EPILOGO.

Sobre la combinacion de las razones y proporciones de las líneas, superficies y sólidos.

§ I.

Núm. 411. Dijimos al núm. 139 que cuando muchos términos estaban en proporcion siempre iba reinando la misma razon entre todos ellos; de suerte que entre dos términos inmediatos se hallará el mismo esponente de la razon.

Tambien dijimos que un número multiplicado por sí mismo hacia el cuadrado, v. g. 4 por 4 dará 16, que es el número cuadrado de 4. Tambien dijimos que este cuadrado multiplicado otra vez por su raiz ó por el número primitivo 4 formaba el cubo. Ahora bien, cuando una cantidad se multiplica por sí misma para formar el cuadrado se dice que se eleva á la *segunda potencia*, y cuando se multiplica otra vez este cuadrado por la raiz para formar el cubo, se dice que sube á la *tercera potencia*; cuando todavía se multiplica el cubo otra vez por la raiz, se eleva esta á la *cuarta potencia*; si aun se multiplica de nuevo sube á la *quinta potencia*.

Lo que es costumbre espresar así en algebra: sea la cantidad simple ó raiz igual á A, el cuadrado de A se espresa así: $A \times A$, ó bien A^2: el cubo de A ó

la *tercera potencia* se podria espresar así: $A \times A \times A$; pero es mas corto A^3, y del mismo modo la cuarta potencia de A se espresa así: A^4 y la quinta A^5.

Núm. 412. Aquí deben advertir los principiantes que no es lo mismo 3A que A^3, porque el número 3 antes de A significa suma ó adicion, esto es, que la cantidad A se toma tres veces, siendo así que A^3 significa que la cantidad A no solo se multiplica una vez, sino que su producto se ha de multiplicar por A otra vez. Supongamos que A valga 4 palmos, 3 A significarán 12 palmos, y A^3 significará 64 palmos, porque 4×4 vale 16, y 16×4 vale 64.

Núm. 413. En la geometría podremos dar figura sensible así de la *segunda potencia*, que es una superficie, como de la tercera, que es un sólido; pero como no hay mas de tres dimensiones no podemos dar figura sensible de la cuarta, de la *quinta potencia*, etc. Solo los números dan idea de esta multiplicacion, y no las líneas.

Esto supuesto, formando una progresion geométrica $\div 1:2:4:8:16:32:64:128$, etc., cuyo esponente comun es 2, ó el esponente de la razon es doble, se ve claramente que para llegar el primer término al valor del segundo basta multiplicarle una vez por el esponente 2; mas para elevarle al valor del tercero es preciso multiplicarle otra vez por el mismo esponente; y del mismo modo para que se eleve al valor del cuarto término es preciso tercera multiplicacion, por el mismo esponente de la razon que reina. De esto se infieren varias consecuencias.

I.

Que podemos decir que la razon del primer término á su inmediato es el esponente simple, esto es, 2.

II.

Núm. 414. Que la razon del primer término al tercero es un cuadrado ó *segunda potencia* del esponente 2, esto es, 4.

III.

Núm. 415. Que la razon del primer término al cuarto es un cubo, ó tercera potencia del esponente 2, esto es, 8.

IV.

Núm. 416. Que la razon del primer término al quinto es 2, elevado á la cuarta potencia, esto es, 16.

V.

Núm. 417. Que la razon del primer término al sesto es 2, levantado á la quinta potencia, esto es, 32, etc.

Núm. 418. Supongamos ahora que formamos cuadrados de estos mismos términos de la progresion, véase (Fig. 282).

∺1:2:4:8- - - razon - - - 2.
∺1:4:16:64 - - - razon - - -4.

La razon ó esponente que reina en esta segunda

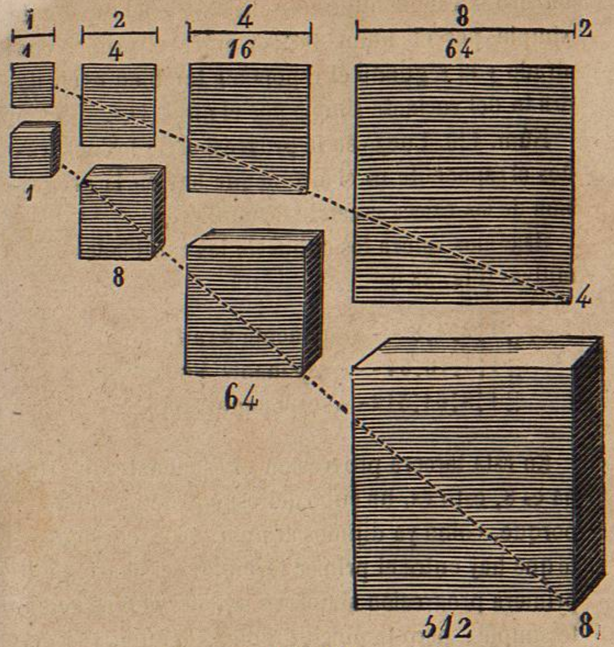

Fig. 282.

progresion es 4, esto es, el cuadrado del esponente que reina en la primera; porque, como dijimos al núm. 164, en los cuadrados hay la razon compuesta de la que habia entre las bases y de la que habia entre las alturas; y como son iguales, y la razon compuesta de dos iguales es un cuadrado de las simples, se sigue

Núm. 419. Luego en la progresion de los cuadrados el esponente del primero al segundo es un cuadrado del esponente simple.

Pero entre el primer término de las raices y el tercero el esponente es un cuadrado del esponente simple por el núm. 408; y entre el primer cuadrado y el segundo el esponente tambien es el cuadrado del cociente simple por el núm. 413.

Núm. 420. Luego en la progresion de los cuadrados el esponente es el mismo que hay en la progresion de las raices saltando un número.

Hagamos ahora los cubos de las cantidades primitivas (Fig. 282).

∺1:2:4:8 - - -esponente 2 raiz.
∺1:4:16:64- - - esponente 4 cuadrado.
∺1:8:64:512- - -esponente 8 cubo.

En esta tercera progresion el esponente que reina es 8, esto es, un cubo del esponente primitivo 2, porque, como ya dijimos al núm. 409., el esponente que hay entre el primer término y el cuarto de la primera progresion simple es un cubo del esponente simple; pero tambien dijimos al núm. 164 que entre los cubos el esponente era compuesto de tres razones semejantes; por consiguiente es como el esponente del primer término al cuarto de la primera progresion.

Núm. 421. Luego entre el primer término y segundo de la última progresion el esponente es un cubo del esponente simple de la primera progresion.

§ II.

Núm. 422. Otra cosa has de observar, Eugenio, y

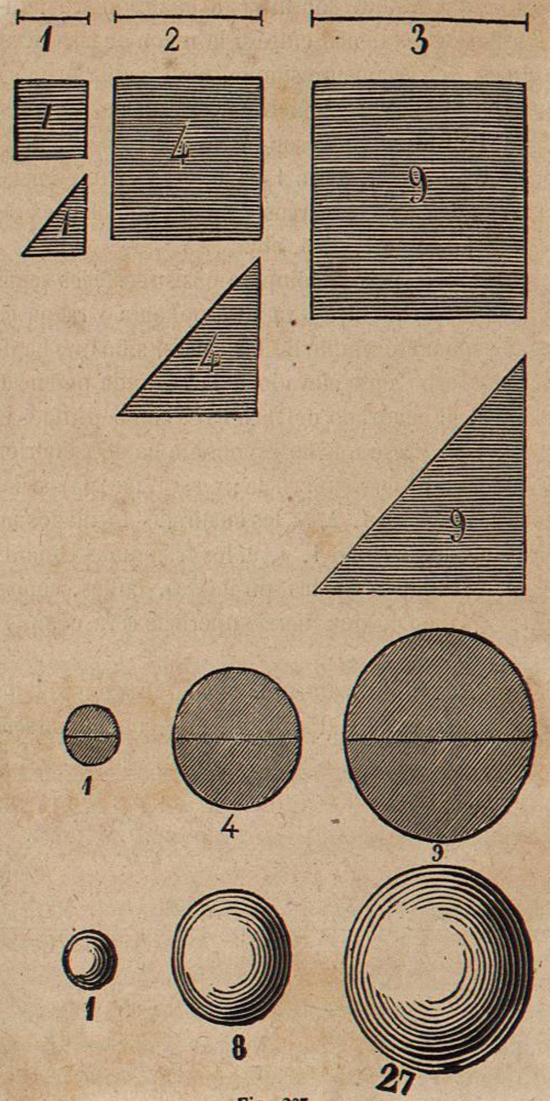

Fig. 283.

es que todo lo que son líneas ó cualesquiera figuras semejantes tienen entre sí la razon de las raices, esto es, del esponente simple, bien sea la proporcion aritmética ó geométrica, de suerte que (Fig. 283) si en los círculos son los radios como 1, 2, 3, los diámetros son como 1, 2, 3, las circunferencias son como 1, 2, 3, los arcos de igual número de grados serán como 1, 2, 3, etc.

Núm. 423. Pero si comparamos superficies semejantes unas con otras, ya su esponente ó razon no es el esponente simple de las raices, sino que ha de ser este esponente elevado á la segunda potencia, esto es, el cuadrado del primero, como dijimos al núm. 412, y ese mismo esponente ha de reinar en todo cuanto fuere superficie; y así (Fig. 284) si las líneas son como 1, 2, 3, los cuadrados formados sobre ellas serán como 1, 4, 9, los triángulos como 1, 4, 9, y tambien en las pirámides, cubos, conos, esferas, todo lo que fuere superficie será como 1, 4, 9.

Núm. 424. Ultimamente, si comparamos sólidos semejantes entre sí (Fig. 284), el esponente no será

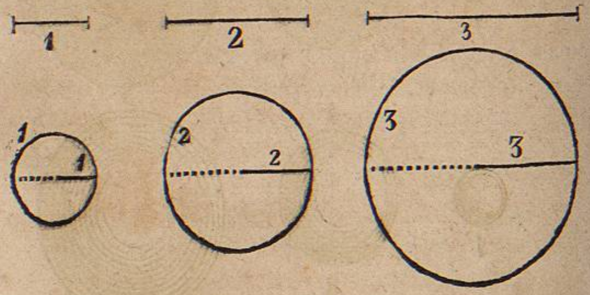

Fig. 284.

ni el de las raices ni el de las superficies, sino el de los cubos, esto es, ha de ser un cubo del primer esponente; y si las líneas que les pertenecen, esto es, los diámetros ó periferias eran 1, 2, 3, sus volúmenes serán 1, 8, 27, porque el cubo de 1 es 1, el de 2 es 8, el de 3 es 27; de forma que así como en los círculos distinguimos el area ó campo de la circunferencia que los cierra, y decimos que las superficies ó areas son como 1, 4, 9; pero que las líneas de la circunferencia siempre son como 1, 2, 3, conforme á los radios ó diámetros, así ahora en los sólidos no hemos de confundir los volúmenes con las superficies que los contienen; y por consiguiente si los radios de una esfera (Fig. 284), ó los lados de varios cubos fueren como 1, 2, 3, todo lo que sea línea en esos sólidos semejantes será como 1, 2, 3, esto es, altura 1, 2, 3, lados, como 1, 2, 3, etc., mas todo lo que fuere superficie, v. g., base, cara, etc. serán como 1, 4, 9, y el peso ó volumen ó el espacio comprendido dentro de la superficie total serán como 1, 9, 27.

Núm. 425. De aquí se sigue que en los sólidos semejantes todas las líneas correspondientes estan en la razon simple.

Todas las superficies en la razon de los cuadrados.

Todos los volúmenes ó el peso del sólido en la razon de los cubos.

Ve aquí, amigo Eugenio, lo que me ha parecido suficiente decirte acerca de la geometría; el próximo correo pienso emprender otra ciencia matemática tambien muy importante, que es la trigonometría, en la cual, sin embargo, pienso estenderme menos que en la antecedente. Estudia y recapacita todo cuanto te he enseñado desde el principio de nuestra correspondencia, pues, á menos que digieras completamente y te penetres de estos conocimientos preliminares, no estarás en estado de internarte en la lectura de obras mas profundas y voluminosas.

TRIGONOMETRIA.