$$\cos B = R \times \frac{\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - \overline{AC}^2}{2AB \times BC}$$

Si cae afuera la perpendicular resulta (Fig. 289).

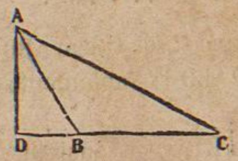

Fig. 289.

$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + 2BC \times BD$, y por consiguiente $BD = \frac{\overline{AC}^2 - \overline{AB}^2 - \overline{BC}^2}{2BC}$; pero como se tiene $\text{sen } BAD = \cos ABD = \frac{R \times BD}{AB}$, y por otra parte ABD es suplemento de ABC, ó B, se tiene en consecuencia $\cos B = -\cos ABD = -\frac{R \times BD}{AB}$, de lo que resulta

$$\cos B = R \times \frac{\overline{AB}^2 \times \overline{BC}^2 \overline{AC}^2}{2AB \times BC}.$$

Teorema. — En todo triángulo rectilíneo, la suma de los dos lados es á su diferencia, como la tangente y la mitad de la suma de los ángulos opuestos á estos lados es á la tangente de la mitad de la diferencia de estos mismos ángulos. (Fig. 288.)

Pues de la proporcion $AB : AC :: \text{sen } C : \text{sen } B$, se saca $AC + AB : AC - AB :: \text{sen } B + \text{sen } C : \text{sen } B - \text{sen } C$; pero hemos visto precedentemente que

$$\text{sen } B + \text{sen } C : \text{sen } B - \text{sen } C :: \text{tang}\left(\frac{B+C}{2}\right) :$$

$\text{tang}\frac{B-C}{2}$; luego $AC + AB : AC - AB :: \text{tang}\frac{B+C}{2} : \text{tang}\frac{B-C}{2}$.

§ V.

Resolucion de los triángulos rectángulos.

Llamemos A, B, C, los tres ángulos del triángulo; a, b, c, los tres lados opuestos.

Designando por A el ángulo recto, y por a la hipotenusa. tendremos cuatro problemas que examinar :

Problema. — Dada la hipotenusa a y un lado b, hallar c y ademas B y C.

La proporcion $a : b :: R : \text{sen } R$, determina $BC = 90 - B$.

$$c = \sqrt{a^2 b^2}.$$

Problema. — Dados b y c, hallar a, B, C.

La proporcion $c : b :: R : \text{tang } B$, da el ángulo B

C es igual á 90—B

a se determina por la proporcion sen B : R : : b : a.

Problema.—Dados a y B, hallar b y c.

Se hace las proporciones R : sen B : : a : b. R : cos B : : a : c.

Problema.—Dados b y B, hallar a y c.

b : a : : sen B : R, y R : cos B : : b : c.

§ VI.

Resolucion de los triángulos rectilíneos.

Llamemos A, B, C, los tres ángulos de un triángulo; a, b, c, los tres lados opuestos. Cuatro problemas tendremos que examinar.

Problema.—Dados a y dos ángulos, hallar b y c.

Los dos ángulos conocidos determinan el tercero.
Las proporciones : sen A : sen B : a : b.
sen A : sen C : : a : c.
determina b y c.

Problema.—Dados a, b y A, hallar c, B y C.

La proporcion a : b : : sen A : sen B, da B ó 180—B. El ángulo en cuestion puede tener dos valores, pero que solo tienen lugar cuando A es agudo y que $b > a$. Si A es obtuso, el ángulo en cuestion no puede serlo, así no habrá mas que una solucion, y si R siendo agudo se tiene $b < a$, tambien no hay mas que una solucion.

Conocido A y B conclúyese C, y despues c por la proporcion

sen A : sen C : : a : c.

Problema. — Dados a, b y C, hallar A, B y C.

$$\frac{A+B}{2} \text{ es igual á } \frac{180-C}{2}$$

Se tendrá la mitad de la diferencia poniendo $a+b : a-b : : \text{tang} \tfrac{1}{2} (A+B) : \text{tang} \tfrac{1}{2} (A-B)$.

Y así sucesivamente se conocerá A y B. El lado c se determina por la proporcion sen A : sen C : : a : c.

Problema. — Dados a, b, c, hallar A, B, C.

Sábese que $\cos A = R\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)$; lo que da el ángulo A; B y C pueden hallarse por una fórmula semejante; pero por el cálculo se logra con mas comodidad observando que

$R^2 - R \cos A = 2 \text{ sen}^2 \tfrac{1}{2} A$; sustituyendo el valor de

cos A resulta $2\,\text{sen}^2\tfrac{1}{2}A=R^2\frac{(a^2-b^2-c^2+2bc)}{2bc}=$
$R^2\frac{(a^2-(b-c)^2)}{2bc}=R^2\frac{(a+b-c)(a-b+c)}{2bc}$ por consiguiente $\text{sen}\,\tfrac{1}{2}A=R\sqrt{\frac{(a+b-c)(a-b+c)}{4bc}}$

CARTA VIGÉSIMASEGUNDA.

TRIGONOMETRIA ESFÉRICA.

§ I.

Nociones preliminares.

Amigo Eugenio, en mi anterior he tratado de la trigonometría plana ó rectilínea por ser los triángulos que hay que resolver rectilíneos; en la presente mi objeto es acabar esta ciencia tratando de la otra parte en que los matemáticos acostumbran á dividirla, llamanla trigonometría esférica, porque los triángulos que se propone resolver estan formados sobre la superficie de una esfera por arcos de círculos máximos.

Antes de pasar adelante, pienso oportuno recordarte algunas definiciones cuyo conocimiento es indispensable para la inteligencia de la ciencia que nos ocupa.