y altura estan entre sí en razon de sus bases multiplicada por la razon de las alturas (Fig. 251); y así

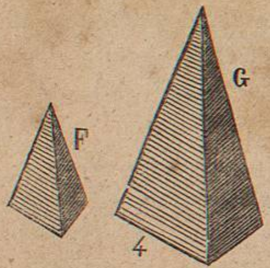

Fig. 251.

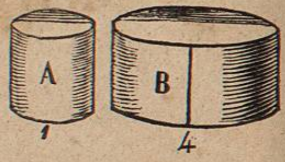

Fig. 252.

F:G::1:8, porque la razon de las alturas es 2 y la de las bases es 4 : luego la razon de las pirámides es 8, ó 2×4.

II.

Ademas de esto como los cilindros se confunden con los prismas de infinitos lados, ó son como prismas de infinitos lados, podemos decir :

Núm. 568. Luego los cilindros de la misma altura estan entre sí como las bases (Fig. 252); y así A:B::1:4, porque las bases estan en esa razon.

Luego los cilindros de la misma base estan entre sí como sus alturas (Fig. 253); y así E:F::1:2, porque esta es la razon en que estan sus alturas.

Luego los cilindros de la base diversa y de diversa altura estan entre sí en la razon de las bases multiplicada por la de las alturas (Fig. 254) : y así A:B::1:8, porque las bases son como 1:4, y las alturas

como 1:2; luego los cilindros son como 1:8, esto es, como 2×4.

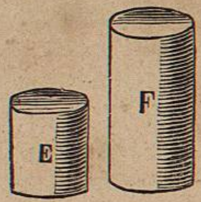

Fig. 253.

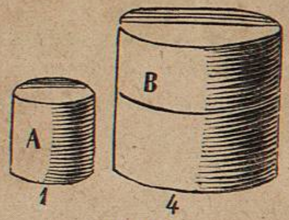

Fig. 254.

III.

Como los conos son los tercios de los cilindros debemos decir :

Núm. 569. Luego los conos de la misma altura estan entre sí como sus bases.

Luego los conos de la misma base estan entre sí como sus alturas.

Luego los conos de diferente base y diferente altura estan entre sí en la razon de las bases multiplicada por la de las alturas.

§ XII.

De la razon que tienen entre sí los sólidos semejantes.

Ya dijimos en su propio lugar que los sólidos se formaban por el movimiento de una superficie, y que de la diversidad de la superficie movil ó *generante* juntamente con la diversidad de la línea que dirije el movimiento, y se llama directriz, nacian las diferentes especies y calidades de sólidos.

Ahora decimos que cuando las superficies generantes son semejantes y semejante su movimiento, en tal forma que los ángulos sean iguales y todas las líneas en proporcion, los sólidos que de aquí resultan se llaman *sólidos semejantes*.

Se dijo que los paralelógramos, triángulos y demas figuras planas que se forman de ellos estaban en la razon compuesta de la razon de las bases, multiplicada por la razon de las alturas de la figura plana.

Pero los sólidos, como acabamos de decir, estan en razon compuesta de la razon de las superficies, que les sirven de base, multiplicada par la razon de las líneas que les miden su altura; y de este modo los sólidos estan entre sí en una razon compuesta de tres, esto es, de dos razones que hay en la base generante, y otra en las alturas del sólido.

Núm. 570. Luego la razon de los prismas entre sí es compuesta de tres razones, dos que hay en la superficie generante ó base del prisma, y una que hay en su altura.

Pero cuando las bases de los prismas son semejantes, las dos razones que hay en ellas son iguales; de forma que una razon multiplicada por otra es lo mismo que multiplicada por sí misma; y así el esponente de esta razon compuesta es un cuadrado de la razon simple (núm. 262).

Si los prismas son semejantes, la misma razon que hay entre cualesquiera lados correspondientes de la base la ha de haber tambien en las alturas; y por consiguiente cuando la base se multiplica por

la altura, para formar el prisma la razon de la base, que es un cuadrado de la razon simple de los lados, se multiplica de nuevo por esa razon simple ú otra igual, lo cual es una razon compuesta de tres razones semejantes.

Núm. 571. Luego los prismas semejantes estan entre sí en la razon compuesta de tres razones iguales.

Núm. 572. Luego el esponente de los prismas semejantes es el producto de la razon simple de cualquier lado, multiplicada por sí misma una vez para hacer un cuadrado, y multiplicada otra vez por la raiz para hacer un cubo.

Núm. 573. Luego los prismas semejantes estan entre sí como los cubos de cualquiera de sus lados correspondientes.

Pero las pirámides son los tercios de los prismas por el núm. 546, y las partes proporcionales estan entre sí como sus todos por el núm. 154.

Núm. 574. Luego las pirámides semejantes estan entre sí como los cubos de sus lados.

Tambien dijimos que los cilindros se podian considerar como prismas de lados infinitos, y los conos como pirámides de una infinidad de lados.

Núm. 575. Luego los cilindros semejantes y los conos semejantes estan entre sí como los cubos de sus lados homólogos.

Ya hemos considerado la esfera como compuesta de infinitas pirámides que tienen el vértice en su centro.

Núm. 576. Luego las esferas son entre sí como los cubos de sus diámetros. De modo que si una esfera tiene el diámetro duplo de la otra, su valor es ocho veces mayor, porque $2\times2\times2=8$; y si el diámetro fuere triple, su valor es veinte y siete veces mayor, porque $3\times3\times3=27$; y lo mismo se dice de todos los otros sólidos semejantes.

§ XIII.

De la proporcion que se halla entre el valor de la esfera y el del cilindro, cubo y cono que tuviesen la misma altura y profundidad de la esfera.

Núm. 377. Llamamos cilindro circunscrito á la esfera á aquel que tiene por base un círculo máximo de la esfera, y por altura su diámetro (Fig. 255), y

Fig. 255.

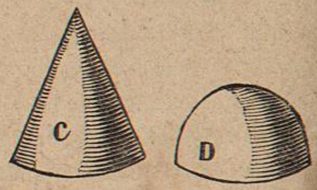

Fig. 256.

por consiguiente toca á la esfera por el punto superior, por el inferior y por el circuito.

Acabamos de decir en el núm. 358 que la esfera A es igual al cilindro que tiene por base un círculo máximo, y por altura dos tercios del diámetro, y que el cilindro circunscrito B (Fig. 255) tiene la mis-

ma base del cilindro L (Fig. 259), y tres tercios del diámetro por altura. Luego estos dos cilindros B, L (Fig. 255 y 259) son entre sí como las alturas, esto es, como dos tercios á tres.

Núm. 378. Luego tambien la esfera A (Fig. 255) es á su cilindro circunscrito B como dos á tres; esto es, si la esfera pesa 22 onzas el cilindro pesará 33.

Vale, pues, la esfera dos tercios del cilindro circunscrito. Pero el cono que tuviere esa misma base y esa misma altura del cilindro vale solamente una tercera parte de él; esto es, si el cilindro B pesa 33 onzas, el cono C (Fig. 256) pesará solas 11.

Núm. 379. Luego el cono (Fig. 256) que tiene por base un círculo máximo de la esfera, y por altura su diámetro, vale la mitad de la esfera, de modo que si la esfera vale 22, el cono valdrá 11.

Y así el cono C que tuviere por base un círculo máximo, y por altura el diámetro de la esfera, es igual á media esfera ó al hemisferio D (Fig. 256).

Núm. 380. Luego el cono, la esfera y el cilindro que tienen la misma altura y profundidad, son como 1, 2, 3, ó como 11, 22, 33 (Fig. 257).

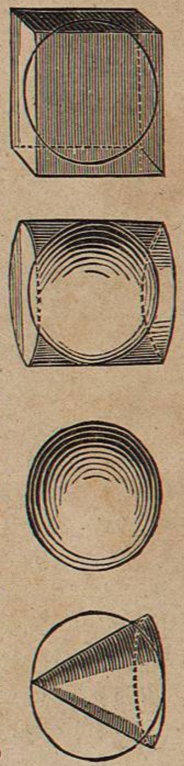

Fig. 257.

Cuanto al cubo circunscrito

(Fig. 258) si le quisiéremos comparar con la esfera

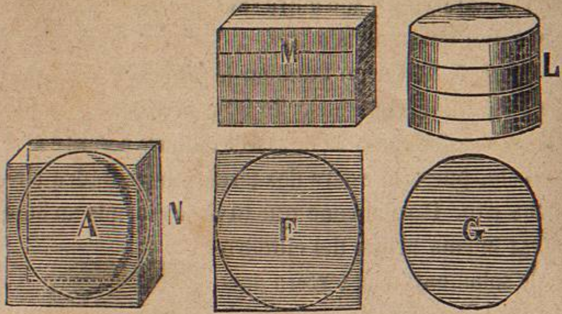

Fig. 258. Fig. 259.

dividiremos la dificultad, é iremos dando solucion poco á poco.

Núm. 581. Lo primero comparemos la esfera ó el cilindro L su igual (Fig. 259) con un prisma M de la misma altura, esto es, de dos tercios de diámetro, ó cuatro tercios de radio. Mas siendo la altura la misma, solo se halla la diferencia en las bases FG; y esta, como dijimos al número 267, es como 22 á 28, esto es, como la circunferencia á cuatro diámetros. Luego si el cilindro L, ó la esfera que le es igual, pesa 22 onzas, el prisma M pesará 28.

Núm. 582. Comparemos ahora este prisma M con el cubo circunscrito N, como ambos son de la misma base toda la diferencia está en la altura; pero teniendo el cubo tres tercios de diámetro por altura, y el prisma solamente dos, si el prisma M vale 4 diámetros ó 28, el cubo debe valer 6 diámetros ó 42; y por consiguiente, comparando la esfera A, ó el cilindro L su igual con el cubo N circunscrito, será

como 28 á 42, ó como la circunferencia á 6 diámetros.

Núm. 583. Luego los cuatro cuerpos que pertenecen á la esfera en el modo arriba dicho (Fig. 257), esto es, el cono, la esfera, el cilindro y el cubo estan en proporcion 11, 22, 33, 42.

§ XIV.

Del valor del sector, y del segmento de la esfera.

Núm. 584. Así como arriba consideramos la esfera dividida en pirámides, cuyo vértice comun era el centro, podemos dividir ahora el sector en muchas pirámides, cuyo vértice comun sea el centro, y cuyas bases hagan la superficie convexa del sector (Fig. 260).

Núm. 585. Luego el sector es igual á muchas pirámides juntas, cuyas bases hagan la superficie, y cuya altura sea el radio. Ya se dijo al núm. 546, que cada pirámide valia un tercio de su prisma correspondiente, y era igual á su base multiplicada por el tercio de la altura del prisma.

Núm. 586. Luego el sector Z (Fig. 260) es igual á un pris-

Fig. 260.

ma B, cuya base sea un paralelógramo igual á la superficie convexa del sector, y cuya altura sea un tercio del radio de la esfera.

Pero la superficie convexa del sector Z, que es la misma del segmento, ya dijimos al número 527 que era igual á un paralelógramo B, cuya longitud fuese la circunferencia del círculo máximo de la esfera, y su altura la flecha.

Luego el valor de Z, sector de la esfera, es igual á un prisma B. cuya longitud sea la circunferencia de la esfera, y su anchura la flecha, y su altura un tercio del radio.

Núm. 587. Para valuar el segmento de la esfera (Fig. 261), despues de hallado el valor del sector B

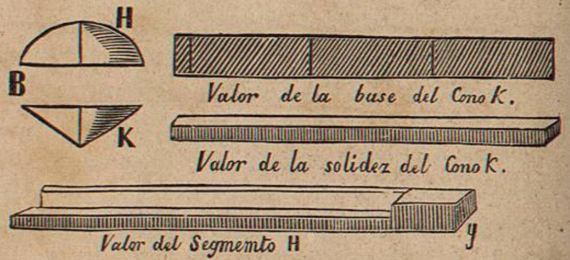

Fig. 261.

bastará cortar todo el cono K, y sabido el valor de este cono, el resto será el valor del segmento H.

Pero el cono K ya dijimos que era igual á un cilindro de la misma base y de la tercera parte de la altura (núm. 552); y tambien habiamos dicho que el círculo de la base de este cono se podia reducir á un paralelógramo, que tuviese por longitud la cir-

cunferencia de él, y por altura medio radio (núm. 252).

Núm. 588. Luego haciendo un prisma P, cuya longitud sea la circunferencia del cono, y su latitud medio radio de su base, y la altura el tercio de la altura del cono, se conocerá su valor.

Núm. 589. Luego el valor del segmento H (Fig. 261) es el valor del sector Z (Fig. 260), menos el del cono K.

Núm. 590. Luego el valor del segmento H es igual al del prisma B de la (Fig. 260), quitando de este el valor del cono K, que es el de otro prisma P (Fig. 261), y de este modo el segmento H será igual al sólido, y la razon es, porque así como juntando ó sumando el cono K con el segmento H tenemos el sector Z, así tambien juntando el prisma B, que tiene el valor del cono K, y añadiéndole el sólido *y*, en donde entra, se formará el prisma de la (Fig. 260) igual al sector Z.

§ XV.

Del modo de valuar el prisma recto truncado.

Núm. 591. Llamamos prisma truncado todo aquel que sea cortado irregularmente, como A (Fig. 262).

Para simplificar la doctrina hablaremos del prisma triangular, porque todos los otros se pueden reducir á triangulares.

Tiene, pues, el prisma triangular A tres esquinas desiguales, y para reducirle á un prisma regular capaz de ser valuado se hará lo siguiente.

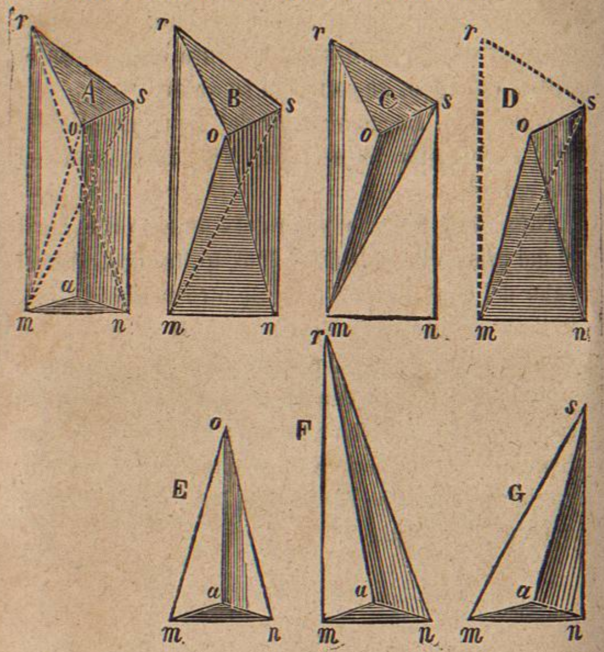

Fig. 262.

I.

Núm. 592. Tiraremos del ángulo sólido *o* dos diagonales *om*, *on*: consideraremos cortada esta pequeña pirámide, cuya base *man* es la base del prisma, y cuyo vértice está en *o*, abajo ponemos en E esta pirámide.

II.

Separada la pirámide E queda el resto B, que es

una pirámide irregular de cuatro caras, cuya base es *rsmn*, y cuyo vértice está en *o*, y en esta base *srmn* podemos tirar una diagonal *ms*.

III.

Podemos considerar una division desde el vértice *o*, buscando siempre la diagonal *ms*, y dividimos esta pirámide cuadrilátera en dos triangulares, las que podemos separar una C, cuya base es *rsm*, y su vértice está en *o*; otra D, cuya base es *msn*, y su vértice está en *o*, las cuales si se juntan vuelven á hacer el sólido B; y poniéndolas encima la pirámide E, queda formado el prisma truncado A primitivo.

De este modo se conoce que el prisma truncado A se divide en tres pirámides E, C, D.

Como estas pirámides son desemejantes, y nada tienen comun, veamos si reducimos C y D á otras iguales que tengan la misma base de E, que viene á ser la del prisma primitivo A; pues de este modo será mas facil hallar el valor de las pirámides y del prisma que se dividió en ellas.

IV.

Núm, 593. Hagamos despues dos pirámides imaginarias F, G, cuyas bases sean como la de la pirámide E, esto es, la del prisma primitivo A, y demos á F la altura del prisma en la esquina *rm*, y á la pirámide G la altura del prisma en la esquina *sn*. Teniendo la pirámide E la altura del prisma en *ao*, tenemos con esto tres pirámides todas con la misma base del prisma, y cada una tiene por altura una esquina del prisma, *ao* será la altura de E, *rm* la de F, y *sn* la de G.

V.

Veamos ahora si estas dos pirámides imaginarias FG valen tanto como las verdaderas CD, en que el prisma se dividió. Cuanto á C, esta tiene el vértice en *o*, y tiene por base el triángulo *mrs*. Pero la pirámide imaginaria P, si la sobreponen en el triángulo *mrn*, tendrá ese triángulo por base : para comparar, pues, estas dos bases ó triángulos *mrs*, *mrn*, busquémoslos en el prisma A, y veremos que el triángulo *rsm* ó *rnm* son iguales, porque estan entre las mismas paralelas por el núm. 224. Luego el triángulo *srm*, base de C, es igual á *rnm* base de F : veamos ahora la altura de estas dos pirámides C y F : C tiene el vértice en *o*, y F en *a*; pero mirando bien el prisma primitivo A, se advierte que *o* y *a* estan en la misma paralela; luego las pirámides C y F tienen base igual y altura igual, por consiguiente son iguales.

Vengamos ahora á las pirámides G, D, para ver si tambien son sus iguales entre sí. Pongamos la una y la otra de suerte que tengan por vértices en G el punto *a*, en D el punto *o*, ambos por la misma esquina *ao* del prisma A, que ya vimos estaban en la misma altura.

Cuando á la base de D es el triángulo *msn* del prisma A, la base de G es el mismo triángulo *msn* del prisma A; luego DG tienen la misma base, y los vértices estan á la misma altura; y así la pirámide imaginaria G es igual á la pirámide verdadera D.

Núm. 594. Luego el prisma truncado es igual á las tres pirámides E, F, G, que tienen por bases la del prisma truncado, y por alturas las tres esquinas de este.

Pero estas tres pirámides (Fig. 263) se reducen á tres prismas de la misma base del truncado A, y de una altura que sea un tercio del de las pirámides, ó un tercio de las esquinas del prisma A; y así los prismas B, C, D son iguales á las pirámides E, F, G, que corresponden á plomo en la lámina.

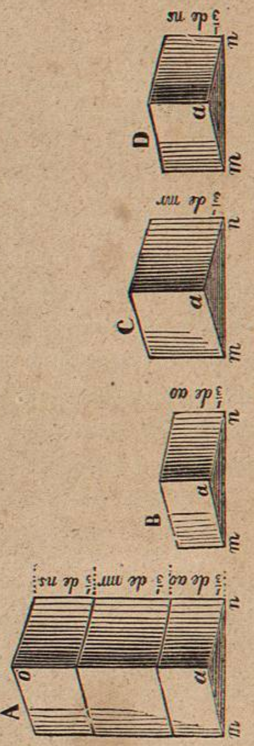

Fig. 263.

Núm. 595. Luego el prisma truncado A (Fig. 262) es igual á un prisma entero A (Fig. 263) de la misma base, cuya altura sea la suma de las terceras partes de las tres esquinas del truncado; y así el prisma truncado es igual al prisma entero A, compuesto de los prismas B, C, D.

Si el prisma no fuere recto, córtese por el medio con una seccion perpendicular á las esquinas, y quedará dividido en dos prismas rectos, truncados, y sabremos hallar su valor.

§ XVI.

Modo de valuar el volumen de los cuerpos irregulares.

Núm. 596. Cualquier cuerpo irregular se puede dividir por una seccion recta, y entonces las dos nuevas superficies de la seccion pueden servir de bases rectas de los dos cuerpos.

En segundo lugar, puesta cualquiera de estas partes sobre su base recta, podemos ir dividiendo cada una de ellas en prismas triangulares truncados; y sabiendo valuar cada prisma, se sabe el valor del sólido : bien pudieran quedar algunas pirámides; pero á estas yà las sabemos hallar su valor.

Para abreviar la operacion daremos algunas reglas, que nos dispensen de llegar hasta la última division de los prismas triangulares truncados.

I.

Núm. 597. Sea un sólido como el de la (Fig. 264): su base E, A, O, Q sea un paralelógramo, sobre cuyos cuatro ángulos se levanten perpendicularmente cuatro esquinas desiguales ES, AI, PQ, OR, el lado E, O, S, R esté cortado de forma que se termine en I : el lado O, Q, R, P córtese tambien de forma que se termine en I. Aquí tenemos un paralelipípedo irregularmente truncado : supongamos, pues, que es preciso saber su valor.

II.

Tiremos en la base diagonal AO, y conforme á esa diagonal hágase una seccion por las esquinas OR, AI,

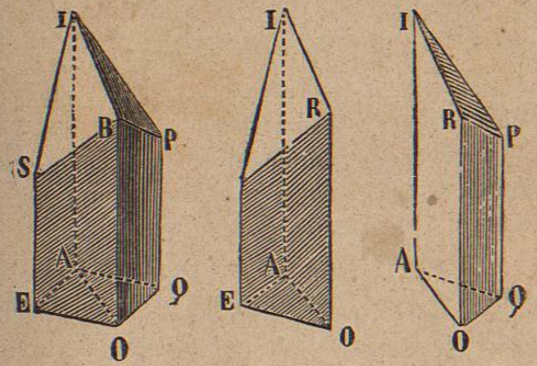

Fig. 264.

AI, quedará dividido en los dos prismas truncados que vemos con separacion en la misma figura, y cuyo valor sabemos averiguar por lo que queda dicho.

Por cuanto el que tiene por base el triángulo E, A, O es igual á un prisma recto de esta base, cuya altura sea un tercio de ES con mas un tercio de AI, mas un tercio de RO; del mismo modo el otro es igual á un prisma recto, cuya base sea el triángulo A, O, Q, y la altura un tercio de PQ, con tercio de AI, y un tercio de RO.

Pero como las dos bases por ser triángulos mitades del paralelógramo son iguales, en vez de hacer dos productos ó prismas hagamos uno con la altura de los dos, esto es, un prisma, cuya base sea E, A, O, y cuya altura sea un tercio de ES, un tercio de PQ, y dos tercios de AI, mas dos tercios de RO; ó por otro medio, un tercio de cada esquina que no sea comun, y dos tercios de las esquinas que sean comunes á ambos, y son aquellas por donde va la division. Como el prisma cuadrilátero total se divide en los dos, su valor es la suma de ambos.

Núm. 598. Luego el paralelipípedo diferentemente truncado es igual á su media base, multiplicada por un tercio de cada esquina que no sea comun, y dos tercios de cada esquina comun á los dos prismas triangulares en que se podia dividir.

Lo mismo diremos si el paralelipípedo fuese cóncavo (Fig. 265), entonces se podrá dividir segun la

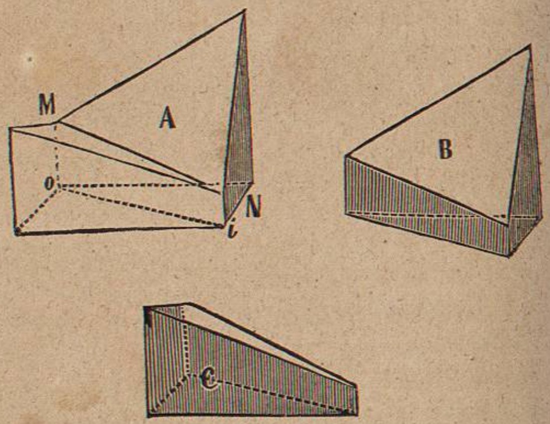

Fig. 265.

línea de direccion de la concavidad MN, y se tirará la diagonal en la base *oi*, y se hará la misma operacion de arriba.

Núm. 399. El prisma cuadrangular que no fuere paralelipípedo solo se puede valuar haciendo la division en la base, segun la línea ó direccion de la convexidad, ó de la concavidad superior; y haciendo dos triángulos, y de cada uno de ellos multiplicado por los tercios de sus tres esquinas, formando un producto, la suma de ambos será el valor de este sólido.

§ XVII.

De los sólidos regulares.

Núm. 400. Llamamos sólido absolutamente regular al que en las superficies, en las líneas y en los ángulos guarda una perfecta igualdad y semejanza. De este género son el cubo, el tetraedro, ó de cuatro superficies, el octaedro de ocho, el icosaedro de veinte, y el dodecaedro de doce, en los cuales no hay la mínima desigualdad en ángulas líneas ni superficies.

Núm. 401. La esfera (Fig. 266) tambien podia colocarse entre los cuerpos regulares, por ser en todas partes semejantes á sí mismo; de suerte que de cualquiera modo que se la tome siempre ofrece la misma superficie igualmente convexa.

Fig. 266.

El cubo (Fig. 267) es formado por seis cuadrados igua-