tría, en la cual, sin embargo, pienso estenderme menos que en la antecedente. Estudia y recapacita todo cuanto te he enseñado desde el principio de nuestra correspondencia, pues, á menos que digieras completamente y te penetres de estos conocimientos preliminares, no estarás en estado de internarte en la lectura de obras mas profundas y voluminosas.

TRIGONOMETRIA.

CARTA VIGÉSIMAPRIMERA.

TRIGONOMETRIA RECTILINEA.

§ I.

Division de la circunferencia. Nociones sobre las líneas trigonométricas.

Amigo Eugenio, esplicadas como quedan la aritmética, algebra y geometría, el objeto de la presente es, segun te lo prometí en mi última, el estudio de la trigonometría, ciencia cuyo fin especial es resolver los triángulos, esto es, determinar sus ángulos y sus lados por medio de un número suficiente de datos.

En los triángulos rectilíneos basta conocer tres de las seis partes que los componen, con tal que en estas tres partes se incluya un lado, pues si solo se conociesen los tres ángulos, es evidente que todos los triángulos semejantes satisfacerian á la cuestion.

Teniendo que demostrar teoremas que estriban en las líneas trigonométricas y tratar de la resolucion de los triángulos, conviene que te dé algunas nociones relativas á la division de la circunferencia y la naturaleza de las líneas trigonométricas.

La circunferencia se divide en 360 partes iguales, llamadas *grados*; el grado en 60 *minutos*, el minuto en 60 *segundos*, etc.

Los grados, minutos y segundos se designan por los caracteres °, ′, ″.

El *complemento* de un ángulo ó de un arco es lo que queda restando este ángulo ó arco de 90°, así A siendo un ángulo, 90—A es su complemento. Mas como un ángulo ó arco puede esceder 90 grados, como puede ser menor que esta medida, resulta que el complemento puede ser positivo ó negativo, segun que A sea menor ó mayor que 90°.

El *suplemento* de un ángulo ó de un arco es lo que queda restando este ángulo ó arco de 180°; como el complemento, el suplemento puede ser positivo ó negativo.

Empléase para la resolucion del triángulo un cierto número de líneas llamadas trigonométricas que son designadas por los nombres siguientes :

Seno,	*Secante,*	*Tangente,*
Coseno,	*Cosecante,*	*Cotangente.*

El seno del arco AM ó del ángulo ACM (Fig. 285) es la perpendicular MP bajada de una estremidad de arco sobre el diámetro que pasa por la otra estremidad.

Si á la estremidad del radio CA, se lleva la perpendicular AT, hasta encontrar el radio CM prolon-

gado, la línea AT así terminada se llama la *tangente*, y CT la *secante* del arco AM ó del ángulo ACM. Estas tres líneas MP, AT, CT, dependientes del arco AM, y siempre determinadas por el arco AM y el radio, se designan así :

MP=sen AM, AT=tang AM, FC= sec AM.

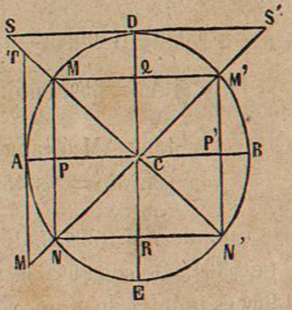

Fig. 285.

Si en los puntos M y D del arco AD, igual á un cuadrante, se lleva las líneas MQ, DS perpendiculares al radio CD, la una terminada en este radio y la otra terminada en el radio CM prolongado, las líneas MQ, DS y CS compondrán igualmente el seno, tangente y secante del arco MD, complemento de AM, las cuales, para abreviar, se designan bajo el nombre de coseno, cotangente y cosecante del arco AM, y se designan de esta manera : MQ=cos AM, DS=cot AM, CS=cosec RM. En general, A siendo un arco ó ángulo cualquiera se tiene

cos A=sen (90°—A), cot A=tang (90°—A), cosec A=sec (90°—A).

Supongamos que una estremidad del arco permanezca fijo en A, y que la estremidad marcada en M recorra sucesivamente toda la estension de la semi circunferencia desde A hasta B, en la direccion ADB;

en este caso designando por R el radio del círculo se tendrá

$$\text{Sen } 0=0, \text{ teng } 0=0, \text{ cos } 0=R, \text{ sec } 0+R.$$

Pero si AM=45º, entonces se tiene

$$\text{tang AM ó tang } 45^{\circ}=\text{cot } 45^{\circ}=R$$
$$\text{sen } 45^{\circ}=\text{cos } 45=\tfrac{1}{2}R\sqrt{2}$$

Cuando AM=90º, entonces se tiene
Sen 90º=R, cos 90º=0, y en cuanto á la tangente 90º es infinita, lo que se designa de la manera siguiente : tang 90º=∞.

Siendo cero el suplemento de 90º, se tiene tang 0= cot 90 y cot 0=tang 90, luego cot 0=∞ y cot 90=0.

El arco aumentando aun, los senos disminuyen, y los cosenos aumentan ; si se lleva M'M paralela á AB, es claro que los arcos AM, BM' comprendidos entre paralelas serán iguales ; así como tambien las perpendiculares ó senos MP, M'P' ; pero siendo el arco M'B el suplemento de AM', puesto que AM'+BM' es igual á una circunferencia, el seno de un arco ó de un ángulo es necesariamente igual al seno del suplemento de este arco ó de este ángulo. Se tiene por consiguiente :

$$\text{Sen A}=\text{sen }(180-\text{A}).$$

Los mismos arcos AM', AM que son suplementos el uno del otro y que tienen senos iguales, tienen tambien iguales los cosenos CP', CP ; pero hay que observar que estos cosenos se dirigen en diferentes

sentidos, y esta diferencia de situacion se espresa en el cálculo por la oposicion de signos, de modo que si se consideran positivos ó afectados del signo + los cosenos menores que 90º, será preciso considerar como negativos ó afectados del signo — los cosenos de los arcos mayores que 90º, y por consiguiente se tendrá generalmente :

$$\text{Cos A}=-\text{cos }(180-\text{A}), \text{ ó bien cos }(90+\text{B})=-\text{cos }(90-\text{B}),$$

lo que equivale á decir que el coseno de un arco ó de un ángulo mayor que 90º es igual al coseno de su suplemento tomado negativamente.

$$\text{Sen }(180)=0, \text{ cos } 180=-R.$$

Examinamos lo que hay que decir relativamente á la tangente de un arco mayor que 90º. Segun la definicion que he dado, debe ser determinada por el concurso de las líneas AT, CM', las cuales no se encuentran en el sentido AT, sino en el opuesto AV, de lo cual se concluye que la tangente de un arco mayor que 50º es negativa. Por otra parte si se observa que AV es la tangente del arco AN suplemento de AM' (pues NAM' es una semi-circunferencia), se concluirá que la tangente de un arco ó de un ángulo mayor que 90º es igual á la de su suplemento, tomado negativamente, de manera que se tiene tang A=—tang (180—A).

Lo mismo sucede relativamente á la cotangente, representada por DS', la cual es igual, y en sentido contrario á DS cotangente de AM. Por consiguiente se tiene

$$\text{Cot}\,A=-\text{cot}\,(180-A).$$

Como los cosenos, las tangentes y cotangentes son negativas desde 90° á 180°, y en este último límite se tiene tang $180=0$, cot $180=-\text{cot}\,0=-\infty$

Facil es estender estas observaciones en caso que las cotangentes esten comprendidas entre 180° y 360°, pues dos líneas trigonométricas siendo generalmente perpendiculares á uno ó al otro diámetro DCF y ACB, con tal que sean perpendiculares á un mismo diámetro y sean de una misma naturaleza, afectarán el mismo signo si estan situadas en un mismo lado del diámetro, y signos contrarios si estan situadas en lados diferentes.

§ II.

Teoremas relativos á las líneas trigonométricas.

Teorema. — El seno de un arco es la mitad de la cuerda que sostiene un arco doble.

Pues el radio CA, perpendicular á MN, divide en dos partes iguales la cuerda MN y el arco correspondiente MAN; luego MP, seno del arco MA, es la mitad de la cuerda MN que sostiene el arco MAN doble de MA.

Teorema. — El cuadrado del seno de un arco, mas el cuadrado de su coseno, es igual al cuadrado de un radio, de manera que se tiene :

$$\text{Sen}^2 A+\cos^2 A=R^2\ (^*).$$

Esta propiedad resulta inmediatamente del triángulo rectángulo CMP, en que se tiene $MP^2+CP^2=CM^2$.

Resulta que dado el seno de un arco hallaráse su coseno, y viceversa mediante las fórmulas $\cos A=\pm\sqrt{(R^2-\text{sen}^2 A)}$, $\text{sen}\,A=\pm\sqrt{(R^2-\cos^2 A)}$. El doble signo de estas fórmulas procede de que el mismo signo MP responde á dos arcos AM, AM′, cuyos cosenos CP, CP′ y de signos contrarios, como el mismo coseno CP responde á dos arcos AM, AN, cuyos senos MP, PN son tambien iguales y de signos contrarios.

Teorema. — Dados los senos y cosenos de un arco se puede hallar las otras líneas trigonométricas.

Los triángulos semejantes CPM, CAT, CDS, nos dan inmediatamente :

$$\text{Tang}\,A=R\frac{\sin A}{\cos A},\quad \sec A=\frac{R^2}{\cos A}$$

$$\text{Cos}\,A=R\frac{\cos A}{\text{sen}\,A},\quad \text{cosec}\,A=\frac{R^2}{\text{sen}\,A}.$$

Teorema — Dados el seno y el coseno de

(*) Desígnase por $\text{sen}^2 A$ el cuadrado del seno A, como tambien por $\cos^2 A$ el cuadrado del cos A.

dos arcos se puede determinar el seno y el coseno de la suma ó de la diferencia de estos arcos.

Sea el arco $AB=a$ (Fig. 286), el arco $BD=b$ y el radio $AC=R$, y por consiguiente $ABD=a+b$. De los puntos B y D bájese BE, DP perpendiculares á CA; del punto D, llévese DA perpendicular é BC, y enfin, del punto I, llévese IK perpendicular é IL paralela á AC.

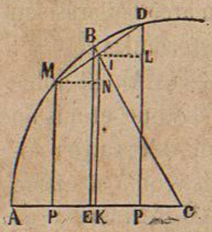

Fig. 286.

Los triángulos semejantes BCE, ICK dan las proporciones siguientes :

$$CB:CI::BF:IK;\ \text{ó}\ R:\cos b::\text{sen}\,a:IK=\frac{\text{sen}\,a\cos b}{R}$$

$$CB:CI::CE:CK;\ \text{ó}\ R:\cos b::\cos a:CK=\frac{\cos a\cos b}{R}$$

Los triángulos DIL, CBE, que tienen sus lados recíprocamente perpendiculares son semejantes y dan las proporciones siguientes :

$$CB:DI::CE:DL;\ \text{ó}\ R:\text{sen}\,b::\cos a:DL=\frac{\cos a\,\text{sen}\,b}{R}$$

$$CB:DI::BE:IL;\ \text{ó}\ R:\text{sen}\,b::\text{sen}\,a:IL=\frac{\text{sen}\,a\,\text{sen}\,b}{R}$$

Pero $IK+DL=DF=\text{sen}(a+b)$ y $CK-IL=CF=\cos(a+b)$, luego por consiguiente $\text{sen}(a+b)=$

$$\frac{\text{sen}\,a\cos b-\text{sen}\,a\,\text{sen}\,b}{R}$$

$$\cos(a+b)=\frac{\cos a\cos b-\text{sen}\,a\,\text{sen}\,b}{R}$$

Ahora bien, si se prolonga el seno DI hasta que encuentre la circunferencia en M, el resultado será :

$$BM=BD=b,\ \text{y}\ MI=ID=\text{sen}\,b.$$

Si por el punto M se lleva MP perpendicular y MN paralela á AC, puesto que $MI=DI$, se tendrá $MN=IL$, y $NI=DL$. Pero como se tiene

$IK-IN=MP\text{sen}\ (a+b)$ y $EK+MN=CP=\cos\ (a-b)$,

consecuentemente se tiene : $\text{sen}\ (a-b)=$

$$\frac{\text{sen}\,a\,\text{sen}\,b-\text{sen}\,b\cos a}{R}$$

$$\cos\ (a-b)=\frac{\cos a\cos b+\text{sen}\,a\,\text{sen}\,b}{R}$$

Si en las fórmulas precedentes se hace $b=a$, resulta : $\text{sen}\ {}^2a=\dfrac{{}^2\text{sen}\,a\cos a}{R}$ $\cos{}^2a=\dfrac{\cos{}^2a-\text{sen}\,{}^2a}{R}$

Si en estas últimas se reemplaza a por $\dfrac{a}{2}$, resulta :

$$\text{sen}\,a=\frac{{}^2\text{sen}\,\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}a}{R}\quad \cos a=\frac{\cos{}^2a-\text{sen}\,{}^2a}{R}$$

Y como se tiene á la vez $\cos^2\frac{1}{2}a+\text{sen}^2\frac{1}{2}a=R^2$ y $\cos^2\frac{1}{2}a-\text{sen}^2\frac{1}{2}a=R\cos a$, el resultado es

$\cos^2 \tfrac{1}{2}a = \tfrac{1}{2}R^2 - \tfrac{1}{2}R \cos a$ y $\text{sen}^2 \tfrac{1}{2}a = \tfrac{1}{2}R^2 - \tfrac{1}{2}R \cos a$

y por consiguiente $\text{sen}\, \tfrac{1}{2}a = \sqrt{\tfrac{1}{2}R^2 - \tfrac{1}{2}\cos a}$

Estas fórmulas dan el seno y el coseno de la mitad de un arco en funcion del coseno de este arco.

Las fórmulas' que dan el seno $(a+b)$ y del coseno $(a+b)$ dan las fórmulas siguientes si las adiciona ó resta de dos en dos,

$$\text{Sen A} \cos \text{B} = \tfrac{1}{2}R\, \text{sen}\, (a+b) + \tfrac{1}{2}R\, \text{sen}\, (a-b);$$

$$\text{Sen B} \cos \text{A} = \tfrac{1}{2}R\, \text{sen}\, (a+b) - \tfrac{1}{2}R\, \text{sen}\, (a-b);$$

$$\text{Cos A} \cos \text{B} = \tfrac{1}{2}R \cos\, (a-b) + \tfrac{1}{2}R \cos\, (a+b);$$

$$\text{Cos A} \cos \text{B} = \tfrac{1}{2}R \cos\, (a-b) + \tfrac{1}{2}R \cos\, (a+b).$$

Si en estas fórmulas se hace $a+b=p$, $a-b=q$, lo que da $a=\frac{p+q}{2} b=\frac{p-q}{2}$, se puede deducir lo siguiente :

$$\text{sen}\, p + \text{sen}\, q = \frac{2}{R} \text{sen}\, \tfrac{1}{2}(p+q) \cos \tfrac{1}{2}(p-q)$$

$$\text{sen}\, p - \text{sen}\, q = \frac{2}{R} \text{sen}\, \tfrac{1}{2}(p-q) \cos \tfrac{1}{2}(p+q)$$

$$\cos p + \cos q = \frac{2}{R} \cos \tfrac{1}{2}(p+q) \cos \tfrac{1}{2}(p-q)$$

$$\cos q - \cos p = \frac{2}{R} \text{sen}\, \tfrac{1}{2}(p+q)\, \text{sen}\, \tfrac{1}{2}(p-q)$$

En fin, teniendo en consideracion que

$$\frac{\text{sen}\, a}{\cos a} = \frac{\text{tang}\, a}{R} = \frac{R}{\cos + a},$$

se puede sacar por la division las fórmulas siguientes :

$$\frac{\text{sen}\, p + \text{sen}\, q}{\text{sen}\, p - \text{sen}\, q} = \frac{\text{tang}\, \tfrac{1}{2}(p+q)}{\text{tang}\, \tfrac{1}{2}(p-q)},$$

$$\frac{\text{sen}\, p - \text{sen}\, q}{\cos p - \cos q} = \frac{\text{tang}\, \tfrac{1}{2}(p+q)}{R}.$$

$$\frac{\text{sen} p + \text{sen} q}{\cos p - \cos q} = \frac{\cos \tfrac{1}{2}(p+q)}{R}, \quad \frac{\text{sen}\, p - \text{sen}\, q}{\cos p + \cos q} = \frac{\text{tang}\, \tfrac{1}{2}(p-q)}{R}$$

$$\frac{\text{sen}\, p + \text{sen}\, q}{\cos p - \cos q} = \frac{\cot \tfrac{1}{2}(p+q)}{R}, \quad \frac{\cos p + \cos q}{\cos q + \cos p} = \frac{\cot \tfrac{1}{2}(p+q)}{\text{tang} \tfrac{1}{2}(p-q)}$$

$$\frac{\text{sen}\, p + \text{sen}\, q}{\text{sen}\, p + \text{sen}\, q} = \frac{\cos \tfrac{1}{2}(p+q)}{\cos \tfrac{1}{2}(p-q)}, \quad \frac{\text{sen}\, p + q}{\text{sen}\, p - \sin q} = \frac{\text{sen}\, \tfrac{1}{2}(p+q)}{\text{sen}\, \tfrac{1}{2}(p-q)}$$

§ III.

Construccion de tablas de senos, cosenos, etc.

Hay arcos cuyas líneas trigonométricas pueden ser directamente calculadas. Así, el lado del hexágono siendo igual al radio, la mitad de este radio es el seno del ángulo de 30°. El lado del decágono inscrito es dado por la proporcion

$$R : x :: x : R - x$$

$$x^2 + Rx = R^2 \text{ y } x = -\frac{R}{2} \pm \sqrt{R^2 + \frac{R^2}{4}}$$

Así $\frac{x}{2}$ es igual al seno del ángulo de 18°.

Síguese de lo espuesto que si se representa el radio por un número, por la unidad, por ejemplo, se tendrá rigorosamente el valor numérico de los senos del ángulo de 30° y de 18°. Por medio de las fórmulas precedentes se podrá calcular el valor de los ángulos de

$$9^\circ,\ 27^\circ,\ 36^\circ,\ 45^\circ,\ 54^\circ,\ 63^\circ,\ 72^\circ,\ 81^\circ.$$

En efecto conociendo el seno y el coseno de los arcos de 9° y de 18° por medio de la fórmula : sen $(a+b)=$sen a cos $b+$sen b cos a, se tendrá el valor del seno 27 haciendo $b=18$ y $a=9$, resultando en este caso :

$$\text{Sen }(27)=2 \text{ sen } 9 \cos 18 \text{ sen } 18 \cos 9.$$

Para calcular las líneas trigonométricas intermedias, se parte del principio que un arco menor que 90° es siempre menor que su tangente y mayor que su seno, de lo que resulta que cuando un arco es bastante pequeño para que sensiblemente se confundan su seno y su tangente, se puede tomar el arco por seno, y como la semi-circunferencia cuyo radio es 1 siendo $=3.1415......$, y la semi-circunferencia conteniendo $180\times60\times60$ segundos. Dividiendo π por este número, se tendrá el valor del arco de un segundo que se podrá tomar por su seno, y por consiguiente se podrá calcular sucesivamente de segundo en segundo los senos de todos los arcos, y para verificacion servirse de los medios precedentemente indicados.

§ IV.

Principios para la resolucion de los triángulos.

Teorema. — En todo triángulo rectángulo, el radio es al seno de los ángulos agudos como la hipotenusa es al lado opuesto á este ángulo.

Sea ABC (Fig. 287) el triángulo propuesto rectángulo en A; del punto C como centro y del radio CD, igual al radio de las tablas, descríbase el arco DE que será la medida del ángulo C; bájese sobre CD la perpendicular AF que será el seno del ángulo C; los triángulos CBA, CEF son semejantes y dan la proporcion

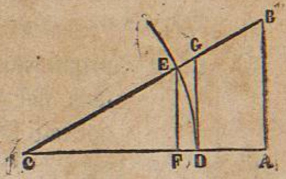

Fig. 287.

$$CE : EF :: CB : BA;$$

por consiguiente

$$R : \text{sen } C :: BC : BA,$$

y suponiendo $R=1$, resultará $BA=BC$ sen C.

Teorema. — En todo triángulo rectángulo

el radio es á la tangente de uno de los ángulos agudos, como el lado adyacente á este ángulo es al lado opuesto.

Despues de describir el arco DE (Fig. 287), trázese sobre CB la perpendicular DG que será la tangente del ángulo C. Por los triángulos semejantes CDG, CAB, se tendrá la proporcion :

$$R:\text{tang}\,C::CA:AB.$$

Teorema. — En un triángulo rectilíneo cualquiera los senos de los ángulos son como los lados opuestos.

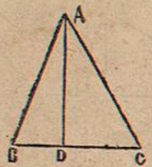

Fig. 288.

Sea ABC (Fig. 288) el triángulo propuesto, AD la perpendicular bajada del vértice A sobre el lado opuesto BC; podrá suceder dos cosas :

1ª Si la perpendicular cae dentro del triángulo ABC, los triángulos rectángulos ABD, ACD darán :

$$R:\text{sen}\,B::AB:AD,$$
$$R:\text{sen}\,C::AC:AD.$$

En estas dos proporciones siendo iguales los estremos, se podrá con los medios hacer la proporcion :

$$\text{Sen}\,C:\text{sen}\,B::AB:AC.$$

2ª Si la perpendicular cae fuera del triángulo

ABC (Fig. 288), los triángulos rectángulos ABD, ACD darán aun las proporciones :

$$R:\text{sen}\,ABD::AB:AD,$$
$$R:\text{sen}\,C::AC:AD,$$

de lo que se deduce : sen C:sen ABD::AB:AC. Pero como el ángulo ABD es suplemento de ABC ó B, se tiene :

Sen ABD=sen B ; y por consiguiente resulta :

$$\text{Sen}\,C:\text{sen}\,B::AB:AC.$$

Teorema. — En todo triángule rectilíneo, el coseno de un ángulo es al radio, como la suma de los cuadrados de los lados que comprenden este ángulo, menos el cuadrado del tercer lado, es al doble rectángulo de los dos primeros lados.

Del vértice A (Fig. 288) bájese una perpendicular AD sobre el lado opuesto, y si cae dentro se tendrá.

$\overline{AC}^2=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2-2BC\times BD$, de lo que resulta

$$BD=\frac{\overline{AB}^2+BC^2-AC^2}{2BC};$$

pero como se tiene en el triángulo rectángulo ABD : R: sen BAD::AB:BD, y por otra parte

sen B—D=cos B, luego por consiguiente

$\cos B=\frac{R\times BD}{AB}$, y sustituyendo resulta

$$\cos B = R \times \frac{\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - \overline{AC}^2}{2AB \times BC}$$

Si cae afuera la perpendicular resulta (Fig. 289).

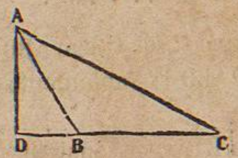

Fig. 289.

$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + 2BC \times BD$, y por consiguiente $BD = \frac{\overline{AC}^2 - \overline{AB}^2 - \overline{BC}^2}{2BC}$; pero como se tiene $\text{sen } BAD = \cos ABD = \frac{R \times BD}{AB}$, y por otra parte ABD es suplemento de ABC, ó B, se tiene en consecuencia $\cos B = -\cos ABD = -\frac{R \times BD}{AB}$, de lo que resulta

$$\cos B = R \times \frac{\overline{AB}^2 \times \overline{BC}^2 \overline{AC}^2}{2AB \times BC}.$$

Teorema. — En todo triángulo rectilíneo, la suma de los dos lados es á su diferencia, como la tangente y la mitad de la suma de los ángulos opuestos á estos lados es á la tangente de la mitad de la diferencia de estos mismos ángulos. (Fig. 288.)

Pues de la proporcion $AB : AC :: \text{sen } C : \text{sen } B$, se

saca $AC + AB : AC - AB :: \text{sen } B + \text{sen } C : \text{sen } B - \text{sen } C$; pero hemos visto precedentemente que

$$\text{sen } B + \text{sen } C : \text{sen } B - \text{sen } C :: \text{tang}\left(\frac{B+C}{2}\right) :$$

$\text{tang}\,\frac{B-C}{2}$; luego $AC + AB : AC - AB :: \text{tang}\,\frac{B+C}{2} : \text{tang}\,\frac{B-C}{2}$.

§ V.

Resolucion de los triángulos rectángulos.

Llamemos A, B, C, los tres ángulos del triángulo; a, b, c, los tres lados opuestos.

Designando por A el ángulo recto, y por a la hipotenusa. tendremos cuatro problemas que examinar :

Problema. — Dada la hipotenusa a y un lado b, hallar c y ademas B y C.

La proporcion $a : b :: R : \text{sen } R$, determina $BC = 90 - B$.

$$c = \sqrt{a^2 b^2}.$$

Problema. — Dados b y c, hallar a, B, C.

La proporcion $c : b :: R : \text{tang } B$, da el ángulo B