ra de los dos, esto es, un prisma, cuya base sea E, A, O, y cuya altura sea un tercio de ES, un tercio de PQ, y dos tercios de AI, mas dos tercios de RO; ó por otro medio, un tercio de cada esquina que no sea comun, y dos tercios de las esquinas que sean comunes á ambos, y son aquellas por donde va la division. Como el prisma cuadrilátero total se divide en los dos, su valor es la suma de ambos.

Núm. 398. Luego el paralelipípedo diferentemente truncado es igual á su media base, multiplicada por un tercio de cada esquina que no sea comun, y dos tercios de cada esquina comun á los dos prismas triangulares en que se podia dividir.

Lo mismo diremos si el paralelipípedo fuese cóncavo (Fig. 265), entonces se podrá dividir segun la

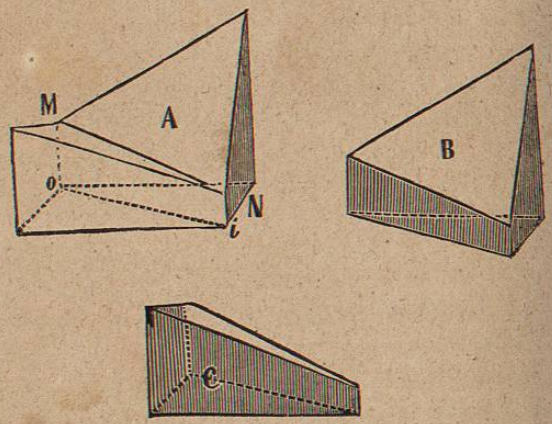

Fig. 265.

línea de direccion de la concavidad MN, y se tirará la diagonal en la base *oi*, y se hará la misma operacion de arriba.

Núm. 399. El prisma cuadrangular que no fuere paralelipípedo solo se puede valuar haciendo la division en la base, segun la línea ó direccion de la convexidad, ó de la concavidad superior; y haciendo dos triángulos, y de cada uno de ellos multiplicado por los tercios de sus tres esquinas, formando un producto, la suma de ambos será el valor de este sólido.

§ XVII.

De los sólidos regulares.

Núm. 400. Llamamos sólido absolutamente regular al que en las superficies, en las líneas y en los ángulos guarda una perfecta igualdad y semejanza. De este género son el cubo, el tetraedro, ó de cuatro superficies, el octaedro de ocho, el icosaedro de veinte, y el dodecaedro de doce, en los cuales no hay la mínima desigualdad en ángulas líneas ni superficies.

Núm. 401. La esfera (Fig. 266) tambien podia colocarse entre los cuerpos regulares, por ser en todas partes semejantes á sí mismo; de suerte que de cualquiera modo que se la tome siempre ofrece la misma superficie igualmente convexa.

Fig. 266.

El cubo (Fig. 267) es formado por seis cuadrados iguales: el uno está en la base, los cuatro alrede-

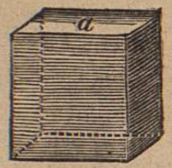

Fig. 267.

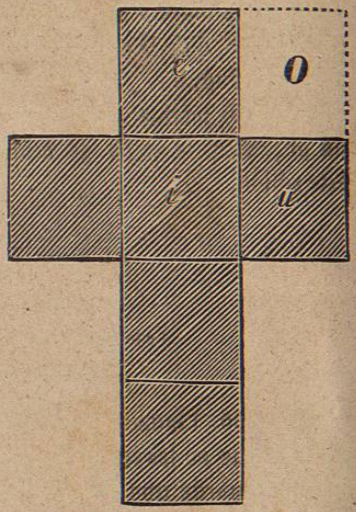

Fig. 268.

M

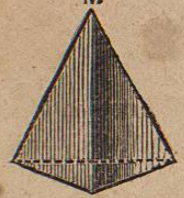

Fig. 269.

dor de la base hacen los cuatro lados, y el sesto forma la base superior. En el cubo todos los ángulos sólidos son formados por la concurrencia de tres cuadrados; y en los cuadrados todos los ángulos son de noventa grados, y todas las líneas son iguales.

Núm. 402. Luego el cubo es un sólido perfectamente regular.

Con cuadrados no podemos formar otro sólido, porque si quisieremos juntar solamente dos no se forma ángulo sólido, pues este forzosamente ha de tener tres lados á lo menos, y tres dimensiones en longitud, latitud y profundidad.

Si juntamos los tres lados cuadrados que dijimos formamos un ángulo sólido, como se ve en el cubo. Si juntamos cuatro (Fig. 268) *e*, *i*, *o*, *u*, teniendo cada cual 90 grados, todos juntos hacen 360; y por consiguiente el punto en donde concurren es el centro de un círculo, y no puede hacer ángulo sólido.

Núm. 403. Luego con cuadrados no se puede formar otro sólido que no sea el cubo.

Veamos ahora los sólidos que formamos con los triángulos equiláteros, pues todos los otros triángulos son por su irregularidad incapaces de formar cuerpo perfectamente regular.

Juntos tres triángulos (Fig. 269) harán un ángulo sólido M; y como la base tambien ha de ser un triángulo formado por tres lados de los triángulos que forman las superficies, ha de ser triángulo; y pues las líneas que le forman son lados de triángulos equiláteros, tambien él ha de ser equilátero, y por esto igual á los superiores. Los tres triángulos de la base, siendo todos ellos formados por tres triángulos equiláteros, uno de la base y dos de los lados, que son todos iguales á los que forman el ángulo del vértice M, tambien le son iguales.

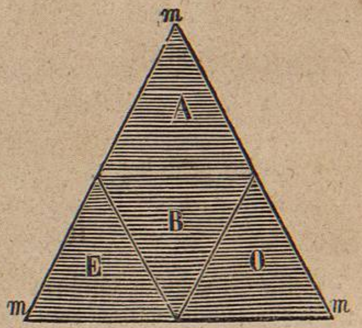

Fig. 270.

Estos cuatro triángulos se ven en la (Fig. 270), y en ella se advierte cómo podrán formarse de plano para armar el tetraedro : B es la base, A, E, O son los lados que pueden levantarse alrededor de la base, y juntándose los ángulos *mmm*, harán el vértice del tetraedro M de la (Fig. 209).

Núm. 404. Luego el tetraedro formado por cuatro triángulos equiláteros *a*, *e*, *m*, *n* (Fig. 271), de suer-

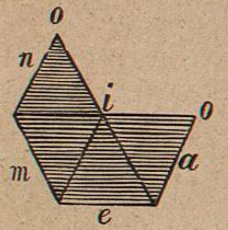

Fig. 271.

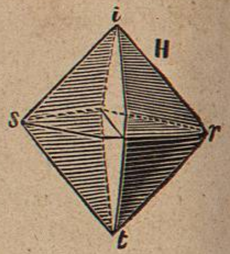

Fig. 272.

te que se junten *oo*, quedará una pirámide de cuatro lados con el vértice en *i* : no obstante la base será cuadrada, y por eso desigual á los lados, y así será un sólido irregular.

Pero formemos otra pirámide semejante, y juntemos las dos bases cuadradas, resultará el sólido regular H (Fig. 272).

I.

Todos los ocho lados son triángulos equiláteros.

II.

Todos los ángulos sólidos son formados por cuatro lados con el vértice en *i*, porque el vértice in-

ferior *t* se supone ser lo mismo que el de arriba ; los laterales *r*, *s*, etc., son formados cada uno por el concurso de dos triángulos superiores y dos inferiores ; y así son formados por cuatro triángulos equiláteros.

Núm. 405. Luego el octaedro es cuerpo perfectamente regular.

Para formarle de papel se puede cortar como en la (Fig. 273), y doblarle de modo que *oo* se junten,

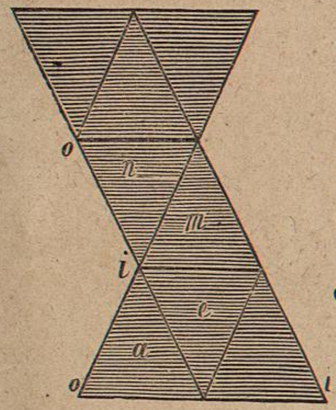

Fig. 273.

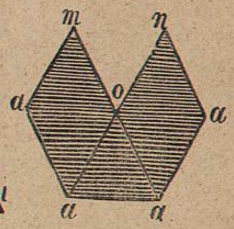

Fig. 274.

y se verá formado un sólido en *i* de los triángulos *a*, *e*, *m*, *n*, y los otros cuatro formarán la parte inferior del octaedro, cuyo vértice es *t*.

Juntemos ahora cinco triángulos equiláteros (Fig. 274), y hagamos que *nm* se junten, se levantará el centro *o*, y quedará un sólido de cinco lados iguales y semejantes. Con todo eso la base de esta pirámide es un pentágono, y los lados son triángulos, lo que contradice á la regularidad que se desea; y así por este medio todavía no tenemos sólido regular.

Si formamos otra pirámide de cinco lados semejantes, para juntarla, poniendo la cúspide hácia abajo, como hicimos en el octaedro, queda un sólido todo formado por triángulos equiláteros. No obstante los ángulos sólidos no son semejantes, por ser el superior y el inferior formados con la concurrencia de cinco triángulos, y los laterales de alrededor *a*, *a*, *a*, *a*, etc., son formados por solos cuatro, dos de la pirámide superior y dos de la inferior; por consiguiente aun no tenemos sólido regular.

Pero hagamos una figura en papel, como se representa (Fig. 275), en la que, ademas de los cinco

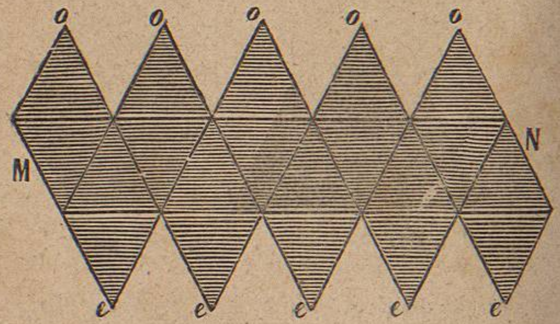

Fig. 275.

triángulos equiláteros *e*, *e*, *e*, *e*, *e*, que han de formar la pirámide superior *o*, y de los otros cinco que formarán la inferior *e*, tenemos MN formada de diez triángulos equiláteros, cinco que unen por las tres bases con los superiores, y otros cinco que unen

con los inferiores. Doblando, pues, esta lista de triángulos circularmente, de modo que se junten las dos estremidades MN, y disponiendo las divisiones en tal forma que solo por ellas se dobla la lista, y haga un circuito de superficies planas, si arriba unimos todos los ángulos *o*, *o*, *o*, *o*, *o*, y abajo los ángulos *e*, *e*, *e*, *e*, *e*, tendremos un sólido como se ve en la (Fig. 276), en el cual se observa lo siguiente.

I.

Que este sólido es compuesto de veinte triángulos equiláteros.

II.

Que todos los ángulos sólidos son formados por el concurso de cinco lados: en OE se ve claro, en los laterales el circuito *ai* vemos que cada ángulo sólido de los que terminan la base de la pirámide superior O, es formado por dos triángulos de la pirámide superior; otros dos que penden de estos, y caen hácia abajo, y otro que viene de abajo á introducirse entre los dos que estan pendientes. Lo mismo digo de *s*, y de los otros que terminan la base de la pirámide inferior E.

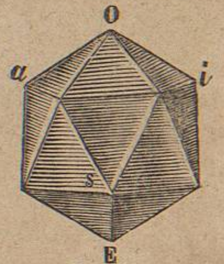

Fig. 276.

Núm. 406. Luego el icosaedro es un cuerpo regular formado por veinte lados semejantes é iguales, etc.

Si juntamos seis triángulos equiláteros (Fig. 277),

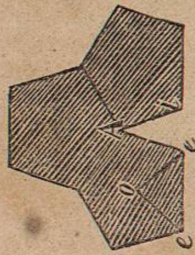

Fig. 278.

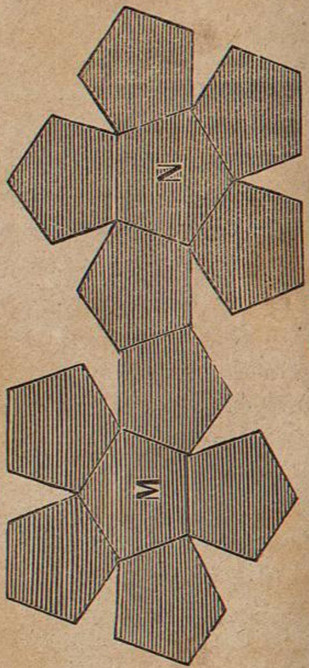

Fig. 279.

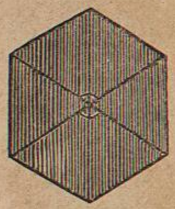

Fig. 277.

como cada ángulo de los del centro es de 60 grados, todos seis harán 360, que es el circuito de un círculo; de suerte que si los juntamos, el centro O no se puede levantar del plano, ni formar ángulo sólido.

Núm. 407. Luego con triángulos equiláteros no se puede formar cuerpo alguno regular fuera del tetraedro de cuatro lados, del octaedro de ocho del icosaedro de veinte.

Vengamos ahora á los pentágonos para ver qué

cuerpos sólidos podremos formar con ellos, y juntemos tres pentágonos (Fig. 278). Para examinar qué valor tienen sus ángulos tomemos un pentágono, y tiremos desde un centro radios á sus ángulos. Los del centro *o* como tienen por medida un quinto de la circunferencia tendrán 72 grados por medida.

Pero cada triángulo tiene el valor de 180 grados; luego faltan para el valor de los dos ángulos que cada triángulo tiene alrededor del pentágono lo que va de 72 á 180. Esto repartido entre los dos á cada uno dará 54; pero si convertimos estos radios que dividen el pantágono en triángulos, cada ángulo queda doble del que hacia la base del triángulo, esto es, duplo de 54, que viene á ser 108.

Luego los ángulos del pentágono valen 108.

Juntando ahora tres pentágonos A, *e*, *o* (Fig. 278), solo tenemos en A 324 grados en el valor que ocupan los tres ángulos, y aun falta el valor de 36 grados, para completar la circunferencia de 360. Luego si juntásemos *e* con *i* formaremos un ángulo sólido con tres lados de cinco ángulos.

Tomemos, pues, un pentágono de papel M (Fig. 279), y de sus cinco lados hagamos que se levanten otros cinco pentágonos iguales hasta unirse mútuamente en forma de una bandeja (perdónese la familiaridad de los términos, porque solo atendemos á la claridad, que es la que necesitan los principiantes): formemos otra bandeja semejante alrededor del pentágono N, y colocaremos una sobre otra, como se ve en la (Fig. 280). Pero en esta figura tenemos que observar.

I.

Que todos los lados son semejantes, formados por

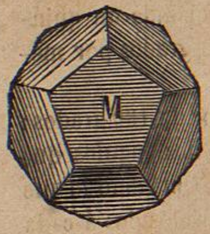

Fig. 280.

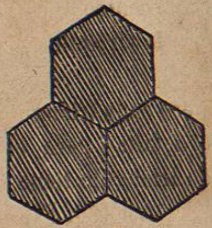

Fig. 281.

ángulos planos, semejantes é iguales, pues todos son pentágonos y semejantes.

II.

Que todos los ángulos sólidos son formados por tres lados: en los que se forman alrededor del pentágono superior M y el inferior N es manifiesto, pues los forma la base con los dos pentágonos que se levantan como lados hasta encontrarse mútuamente, y los que se forman por un pentágono, que sube de abajo para introducirse entre los que penden del que está encima, ó al contrario.

Núm. 408. Luego el dodecaedro es un sólido regular, compuesto de doce lados iguales y semejantes.

Si quisiéremos juntar cuatro pentágonos para hacer con ellos un ángulo sólido no podremos, porque teniendo cada uno de ellos los ángulos de diez grados, cuatro juntos harian la suma de 432, los que

siendo mucho mas que la circunferencia del círculo no pueden caber en el plano, y mucho menos en el ángulo sólido, que para elevarse del plano debe tener circunferencia menor que la del círculo.

Núm. 409. Luego con pentágonos regulares no se puede hacer otro sólido que el dodecaedro.

Si quisiéremos formar con exágonos algun cuerpo sólido veremos que es imposible, porque (Fig. 281) juntando tres tenemos 360 grados, pues cada ángulo del exágono regular contiene 120 por el núm. 98; luego tres hacen 360, lo que es justamente la circunferencia del círculo, y así el punto de concurrencia no podria elevarse del plano para hacer ángulo sólido.

Si queremos valernos del eptágono, que quiere decir figura de siete ángulos, no podremos hacer sólido alguno, porque si tres exágonos no pueden hacer ángulo sólido, mucho menos podrán los eptágonos, cuyos ángulos son mayores.

Núm. 410. Luego no puede haber sólido alguno regular fuera de los que hemos dicho, esto es, cubo, tetraedro, octaedro, icosaedro y dodecaedro; esceptúase la esfera, de la cual no hablamos aquí.

Ahora, amigo Eugenio, antes de poner término á estos elementos de geometría, gobernado por la esperiencia que tengo quiero hacerte un epílogo de combinacion entre las razones de las líneas, de las superficies y de los sólidos, lo que te dará mucha luz: le añadiré á esta carta que ya tenia concluida.