que son semejantes, basta probar que los lados del uno son perpendiculares á los lados del otro, por cuanto la línea MA, que pasa por el centro y por medio de la cuerda SE, le es perpendicular (núm. 52). Y ademas de esto ER corta perpendicularmente á A*i*, porque es perpendicular sobre la base del cono, paralela de A*i*: y últimamente SR continuada va á cortar perpendicularmente á M*i* por ser parte del eje. Luego los dos triángulos son semejantes (núm. 178), y sus lados respectivos proporcionales; y así podemos decir : MA á A*i*, como SE á ER.

Pero sabemos que la circunferencia del radio A*i* será á la circunferencia del radio AM, como los dos radios son entre sí (núm. 205); por consiguiente en lugar de los dos radios podemos poner las dos circunferencias sin perder la proporcion, y así la circunferencia de MA es á la circunferencia de A*i*, como SE á ER, y podremos decir : circ. MA es á la circ. A*i*, como SE es á ER.

Luego multiplicando el primer término por el último tendremos el mismo producto que multiplicando el segundo por el tercero (número 141); y así la circunferencia MA multiplicada por ER, igual á la circunferencia A*i*, multiplicada por SE. Pero la circunferencia MA se diferencia de la circunferencia del círculo máximo de la esfera á proporcion que la línea MA, que hallamos en la esferoide, se diferencia del radio de la esferoide : por tanto, considerando la esferoide compuesta de infinitos conos truncados, ó como polígono general de infinitos lados, podremos confundir la esferoide con la esfera,

y la línea MA con el radio de la esfera, la cuerda SE con el arco SE, y la circunferencia de MA será lo mismo que la circunferencia del círculo máximo de la esfera; y podremos decir por consiguiente :

La circunferencia del círculo máximo de la esfera, multiplicada por la línea ER, es igual á la circunferencia de A*i* multiplicada por SE, y el paralelógramo A (Fig. 222) es igual á B.

Para hacer esto visible, pongamos B, cuya base es la circunferencia del círculo máximo de la esfera, y su altura la altura del cono, y tambien el paralelógramo A, cuya base es la circunferencia de A*i*, su altura la línea SE.

Núm. 521. Luego si la superficie del cono es igual al paralelógramo A, tambien lo es al paralelógramo B.

Por la misma razon, todos los demas conos truncados de que se compone la esferoide tendrán la superficie igual á los paralelógramos que tengan por base la circunferencia del círculo máximo de la esfera, y por altura las alturas de los conos.

Núm. 522. Luego la superficie de la esferoide de muchos lados ó poliedra es igual á un paralelógramo que tenga por base la circunferencia del círculo máximo, y por altura todas las alturas de los conos, ó el diámetro de la esferoide.

Mas como podemos confundir esta esferoide con la esfera se podrá decir.

Núm. 523. Luego la superficie de la esfera A (Fig. 223) es igual á un paralelógramo B, en el cual la circunferencia del círculo máximo de la esfera es la base, y el diámetro la altura.

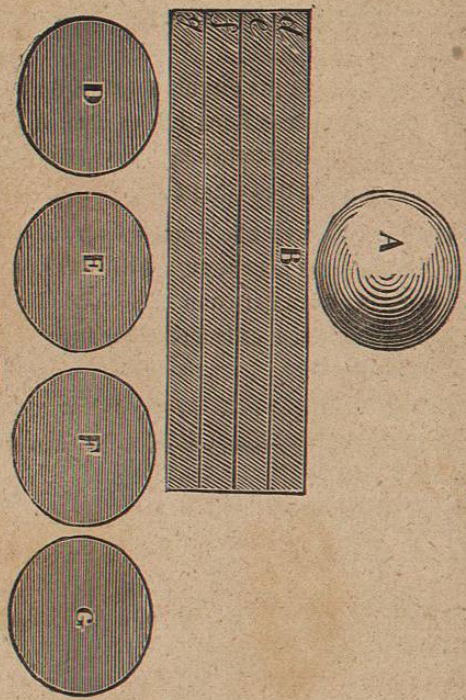

Fig. 223.

De estas verdades se deducen varias consecuencias.

I.

Núm. 324. Divídase este paralelógramo en cuatro paralelógramos iguales *d*, *e*, *f*, *g*, cada uno de ellos será igual á un círculo máximo de la esfera (núm. 232), por tener por base la circunferencia y por al-

tura el medio radio. Luego todo el paralelógramo B es igual á cuatro círculos máximos D, E, F, G.

Luego la superficie de la esfera A es igual á la de cuatro círculos máximos.

II.

Núm. 325. Como los cuatro círculos máximos son iguales á uno que tenga el diámetro duplo (núm. 264), se sigue (Fig. 224) : luego la superficie de la

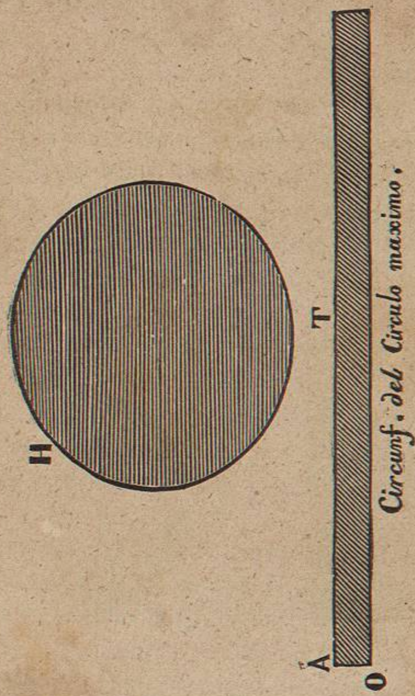

Fig. 224.

esfera A es igual á un círculo H que tenga por radio el diámetro de ella.

III.

Núm. 526. Luego (Fig. 225) la superficie convexa de una media esfera es dupla de su superficie plana; porque la superficie convexa de la media esfera vale dos círculos máximos, y la superficie plana solamente es uno.

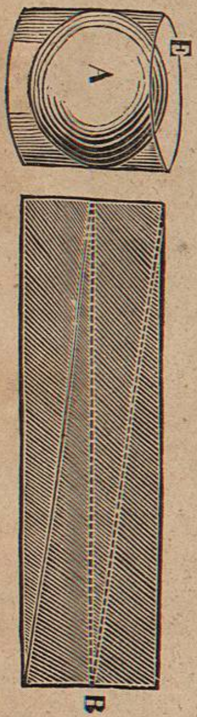

Fig. 227.

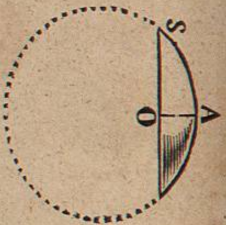

Fig. 225.

Fig. 226.

IV.

Cualquier segmento de la esfera se puede considerar compuesto de varios conos truncados unos sobre otros, como se dijo de la esferoide, cuyas superficies juntas son iguales á un paralelógramo, que tenga por base la circunferencia del círculo máximo de la esfera, y por altura la flecha AO (Fig. 226), ó la altura del segmento.

Núm. 527. Luego la superficie del segmento S es igual á un paralelógramo T, cuya base sea la circunferencia del círculo máximo de la esfera, y su altura la flecha.

V.

Ya dijimos que la superficie del cilindro circunscrito E (227) era igual á un paralelógramo B, cuya base fuese la circunferencia del cilindro ó la de la esfera, que es la misma, y cuya altura fuese la del cilindro ó el diámetro de la esfera (núm. 511).

Luego el mismo paralelógramo B, hecho por la circunferencia del círculo máximo de la esfera y su diámetro, medirá la superficie de la esfera A, y la del cilindro circunscrito E; y así podemos decir.

Núm. 528. Luego la superficie del cilindro circunscrito es igual á la de la esfera (Fig. 227), y por consiguiente será igual á cuatro círculos máximos.

Ya se dijo arriba de la superficie de los prismas y cilindros, que solo se atendia á la superficie que los rodea, prescindiendo de las dos bases superior é inferior. Por consiguiente si contamos la superficie total del cilindro circunscrito será igual á seis círculos máximos, siendo la superficie de la esfera igual á cuatro solamente.

§ V.

De la solidez ó valor de los prismas y de los cilindros.

Núm. 529. Toda medida, amigo Eugenio, es una repeticion ó multiplicacion de la unidad primitiva, y debe ser del mismo género que la cantidad que por ella se ha de medir ó valuar; y así si queremos medir líneas, esto es, distancias ó longitudes, la unidad debe ser línea ó distancia pura, como palmo, vara ó legua; pero si queremos medir superficies ó areas, la medida debe ser superficie, v. g. palmo cuadrado, vara cuadrada ó cosa semejante; por último, debe significar superficie ó espacio.

Finalmente, si queremos valuar sólido ó volumen, esto es, cosa que tenga las tres dimensiones de longitud, latitud y profundidad ó altura, la unidad debe ser tambien un sólido que las tenga, v. g. palmo cúbico, pulgada cúbica ó cosa semejante.

Núm. 530. Ademas de esto dijimos en la multiplicacion de una línea por otra para valuar las superficies, que la línea movil no se consideraba como línea matemática sin cuerpo, sino como una serie de partes ó unidades cuadradas, que se multiplicaban por el número de unidades que se consideran en la línea directriz. Así tambien cuando se quiere valuar el volumen de los sólidos no se ha de considerar la base movil como una superficie matemática sin grueso alguno, sino como una cantidad de

unidades sólidas, que puestas unas al lado de otras ocupan la base; y esta coleccion de unidades, que forman el primer orden de ellas, se debe multiplicar por el número de unidades que se consideran en la altura, haciendo de estas varias órdenes, como que todas llenan el espacio del sólido.

En esta suposicion para medir el volumen de cualquier sólido debemos valuar primero su base, y despues multiplicarla por el valor de la altura, lo que dará el valor del prisma.

Pongamos por ejemplo la (Fig. 228). El sólido A tiene en la anchura cuatro veces la de B. que le sirve de medida: tiene de profundo dos veces el sólido B; luego multiplicando 4 por 2 tenemos que la base de A está compuesta de ocho veces B; pero A tiene triple altura de B, y así es preciso repetir tres veces las ocho medidas B que se hallan en la primera orden de A; y así para formar el volumen de A son precisos 24 volúmenes de B.

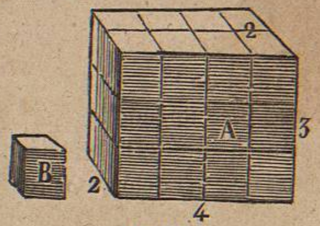

Fig. 228.

Núm. 531. Luego para valuar cualquier prisma recto, cuya base sea un paralelógramo recto, bastará multiplicar las tres dimensiones, longitud, latitud y profundidad; porque multiplicando la longitud por la latitud tenemos la base, y despues multiplicando la base por la profundidad tenemos el volumen; luego multiplicando las tres dimensiones sabremos el valor del sólido.

Advierto que podemos considerar cualquier lado del prisma como si fuese base, colocándole sobre él ; y así podemos variar el modo de multiplicar estas tres dimensiones, y siempre tendremos el mismo producto 24, porque podemos decir como arriba,

$4 \times 2 = 8,\ \times 3 = 24$;

ó de este modo : $4 \times 3 = 12,\ \times 2 = 24$,

ó tambien $3 \times 2 = 6,\ \times 4 = 24$;

y lee de este modo : 4 multiplicado por 2 es igual á 8, y este 8 multiplicado todavía por 3 es igual á 24.

Asimismo advierto que si la base del prisma fuere paralelógramo oblicuángulo no se debe multiplicar el un lado de esta por el otro para valuar la base, sino un lado por su perpendicular, como dijimos al núm. 221, reduciéndole á rectángulo, y despues este paralelógramo reducido á rectángulo multiplíquese por la altura perpendicular.

Núm. 332. Luego si la base de uno ó de muchos prismas fuere igual á la del otro, y su altura la misma, el valor será el mismo.

Dijimos que el triángulo tenia la mitad del valor de su paralelógramo (núm. 216); luego cuando quisiéremos valuar la base de un prisma triangular (Fig. 229) bastará contar con la base del prisma G, que sea un paralelipípedo, y contar solamente la mitad de la base para multiplicarla por su altura.

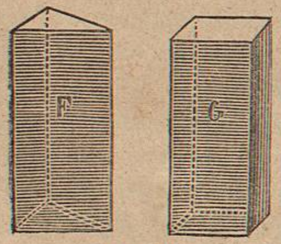

Fig. 229.

Núm. 333. Luego el valor del prisma triangular F es la mitad del valor de su paralelipípedo correspondiente G.

Los polígonos dijimos que se podian dividir en triángulos ; por consiguiente los prismas multiláteros, divididas sus bases en triángulos, y continuadas estas divisiones desde una hasta otra base, quedarán divididos en prismas triangulares ; por consiguiente podemos decir de los unos lo que acabamos de decir de los otros.

Núm. 334. Luego para valuar los prismas multiláteros hemos de multiplicar el valor de sus bases por su altura perpendicular.

Hemos dicho muchas veces que el círculo se puede confundir con el polígono, considerándole como uno de infinitos lados ; de lo que se infiere que podemos confundir el cilindro con un prisma de una infinidad de lados, y proceder en la valuacion del cilindro como en el valor de los prismas.

Núm. 335. Luego valuada la base del cilindro y multiplicada por la altura tenemos su valor.

Núm. 336. Luego si las bases de muchos cilindros fueren iguales á la de uno solo, y la altura fuere la misma, el valor será el mismo.

Núm. 337. Luego si la base de uno ó muchos cilindros fuere igual á la de uno ó muchos prismas, y la altura la misma, el valor ha de ser el mismo.

§ VI.

De la comparacion de los prismas y cilindros rectos con los oblicuos

Dijimos que el paralelógramo rectángulo era igual al oblicuángulo cuando los dos tenian la misma base y la misma altura (núm. 220). Ahora para saber si tambien el prisma recto y el oblicuo son iguales cuando tienen la misma base y altura conviene hacer lo siguiente (Fig. 250).

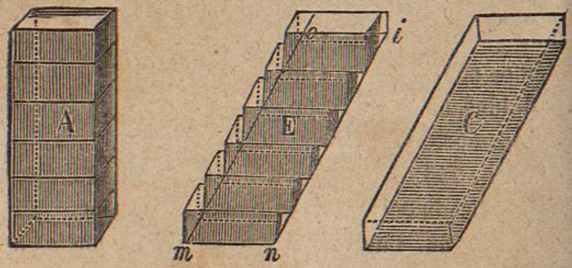

Fig. 250.

I.

Pongamos un paralelipípedo recto A, cuya base sea un rectángulo, y divídase la altura en partes iguales por secciones paralelas á la base.

II.

Pónganse estas partes unas sobre otras, no á plomo, sino en la forma que se representan en E.

III.

Tírense dos líneas desde las estremidades de la base *mn* hasta *oi*, y córtense segun la linea *mo* todos los prismas triangulares que hay desde *m* hasta *o* para ponerlos por la otra parte desde *n* hasta *i*, como hicimos hablando de los paralelógramos (núm. 219) (Fig. 157), y veremos que los claros desde *n* hasta *i* se llenarán por la razon que allí dimos; y de este modo el cuerpo E se muda en el paralelipípedo oblicuo C.

Núm. 338. Luego los paralelipípedos AC de la misma base y altura tienen el mismo valor, aunque el uno sea recto y el otro oblicuo.

Pero los prismas que tuvieren por base paralelógramos oblicuos se pueden reducir á rectos, y por consiguiente daremos de ellos la misma doctrina.

Pero dividiendo los paralelipípedos recto y oblicuo, segun las diagonales tiradas en sus dos bases, quedarán prismas triangulares, que serán entre sí como los paralelipípedos.

Núm. 339. Luego los prismas triangulares recto y oblicuo de la misma base y altura son iguales.

Pero en los dos prismas triangulares juntos entre sí hallamos toda la cualidad de prismas, y por consiguiente diremos de los prismas de muchos lados y compuestos lo que dijimos de los triangulares y simples.

Núm. 340. Luego todos los prismas que tuvieren la misma base y altura serán iguales.

Así como podemos confundir un círculo con un polígono de infinitos lados, así tambien podemos confundir un cilindro con un prisma multilátero de infinitos lados, y decir del cilindro lo que se dice del prisma.

Núm. 341. Luego el cilindro recto y el oblicuo de igual base y altura son iguales (Fig. 231).

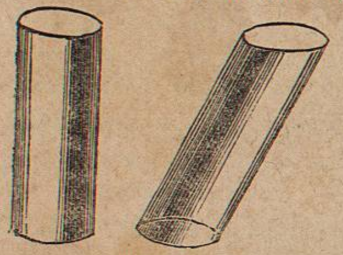

Fig. 231.

Adviértase que no es lo mismo un cilindro oblicuo que un cilindro inclinado, porque cilindro inclinado es aquel que salió de su plomo, en el cual toda seccion que sea perpendicular á su longitud es un círculo; mas el cilindro oblicuo es un sólido, cuya base es un círculo que va subiendo siempre paralelo á sí mismo, pero siempre siguiendo una línea directriz inclinada á la base; y así para ser circular la seccion en el cilindro oblicuo debe ser paralela á la base, porque si fuere perpendicular á la longitud entonces será oval ó elíptica.

§ VII.

De la comparacion de las pirámides y conos rectos con los oblicuos.

En cuanto á las pirámides podemos considerar primero (Fig. 232) un sólido piramidal A, compuesto de varios prismas de igual altura y de bases semejantes, cuyos lados homólogos van disminuyendo

en progresion aritmética, y se ponen á plomo unos sobre otros.

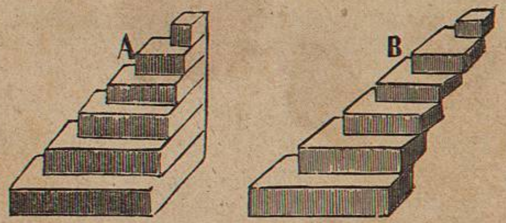

Fig. 232.

Consideremos ahora que vamos sucesivamente apartando hácia un lado estos mismos prismas ú otros iguales, huyendo siempre del plomo, como en B, y siguiendo una línea directriz inclinada á la base. En este caso es evidente que en A y en B no solo son iguales la base y la altura, sino que tambien lo es el valor.

Ahora bien, podemos con la consideracion aumentar cuanto se quiera el número de los prismas, y disminuir la altura de cada uno de ellos; y cuanto mas se disminuya esta, mas se llegarán estos sólidos á las pirámides que imitan; siendo siempre verdad que cuando la base y altura son iguales serán compuestas de los mismos ó iguales prismas, bien que puestos de diferente modo, y por consiguiente que es igual el valor de los sólidos: de este modo podemos confundir estos sólidos piramidales con las pirámides, y decir de ellas lo que acabamos de decir, que siendo la base igual é igual la altura el valor será igual.

Núm. 342. Luego las pirámides que tienen la base