cos A resulta $2\,\text{sen}^2\tfrac{1}{2}A = R^2\dfrac{(a^2-b^2-c^2+2bc)}{2bc} =$

$R^2\dfrac{(a^2-(b-c)^2)}{2bc} = R^2\dfrac{(a+b-c)(a-b+c)}{2bc}$ por consiguiente $\text{sen}\,\tfrac{1}{2}A = R\sqrt{\dfrac{(a+b-c)(a-b+c)}{4bc}}$

CARTA VIGÉSIMASEGUNDA.

TRIGONOMETRIA ESFÉRICA.

§ I.

Nociones preliminares.

Amigo Eugenio, en mi anterior he tratado de la trigonometría plana ó rectilínea por ser los triángulos que hay que resolver rectilíneos; en la presente mi objeto es acabar esta ciencia tratando de la otra parte en que los matemáticos acostumbran á dividirla, llamanla trigonometría esférica, porque los triángulos que se propone resolver estan formados sobre la superficie de una esfera por arcos de círculos máximos.

Antes de pasar adelante, pienso oportuno recordarte algunas definiciones cuyo conocimiento es indispensable para la inteligencia de la ciencia que nos ocupa.

Llámase polo de un círculo de la esfera un punto de la superficie igualmente lejano de todos los puntos de la circunferencia de este círculo; se demuestra que todo círculo trazado sobre la esfera tiene dos polos.

Un triángulo esférico es una parte de la superficie de la esfera compuesta por tres arcos de círculos máximos; estos arcos que se llaman los lados del triángulo, se suponen siempre menores que la semi-circunferencia; los ángulos que entre sí hacen sus planos son los ángulos del triángulo.

Un triángulo esférico toma el nombre de *rectángulo*, *isóscele*, *equilátero*, en los mismos casos que un triángulo rectilíneo.

Un polígono esférico es una parte de la superficie terminada por muchos arcos de círculos máximos.

Una pirámide esférica es la parte de sólido de la esfera comprendida entre los planos de un ángulo sólido cuyo vértice está en el centro; la base de la pirámide es el polígono esférico interceptado por los mismos planos.

Entendido esto pasemos á demostrar los teoremas siguientes.

Teorema. — En todo triángulo esférico un lado cualquiera es menor que la suma de los dos otros.

Esto resulta de que, en un ángulo triedro, un ángulo plano es menor que la suma de los otros dos.

Teorema — La suma de los tres lados de un triángulo esférico es menor que la circunferencia de un círculo máximo.

Pues la suma de tres ángulos planos de un tetraedro es menor que cuatro rectos.

Teorema. — Si se lleva un diámetro perpendicular contenido sobre la esfera, las estremidades de este diámetro serán los polos de este círculo.

Porque si se hace pasar un plano por este diámetro, este plano cortará el círculo en dos planos A, B y la esfera siguiendo un círculo teniendo por diámetro el diámetro de la esfera, se ve que si se hace volver este círculo alrededor del diámetro que se considera, describirá la superficie de la esfera, mientras que los dos puntos A y B describirán el círculo de seccion considerado en primer lugar.

Teorema. — Todo plano perpendicular á las estremidades de un radio es tangente á la esfera.

Porque si no fuese tangente tocaria la esfera en otro punto, luego la oblicua y perpendicular llevadas de un mismo punto á un mismo plano serian iguales, lo que es imposible.

Teorema. — El ángulo que entre sí hacen

dos arcos de círculos máximos es igual al ángulo formado por las dos tangentes de estos arcos en el vértice del arce.

Pues siendo el ángulo de un triángulo esférico el que está formado por los dos planos de los dos lados, el ángulo de dos planos se mide por el ángulo formado por dos perpendiculares elevados á la comun interseccion, y así se hallan en este caso las dos tangentes en el vértice del arco.

Teorema. — Dado el triángulo *ABC* (fig. 290), si, de los puntos *A, B, C*, como polos, se describen los arcos *EF, FD, DE,* que forman el triángulo *DEF*, recíprocamente los tres puntos *D, E, F,* serán los polos de los lados *BC, AC, AB.*

Pues el punto A, siendo el polo del arco EF, la distancia AE es un cuadrante; y el punto C, siendo el polo del arco DE, la distancia CE es igualmente un cuadrante, por consiguiente el punto E dista un cuadrante de cada uno de los puntos A y C, por cuya razon es el polo del arco AC. De la misma manera puede demostrarse que E es el

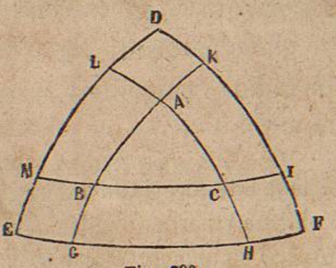

Fig. 290.

polo del arco BC, y F el del arco AB. Por consiguiente el triángulo ABC puede ser descrito por medio de DEF, como DEF por medio de ABC.

Teorema. — Admitido cuanto acabo de establecer en el problema precedente, cada ángulo de uno de los triángulos *ABC, DEF*, tendrá por medida la semi-circunferencia menos el lado opuesto en el otro triángulo.

Prolónguese, si se quiere, los lados AB, AC, hasta encontrar EF en G y H; puesto que el punto A es el polo del arco GH, el ángulo A tendrá por medida el arco GH; pero el arco EH es un cuadrante lo mismo que GF, puesto que AE es el polo de AH, y F el polo de AG; luego EH+GF vale una media circunferencia. Mas EH+GF es lo mismo que EF+GH; luego el arco GH, que mide el ángulo A, es igual á una semi-circunferencia menos el lado EF.

De la misma manera el ángulo B tendrá por medida $\frac{1}{2}$ circunferencia —DF, y el ángulo C $\frac{1}{2}$ circunferencia —DE.

Esta propiedad debe ser recíproca entre los dos triángulos, pues que se describen de la misma manera, uno por medio de otro. Así hallaráse que los ángulos D, E, F, del triángulo DEF tienen respectivamente por medida $\frac{1}{2}$ circunferencia —BC, $\frac{1}{2}$ circ.—AC, $\frac{1}{2}$ circ.—AB; en efecto el ángulo D, por ejemplo, tiene por medida el arco MI. Este arco MI+BC= MC+BI=$\frac{1}{2}$ circ.; el arco MI, medida del ángulo D=$\frac{1}{2}$ circ.—BC, y así de los otros ángulos.

Los dos triángulos ABC, DEF, se llaman triángulos polares.

§ II.

Relaciones entre los ángulos y lados de un triángulo esférico.

Sea O (Fig. 291) el centro de la esfera en que está situado el triángulo ABC; llevo los radios OA, OB, OC; trazo sobre OA, las perpendiculares AD y AE, la una en el plano OAB, y la otra en el plano OAC, y supongo que en D y E encuentran los radios OB y OC prolongados; el ángulo DAE es igual al ángulo A del triángulo esférico, y tomando por unidad el radio OA, se tendrá AD=tang c, OD= sec c.

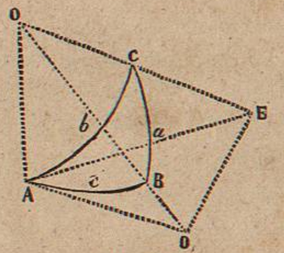

Fig. 291.

$$AE=\text{tang}\, b \quad OE=\sec b.$$

Los triángulos DAE, DOE, dan, segun las fórmulas de la trigonometría rectilínea:

$$\overline{AE}^2+\overline{AE}^2-2AD.\ AE\cos A=\overline{DE}^2$$
$$\overline{OD}^2+\overline{OE}^2\quad 2OD.\ OE\cos a=\overline{DE}^2$$

Restando la segunda de la primera, y llamando 1 el radio de la esfera, resulta

$$1-\sec b\sec c\cos a+\text{tang}\, b\ \text{tang}\, c\cos A=o.$$

pero $\sec b=\frac{1}{\cos b}$, $\text{tang}\, b=\frac{\text{sen}\, b}{\cos b}$, $\cos c=\frac{1}{\cos c}$, luego resulta $1-\frac{\cos a}{\cos b\cos c}+\frac{\text{sen}\, b\ \text{sen}\, c\cos A}{\cos b\cos C}=0$

$$(1)\ \cos a=\cos b\cos c+\text{sen}\, b\ \text{sen}\, c\cos A.$$

Tal es la fórmula fundamental de la trigonometría esférica.

Es evidente que con una construccion semejante se pudiera tener las dos otras fórmulas:

$$(2)\ \cos b=\cos a\cos c+\text{sen}\, a\ \text{sen}\, c\cos B.$$

$$(3)\ \cos c=\cos a\cos b+\text{sen}\, a\ \text{sen}\, b\cos C.$$

que dan dos nuevas relaciones entre los tres lados del triángulo y un ángulo.

Para lograr una relacion entre dos lados y dos ángulos, es preciso eliminar un lado entre dos cualesquiera de estas ecuaciones.

La primera puede escribirse bajo la forma siguiente:

$$\cos A=\frac{\cos a-\cos b\cos c}{\text{sen}\, b\ \text{sen}\, c}$$

$$\text{y}\ \text{sen}^2A=1-\cos^2A=1-\frac{(\cos a\cos b\cos c)^2}{\text{sen}^2b\ \text{sen}^2c}=$$
$$\frac{(1-\cos^2b)(1-\cos^2c)-(\cos a-\cos b\cos c)^2}{\text{sen}^2b\ \text{sen}^2c}=$$
$$\frac{1-\cos^2a-\cos^2b-\cos^2c+2\cos a\cos b\cos c}{\text{sen}^2b\ \text{sen}^2c}$$

Dividamos los dos números por $\text{sen}^2 a$ y estraigamos la raiz de estos dos números; el resultado será

$$\frac{\text{sen A}}{\text{sen } a}=\frac{\sqrt{1-\cos^2 a-\cos^2 b-\cos^2 c+2\cos a\cos b\cos c}}{\text{sen } a \text{ sen } b \text{ sen } c}$$

El mismo valor hallariamos en $\frac{\text{sen B}}{\text{sen } b}$ y $\frac{\text{sen C}}{\text{sen } c}$.

Tenemos pues las dos nuevas ecuaciones:

$$(4)\quad \frac{\text{sen A}}{\text{sen } a}=\frac{\text{sen B}}{\text{sen } b},\quad \frac{\text{sen A}}{\text{sen } a}=\frac{\text{sen C}}{\text{sen } c}.$$

Lo que prueba que en un triángulo esférico los senos de los ángulos son entre sí como los senos de los lados opuestos.

Facil es hallar una relacion entre dos lados, el ángulo que comprenden, y el ángulo opuesto al uno de ellos; en efecto, eliminando $\cos c$ entre las ecuaciones (1) y (3) resulta $\cos a=\cos c \cos^2 b+\cos b \text{ sen } a \text{ sen } b \cos \text{C}+\text{sen } b \text{ sen } c \cos \text{A}$. Observemos que $\cos a-\cos a \cos^2 b=\cos a \text{ sen}^2 b$. y dividiendo todos por $\text{sen } b \text{ sen } a$, resulta:

$$\frac{\cos a \text{ sen } b}{\text{sen } a}=\cos b \cos \text{C}+\frac{\text{sen } c \cos \text{A}}{\text{sen } a}$$

Pero $\frac{\text{sen } c}{\text{sen } a}=\frac{\text{sen C}}{\text{sen A}}$; por consiguiente resulta

$$(5)\quad \cot a \text{ sen } b=\cos b \cos \text{C}+\text{sen C} \cot \text{A}.$$

Por el mismo método puédense hallar las cinco ecuaciones siguientes:

$$(6)\quad \cot b \text{ sen } a=\cos a \cos \text{C sen C} \cot \text{B}.$$

$$(7)\quad \cot a \text{ sen } c=\cos c \cos \text{B}+\text{sen B} \cot \text{A}.$$

$$(8)\quad \cot c \text{ sen } a=\cos a \cos \text{B}+\text{sen B} \cot \text{C}.$$

$$(9)\quad \cot b \text{ sen } c=\cos c \cos \text{A}+\text{sen A} \cot \text{B}.$$

$$(10)\quad \cot c \text{ sen } b=\cos b \cos \text{A}+\text{sen A} \cot \text{C}.$$

En fin puédese hallar una relacion entre un ángulo y tres ángulos, eliminando b y c entre las tres ecuaciones (1), (2) y (3). Con este objeto se lleva en la ecuacion (1) el valor sacado de la ecuacion (3), lo que da

$$\frac{\cos a \text{ sen } b}{\text{sen } a}=\cos b \cos \text{C}+\frac{\text{sen } c \cos \text{A}}{\text{sen } a}$$

Y si se observa que $\frac{\text{sen } b}{\text{sen } a}=\frac{\text{sen B}}{\text{sen A}}$ y $\frac{\text{sen } c}{\text{sen } a}=\frac{\text{sen C}}{\text{sen A}}$

resulta sustituyendo:

$$\cos a \text{ sen B}=\cos b \text{ sen A} \cos \text{C}+\cos \text{A sen C}.$$

Por un medio semejante hállase la ecuacion $\cos b$, $\text{sen A}=\cos a \text{ sen B} \cos \text{C}+\cos \text{B sen C}$.

Despues eliminando $\cos b$ entre estas dos últimas ecuaciones resulta.
$\cos a \text{ sen B}=(\cos a \text{ sen B} \cos \text{C}+\cos \text{B sen C}) \cos \text{C}+\cos \text{A sen C}$ y por consiguiente

$$\cos \text{A}=\frac{\cos \text{A sen B}-\cos a \text{ sen B} \cos^2 \text{C}-\cos \text{B sen C} \cos c}{\text{sen C}}$$

y consiguientemente

$$(11)\quad \cos \text{A}=+\cos a \text{ sen B sen C}-\cos \text{B} \cos \text{C}.$$

Tambien encontramos dos relaciones semejantes:

$$(12)\quad \cos \text{B}=\text{sen A sen C} \cos b-\cos \text{A} \cos \text{C}.$$

$$(13)\ \cos C = \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B \cos c - \cos A \cos B.$$

Bastan estas fórmulas para la resolucion de los triángulos, no obstante á veces es cómodo recurrir á otras.

§ III.

Analogias de Neper.

Las ecuaciones (1) y (2) pueden escribirse

$$\operatorname{Cos} a - \cos b \cos c = \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c \cos A,$$
$$\operatorname{Cos} b - \cos a \cos c = \operatorname{sen} a \operatorname{sen} c \cos B,$$

de las que observando que

$$\frac{\operatorname{sen} a}{\operatorname{sen} b} = \frac{\operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} B} \text{ se saca :}$$

$$\frac{\cos b - \cos a \cos c}{\cos a - \cos b \cos c} = \frac{\operatorname{sen} A \cos B}{\operatorname{sen} B \cos A}, \text{ ó bien}$$

$$(P)\ \frac{\cos b - \cos a}{\cos b + \cos a} \times \frac{1 + \cos c}{1 - \cos c} = \frac{\operatorname{sen} (A-B)}{\operatorname{sen} (A+B)}$$

$$\text{Pero } \frac{\cos b - \cos a}{\cos b + \cos a} = \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(a+b) \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(a-b)$$

$$\frac{1 + \cos c}{1 - \cos c} = \frac{1}{\operatorname{tang}^2 \frac{1}{2}c}$$

$$\operatorname{Sen} (A+B) = 2 \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}(A+B) \cos \tfrac{1}{2}(A+B),$$

$$\text{y sen } (A-B) = 2 \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}(A-B) \cos \tfrac{1}{2}(A-B).$$

Sustituyendo estos valores en la ecuacion (P) hállase :

$$(M)\ \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(a+b) \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(a-b) =$$
$$\operatorname{tang}^2 \tfrac{1}{2}c \left(\frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(A-B) \cos \frac{1}{2}(A-B)}{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(A+B) \cos \frac{1}{2}(A+B)} \right)$$

Por otro lado, á causa de $\frac{\operatorname{sen} a}{\operatorname{sen} b} = \frac{\operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} B}$, se tiene :

$$(N)\ \frac{\operatorname{sen} a + \operatorname{sen} b}{\operatorname{sen} a - \operatorname{sen} b} = \frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2}(a+b)}{\operatorname{tang} \frac{1}{2}(a-b)};$$

por lo cual la ecuacion (N) se vuelve

$$(Q)\ \frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2}(a+b)}{\operatorname{tang} \frac{1}{2}(a-b)} = \frac{\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} A - \operatorname{sen} B};$$

mas queda demostrado en la trigonometria rectilínea que $\frac{\operatorname{sen} a + \operatorname{sen} b}{\operatorname{sen} a - \operatorname{sen} b} = \frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2}(a+b)}{\operatorname{tang} \frac{1}{2}(a-b)}$

y la ecuacion (M), multiplicada miembro á miembro con la ecuacion (Q), da, despues de estraidas las raices,

$$(14)\ \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(a+b) = \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}c \frac{\cos \frac{1}{2}(A-B)}{\cos \frac{1}{2}(A+B)};$$

y dividiendo la ecuacion (M) miembro á miembro por la ecuacion (Q), hállase :

$$(15)\ \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(a-b) = \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}c \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(A-B)}{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(A+B)}.$$

Aplicando estas fórmulas al triángulo polar, se reemplaza a, b, c, A, B, por $180-A$, $180-B$, $180-C$, $180-a$, $180-b$, lo que da :

$$(16)\ \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(A+B) = \cot \tfrac{1}{2}C \frac{\cos \frac{1}{2}(a-b)}{\cos \frac{1}{2}(a+b)}.$$

$$(17)\ \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(A-B) = \cot \tfrac{1}{2}C \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(a-b)}{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(a+b)}.$$

§ IV.

Resolucion de los triángulos esféricos rectángulos.

Para tener las fórmulas propias al triángulo rectángulo basta establecer $A=90^o$; y en este caso las relaciones precedentes se vuelven :

(α) $\cos a=\cos b \cos c$,
(β) $\operatorname{sen} b=\operatorname{sen} a \operatorname{sen} B$, $\quad \operatorname{sen} c=\operatorname{sen} a \operatorname{sen} C$,
(γ) $\operatorname{tang} b=\operatorname{tang} a \cos C$, $\quad \operatorname{tang} c=\operatorname{tang} a \cos B$,
(δ) $\operatorname{tang} b=\operatorname{sen} c \operatorname{tang} B$, $\quad \operatorname{tang} c=\operatorname{sen} b \operatorname{tang} C$,
(ε) $\cos B=\operatorname{sen} C \cos b$, $\quad \cos C=\operatorname{sen} B \cos c$,
(θ) $\cos a=\cot B \cot C$.

Solo pienso oportuno considerar los triángulos que tienen un solo ángulo recto, aunque en realidad los hay que tienen dos y aun tres ángulos rectos; pues, en este último caso, los tres lados son cuadrantes, habiendo dos en el otro, y teniendo el último ángulo por medida el tercer lado.

Conocidos a y b, hallar c, B, C.
Las relaciones (α), (β), (γ) nos dan

$$\cos c \frac{\cos a}{\cos c},\quad \operatorname{sen} B=\frac{\operatorname{sen} b}{\operatorname{sen} a},\quad \cos C=\frac{\operatorname{tang} b}{\operatorname{tang} a}.$$

Conociendo b y c, hallar A, B, C.
Las relaciones (α), (δ), dan :

$$\operatorname{cosen} a=\cos b \cos c,\quad \operatorname{tang} B=\frac{\operatorname{tang} b}{\operatorname{tang} c},\quad \operatorname{tang} C=\frac{\operatorname{tang} c}{\operatorname{sen} b}.$$

Conociendo a, B, hallar b, c, C.
Las relaciones (β), (γ), dan

$$\operatorname{sen} b=\operatorname{sen} a \operatorname{sen} B,\quad \operatorname{tang} c=\operatorname{tang} a \cos B,\quad \cot C=\cos a \operatorname{tang} B.$$

Conociendo b, B, hallar a, c, C.
Las relaciones (β), (δ), (ε) dan

$$\operatorname{sen} a=\frac{\operatorname{sen} b}{\operatorname{sen} B},\quad \operatorname{sen} c=\frac{\operatorname{tang} b}{\operatorname{tang} B},\quad \operatorname{sen} C=\frac{\cos B}{\cos b}.$$

Este problema es susceptible en general de dos soluciones, la una correspondiente á una hipotenusa menor que 90^o, la otra mayor.

Dados b, C, hallar a, c, B.
Las relaciones (γ), (δ), (ε) dan

$$\operatorname{tang} a=\frac{\operatorname{tang} b}{\operatorname{tang} C},\quad \operatorname{tang} c=\operatorname{sen} b \operatorname{tang} C,\quad \cos B=\cos b \operatorname{sen} C.$$

Dados B y c, hallar a, b, c.
Las ecuaciones (ε), (θ) dan :

$$\cos a=\cot B \cot C,\quad \cos b=\frac{\cos B}{\cos C},\quad \cos c=\frac{\cos C}{\cos B}.$$

§ V.

Resolucion de cualquier triángulo esférico.

Conociendo a, b, c, hallar A, B, C.
Las ecuaciones (1) (2) (3)

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\operatorname{sen} b \operatorname{sen} c}$$

$$\cos B = \frac{\cos b - \cos a \cos c}{\operatorname{sen} a \operatorname{sen} c}.$$

$$\cos C = \frac{\cos c - \cos a \cos b}{\operatorname{sen} c \operatorname{sen} b}$$

dan inmediatamente la solucion.

Conociendo a, b, A, hallar c, B, C.

La proporcion $\frac{\operatorname{sen} a}{\operatorname{sen} b} = \frac{\operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} B}$ da desde luego el ángulo B.

Se puede determinar c y C por las analogías de Neper que dan :

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}c = \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(a-b) \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(A+B)}{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(A-B)}$$

$$\cot \tfrac{1}{2}C = \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(A-B) \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(a+b)}{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(a-b)}$$

Conociendo a, b, C, hallar A, B, c.

Las fórmulas (5) y (6)

$$\cot A = \frac{\cot a \operatorname{sen} b - \cos b \cos C}{\operatorname{sen} C},$$

$$\cot B = \frac{\cot b \operatorname{sen} a - \cos a \cos C}{\operatorname{sen} C}$$

determinan A y B.

La proporcion $\frac{\operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} A} = \frac{\operatorname{sen} c}{\operatorname{sen} a}$ determina el cos c.

Conociendo A, B, c, hallar a, b, C.

Las fórmulas (7) y (9)

$$\cot a = \frac{\cos A \operatorname{sen} B + \cos b \cos c}{\operatorname{sen} c},$$

$$\cot b = \frac{\cot B \operatorname{sen} A + \cos A \cos c}{\operatorname{sen} c}$$

dan a y b. Las analogías de Neper conducen tambien á estos valores :

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(a+b) = \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}c \frac{\cos \frac{1}{2}(A-B)}{\cos \frac{1}{2}(A+B)}$$

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(a-b) = \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}c \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(A-B)}{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(A+B)}.$$

La ecuacion $\frac{\operatorname{sen} a}{\operatorname{sen} c} = \frac{\operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} C}$ da el ángulo C.

Conociendo A, B, a, hallar b, c, C.

La ecuacion $\frac{\operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} B} = \frac{\operatorname{sen} a}{\operatorname{sen} b}$ da b.

Las analogías de Neper dan c y C.

Como se ha visto en el

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}c = \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(a-b) \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(A+B)}{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(A-B)}$$

$$\cot \tfrac{1}{2}C = \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(A-B) \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(a+b)}{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(a-b)}.$$

Conociendo A, B, C, hallar a, b, c.

Las ecuaciones (11), (12), (13)

$$\cos a = \frac{\cos A + \cos B \cos C}{\operatorname{sen} B \operatorname{sen} C}$$

$$\cos b = \frac{\cos A + \cos B \cos C}{\text{sen } A \text{ sen } C}$$

$$\cos c = \frac{\cos C + \cos A \cos B}{\text{sen } A \text{ sen } B}$$

resuelven el triángulo.

Concluyo aquí la trigonometria, cuyas nociones mas prolijas podrás, cuando gustes, adquirir en tratados mas estensos: la primera vez que te escriba pienso tratar la geometría analítica.

GEOMETRIA

ANALITICA.