$$\cos b = \frac{\cos A + \cos B \cos C}{\operatorname{sen} A \operatorname{sen} C}$$

$$\cos c = \frac{\cos C + \cos A \cos B}{\operatorname{sen} A \operatorname{sen} B}$$

resuelven el triángulo.

Concluyo aquí la trigonometria, cuyas nociones mas prolijas podrás, cuando gustes, adquirir en tratados mas estensos; la primera vez que te escriba pienso tratar la geometría analítica.

# GEOMETRIA

## ANALITICA.

# CARTA VIGÉSIMATERCERA.

## DE LA GEOMETRIA ANALITICA.

### § I.

De los problemas determinados.

Amigo, Eugenio, llámase geometría analítica aquella parte de las matemáticas cuyo fin es aplicar el álgebra á la resolucion de las cuestiones de geometría.

Las líneas, las superficies, los sólidos pueden referirse á una unidad de medida, y evaluarse en números para mayor generalidad, números que pueden representarse por letras, y bajo esta forma es evidente que pueden someterse á todos los cálculos de álgebra y aritmética.

A veces sucede que una cuestion geométrica es susceptible de ponerse tan fácilmente en ecuacion que, para lograrlo, no hay necesidad de reglas; trátese por ejemplo de dividir una recta en media y estrema razon; en este caso se designará por $a$ la línea dada, y por $x$ el mayor segmento; el mas pequeño segmento será entonces $a-x$, y se tendrá en consecuencia:

$$x^2=a(a-x)$$

cuyo resultado es $x=\frac{a}{2}\pm\sqrt{a^2+\frac{a^2}{4}}$.

El segundo valor es negativo y no puede convenir á la cuestion, pues es evidente que el segmento que se busca solo puede ser una cantidad positiva, de modo que solo se tiene una resolucion

$$x=-\frac{a}{2}+\sqrt{a^2+\frac{a^2}{4}}.$$

Es claro que despues de haber evaluado en número la línea dada, mediante cierta unidad longitudinal, no habrá mas que ejecutar los cálculos indicados en la fórmula precedente para conocer el número de las unidades linearias que contiene el segmento que se busca.

En caso que no se encuentre á primera vista la ecuacion que se busca, se hará uso de la regla siguiente debida á Newton.

Cuando se propone un problema, se lo deberá mirar como resuelto, comparar entre sí todas las cantidades que encierra sin ninguna distincion entre las que son conocidas y las desconocidas, y examinar despues como dependen unas de otras para reconocer cuales son que siendo dadas podrian con-



ducir á la determinacion de las otras; de esta manera será facil poner el problema en ecuacion.

No obstante no es siempre facil la aplicacion de esta regla, sucediendo á menudo que es preciso trazar en la figura líneas auxiliares que deben espresarse por medio de las líneas que se reputan conocidas, y cuyos valores deben despues entrar en los valores de las líneas que se reputan desconocidas, y en este caso los cálculos se vuelven tan enredados á causa de la multitud de términos que complican estos valores, que la regla precedente se modifica de esta manera.

Despues de haber trazado en la figura todas las líneas incógnitas ó no incógnitas que se hallan en la cuestion propuesta, se llevarán las líneas auxiliares que se juzgarán propias á facilitar su solucion empleando los teoremas de geometría. Estas líneas auxiliares serán nuevas incógnitas que deberán considerarse como si estuviesen en el mismo enunciado de la cuestion, y en este caso se establecerán las ecuaciones que entre sí ligan todas las líneas de la figura. Cuando el problema es determinado, se llegará siempre á un número de ecuacion igual al de las líneas incógnitas, y el problema de geometría se reducirá á la solucion de estas ecuaciones.

Resolviendo la cuestion precedente,

$$x^2=a\,(a-x),$$

hemos hallado en $x$ dos valores, uno positivo y otro negativo; sin embargo al enunciar la ecuacion solo se preveia una solucion positiva. Es importante reconocer el valor negativo de $x$ y lo que ha podido introducirlo en la ecuacion; para lograrlo, se observa que dividir una recta en media y estrema razon es (Fig. 292) dividir una recta AB en dos partes AM,

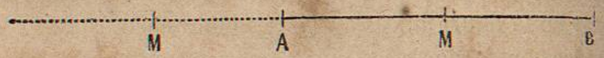


Fig. 292.

MB, de tal suerte que el segmento AM sea medio proporcional entre la línea entera AB y el otro segmento MB.

Estableciendo $AM=x$, $MB=a-x$, $AB=a$, la ecuacion del problema es:

$$x^2=a\,(a-x),$$

de donde se saca los dos valores

$$x=\frac{a}{2}\pm\sqrt{a^2+\frac{a^2}{4}}.$$

El primero es positivo y menor que $a$, determinando un punto M entre A y B. El segundo es negativo, y por esta razon no puede convenir. Cambiando el signo de $x$ la ecuacion se vuelve

$$x^2=a\,(a+x),$$

y tomando positivamente el valor de $x$, que era anteriormente negativo, se tiene la espresion

$$x=\frac{a}{2}+\sqrt{a^2+\frac{a^2}{4}}.$$



que deberá satisfacer á la ecuacion precedente; pero, como esta ecuacion es precisamente la que se halla si en la prolongacion de la recta BA, mas allá de A, le busco un punto M′, tal que la distancia AM′ sea media proporcional entre la distancia BM′ y la recta dada AB, de lo que resulta que llevando el valor positivo de $x$ del lado AB á la derecha de A, y el valor negativo de $x$ tomada del lado AX á izquierda de A, prescindiendo del signo, se tendrá todas las soluciones del problema propuesto, generalizado de la siguiente manera.

En una recta indefinida que pasa por dos puntos dados, A y B, determinar un punto cuya distancia al punto A sea media proporcional entre su distancia al otro punto B y la distancia dada AB. Hubiérase podido proponer desde luego este último enunciado, considerando el problema como resuelto, y suponiendo que el punto M llenase todas las condiciones, hubiéramos hecho la incógnita $AM=x$, y hubiéramos llegado á la misma ecuacion $x^2=a\,(a-x)$, y á los mismos valores de $x$.

$$x^2=-\frac{a}{2}+\pm\sqrt{a^2+\frac{a^2}{4}}.$$

Pero desde el principio he introducido una restriccion agena al enunciado, pues he sometido los cálculos á la suposicion que el punto buscado no estaba colocado entre los puntos A y B. El valor positivo es el solo que responde á esta hipótesis, y el valor negativo, tomado positivamente y llevado del lado AX opuesto al lado en que se ha buscado el punto M, determinará la segunda solucion del problema.

Así el valor negativo sirve ya para completar la resolucion de un problema cuya cuestion propuesta no es mas que un caso particular, ya á poner una restriccion introducida para poder efectuar los razonamientos y cálculos. Pero lo que en todos casos debe observarse es que este valor, tomado como cantidad absoluta, se ha llevado del lado opuesto al en que debia estar situada la distancia que se busca.

## § II.

**Problemas indeterminados. Modo de representar por ecuaciones los lugares geométricos. De las coordenadas y trasformacion de estas.**

Has visto en trigonometría que sen² $a+\cos^2 a=R^2$; estableciendo sen² $a=x^2$, y $\cos^2 a=y^2$, se tendrá $x^2+y^2=R^2$. Esta última ecuacion representa un lugar geométrico, pues esta relacion tiene lugar en todos los puntos de la circunferencia del círculo cuyo radio es R, teniendo solo lugar en estos puntos.

Se ve por lo tanto que es posible representar una curva por medio de una ecuacion de dos incógnitas.

Para construir los diferentes puntos de esta curva se da cierto valor á una de las dos cantidades $x$ ó $y$ que se llama variable y se saca el valor de la otra, en cuyo caso se puede observar que hay dos valores, lo que yo habia hecho observar en trigonometría; pues el ángulo A tiene el mismo seno que 180—A,



pero el coseno de estos dos ángulos son de signos contrarios.

Para fijar en un plano la posicion de un punto M (Fig. 293), trázase en este plano dos rectas XX′ YY′, que se llaman *ejes*, y se considera este punto como el vértice de un paralelógramo MBOA, cuyos ejes son lados prolongados. La distancia MA de su igual AO se llama la *abcisa* del punto M, y la distancia MA de su igual BO se llama la *ordenada* de este punto. La abcisa y la ordenada de un punto son las *coordenadas* de este punto; y el punto O donde se cortan los ejes se llama el origen de las coordenadas.

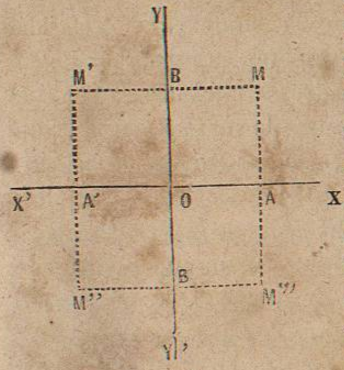


Fig. 293.

Represéntanse las abcisas por la letra X y las ordenadas por la letra Y; y se miran como positivas las abcisas contadas desde O hácia X; y como negativas las contadas desde O hasta X′ de la misma manera considéranse positivas las ordenadas contadas desde O hácia Y, y como negativas las contadas desde O hácia Y′. Ahora bien, si se considera 4 puntos M, M′, M″, M‴, cuyas coordenadas tengan los mismos valores absolutos $x$ é $y$, las del punto M serán $+x$ y $+y$; las del punto M′ $-x$ y $+y$; las del punto M″, $-x$ y $-y$; y últimamente las del punto M‴ $+x$ y $-y$.

Así se conoce perfectamente la posicion de un punto en un plano cuando se conoce el valor absoluto y los signos de sus coordenadas.

El eje YY′ se llama el eje de las ordenadas ó el eje de las $y$, y el eje XX′, el de las abcisas ó el eje de las $x$.

Hemos visto que la ecuacion del círculo referida á dos diámetros rectangulares, era $x^2+y^2=R^2$; en este caso los dos diámetros son los dos ejes XX′ é YY′ rectangulares á los que la curva se refiere. Supongamos que se quiera buscar la ecuacion del círculo referido á dos ejes paralelos á los primeros; llamemos $\alpha$ y $\beta$ las coordenancias de este nuevo origen (Fig. 594). Sea O el centro y M un punto de la cir-

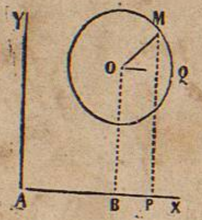


Fig. 294.

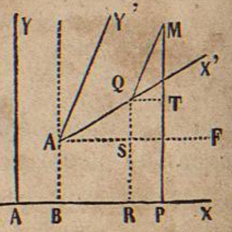


Fig. 295.

cunferencia; llevemos OB, MP, perpendiculares al eje AX y OQ, perpendicular á MP. El triángulo OMQ da $OQ^2+MQ^2=OM^2$; y como $OQ=AP-AR=x-a$, $MQ+MP-OB=y-\beta$ y $OM=R$, luego la ecuacion del círculo referido á sus nuevos ejes es:

$$(x-a)^2+(y-\beta)^2=R^2.$$

Este proceder de trasformacion es general.

Para hallar la ecuacion B de una curva referida á nuevos ejes paralelos á los primeros, débese cambiar, en la ecuacion A, $x$ en $x-a$ é $y$ en $y-b$; $a$ y designando las coordinadas del nuevo origen referido á los antiguos ejes.



Pasemos al caso general de trasformacion en que al mismo tiempo se cambia el origen y direccion de los ejes.

Sean AX y AY los ejes primitivos (Fig. 595) que entre sí forman el ángulo $YAX=\theta$; para determinar los nuevos ejes A′X′ y AY′, basta conocer las coordenadas AB, A′B del origen A′ y los ángulos X′A′F é Y′A′F, que hacen estos ejes con la recta A′F paralela á AX; designemos estas dos coordenadas por $a$ y $b$, y los dos ángulos por $\alpha$ y $\alpha'$.

Sea M un punto cualquiera; llévese MP paralela á AY y MQ paralela á A′Y′, las antiguas coordenadas del punto M serán $AP=x'$, $PM=y$, y las nuevas serán $A'Q=x'$, $MQ=y'$.

Por el punto Q llévese QR paralela á AY y QT paralela á AX, de lo que resultará.

$$AP \text{ ó } x=a+A'S+QT, \quad PM \text{ ó } y=b+QS+MT.$$

Segun la trigonometría el triángulo A′QS da:

$$\frac{A'S}{\text{sen } A'QS}=\frac{QS}{\text{sen } QA'S}=\frac{A'Q}{\text{sen } A'SQ}.$$ Pero $AQ=x'$.

$$\text{Sen } A'QS=\text{sen } EA'x'=\text{sen } (\theta-\alpha),$$

$$\text{Sen } QA'S=\text{sen } \alpha,$$

$$\text{Sen } A'SQ=\text{sen } (180-\theta)=\text{sen } \theta.$$

Luego $$\frac{A'S}{\text{sen}(\theta-\alpha)}=\frac{QS}{\text{sen } \alpha}=\frac{x'}{\text{sen } \theta}$$

$$A'S=\frac{x'\text{sen}(\theta-\alpha)}{\text{sen } \theta}, \quad QS=\frac{x'\text{sen } \alpha}{\text{sen } \theta}.$$

De un modo semejante el triángulo MQT da :

$$\frac{\mathrm{QT}}{\mathrm{senQMT}}=\frac{\mathrm{MT}}{\mathrm{senMQT}}=\frac{\mathrm{MQ}}{\mathrm{senMTQ}},\ \text{pero MQ}=y'.$$

Sen QMT=sen $y'$A'E=sen $(\theta-\alpha')$ ; sen MQT=sen $y'$ A'F=sen $\alpha'$ ; sen MTQ=sen $(180-\theta)$=sen $\theta$,

de lo que resulta $\frac{\mathrm{QT}}{\mathrm{sen}(\theta-\alpha')}=\frac{\mathrm{MT}}{\mathrm{sen}\ \alpha'}=\frac{y'}{\mathrm{sen}\ \theta}$.

y por consiguiente

$$\mathrm{QT}=\frac{y'\mathrm{sen}(\theta-\alpha')}{\mathrm{sen}\ \theta},\mathrm{MT}=\frac{y'\mathrm{sen}\ \alpha'}{\mathrm{sen}\ \theta}.$$

Reemplazando A'S, QT, QS, MT, por sus valores, se halla :

$$x=\alpha+\frac{x'\mathrm{sen}(\theta-\alpha)+y'\mathrm{sen}(\theta-\alpha')}{\theta},\ \frac{y=\beta+y'\alpha+y'\mathrm{sen}\alpha'}{\theta}$$

Para pasar de un sistema de coordenadas rectangulares al sistema de coordenadas oblicuas se hace $\theta=90$. Resultan :

$$x=\alpha+x'\cos\alpha+y'\cos\alpha',$$
$$y=\beta+x'\ \mathrm{sen}\ \alpha+y'\ \mathrm{sen}\ \alpha.$$

Para pasar de un sistema rectangular á otro tambien rectangular, se pone $\alpha'=90+\alpha$, resultando :

$$x=a\times x'\cos\alpha-y'\ \mathrm{sen}\ \alpha,$$
$$y=b+x'\cos\alpha+y\cos\alpha.$$

## § III.

### Clasificacion de las líneas.

Cualquiera relacion existente entre dos variables



$x$ é $y$, espresada por una ecuacion, representa generalmente una curva, de manera que es infinito el número de curvas diversas que así puede representarse.

Llámanse curvas algebráicas todas las que se representan por una ecuacion de la forma $Ay^m+(Bx+c)y^{m\,1}+(Dx^2+Ex+F)y^{m\,2}....=0$, y trascendentes todas las demas.

Clasifícanse las líneas algebráicas segun el grado de sus ecuaciones, relativamente á las coordenadas $x$ é $y$, siendo marcado el orden de la línea por el esponente de este grado.

Me contentaré con hacerte conocer las curvas contenidas en la ecuacion general del segundo grado, $Ay^2+Bxy+Cx^2+Py+Ex+F=0$. Para pasar en revista las diferentes figuras que esta ecuacion representa, haré diversas hipótesis sobre diversos coeficientes que contiene, y empezaré por suponer $A=0$, $B=0$, y $C=0$ ; lo que reduce la ecuacion al primer grado, y, dividiendo todos los términos restantes por el coeficiente D, resulta :

$$y+ax+b=0.$$

Para mayor simplificacion, supongamos $b=0$.

La ecuacion $y+ax=0$ representa una línea M recta, pasando por el origen de las coordenadas ; y la ecuacion $y+ax+b=0$, una recta N paralela á la primera, y cortando el eje de las $y$ en un punto cuya ordenada es $b$ ; lo que es facil de verificar.

Muchos problemas pueden proponerse interesantes, sobre los cuales no insistiré no presentando dificultad considerable.

La ecuacion general del segundo grado tiene dos variables :

$Ay^2+Bxy+Cx^2+Dy+Ex+F=0$ resuelta con relacion á $y$ da :

$$y=\frac{B}{2A}x-\frac{D}{2A}\pm\frac{1}{2A}.$$

$$\sqrt{(B^2-4AC)x^2+2(BD-2AE)x+D^2-4AF}.$$

que se escribe

$$y=ax+b\pm G\sqrt{nx^2+px+q}.$$

Para construir la curva representada por esta ecuacion es evidente que bastará construir la recta $y=ax+b$, y de llevar encima y abajo en una paralela al eje de las Y (Fig. 296) dos longitudes $\alpha\beta$ y $\beta\gamma$ iguales entre sí, é iguales al valor particular que toma la espresion

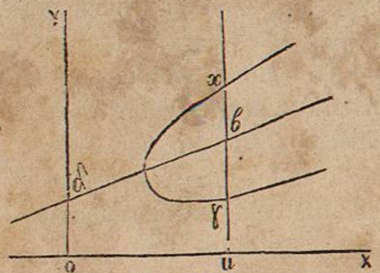

Fig. 296.

$$G\sqrt{nx^2+px+q}$$

cuando $x=\infty$, la recta $\delta\beta$ se llama diámetro, porque corta en dos partes iguales todas las cuerdas paralelas al eje de las Y.

La forma de la curva depende de los coeficientes $n$, $p$, $q$.

Si $n$ es negativo, $x$ no puede crecer indefinida-



mente, como se demuestra en álgebra. En este caso la curva es cerrada, pues está limitada en todos sentidos.

Si $n$ es positivo, la curva es ilimitada en todos sentidos, esto es, en el sentido de las X positivas y negativas, y en el de las Y positivas y negativas.

Si $n=o$, se tiene $G\sqrt{px+q}$; si se toma $x$ del mismo signo que $p$, el radical será siempre real mas allá de cierto valor. Si se toma $x$ con signo contrario, el radical se vuelve imaginario mas allá de cierto valor, y en este caso la curva será limitada de un modo elimitada de otro.

Trasportando los ejes paralelamente á sí mismos, lo que equivale á cambiar $x$ en $x'+a$, $y$ en $y'+b$, en la ecuacion general resulta :

$$Ay'^2+Bx'y'+Cx'^2+(2Ab+Ba+D)y'+(2Ca+Bb+E)x'+Ab^2+Bab+Ca^2+Db+Ea+F=0.$$

Como nada queda especificado sobre $a$ y $b$, puedo determinar estas dos longitudes por las condiciones siguientes :

$2Ab+Ba+D=0$, y $2Ca+Bb+E=0$, lo que da

$$a=\frac{2AE-BD}{B^2-4AC}\ b\ =\frac{2CD-BE}{B^2-4AC};$$

y como sabemos que $B^2-4AC$ ha sido representado por $n$ en el radical $\sqrt{nx^2+px+q}$; se ve en consecuencia que la simplificacion solo tiene lugar en $n\lesseqgtr 0$. En estos dos casos, la ecuacion simplificada es de la forma siguiente :

$$Ay'^2+Bx'y'+Cx'^2+Q=0.$$

Procuremos ahora reducirla empleando coordenadas que tengan el mismo origen, pero en diferentes direcciones de las primeras; con este objeto reemplacemos $x'$ por $x''\cos\alpha - y''\,\mathrm{sen}\,\alpha$, é $y$ por $x''\,\mathrm{sen}\,\alpha + y''\cos\alpha$; el resultado será:

$$\left.\begin{array}{l} A\cos^2\alpha \\ +C\,\mathrm{sen}^2\alpha \\ -B\,\mathrm{sen}\,\alpha\cos\alpha \\ \end{array}\right| y''2 \left.\begin{array}{l} +2A\,\mathrm{sen}\,\alpha\cos\alpha \\ -2C\,\mathrm{sen}\,\alpha\cos\alpha \\ +B\cos^2\alpha \\ -B\,\mathrm{sen}^2\alpha \end{array}\right| x''y'' \left.\begin{array}{l} +A\,\mathrm{sen} \\ +C\cos^2\alpha \\ +B\,\mathrm{sen}\,\alpha\cos\alpha \\ \end{array}\right| x''^2+Q=0$$

Puédese hacer desaparecer el término en $x''y''$; pues poniendo $2\,(A-C)\,\mathrm{sen}\,\alpha\cos\alpha + B\,(\cos^2\alpha - \mathrm{sen}^2 a)=0$, resulta

$$\mathrm{Tang}\ 2\alpha = \frac{-B}{A-B}.$$

Así en los dos primeros casos, la ecuacion general es de la forma $Mx^2+Ny^2+2=0$.

Volvamos ahora al caso en que el coeficiente $n$ del radical sea cero, lo que equivale á $B^2=4AC$; y en la fórmula general llevemos las fórmulas de trasformacion y direccion de las dadas

$$\left.\begin{array}{l} A\cos^2\alpha \\ +C\,\mathrm{sen}^2\alpha \\ -B\,\mathrm{sen}\,\alpha\cos\alpha \\ \end{array}\right| y''2 \left.\begin{array}{l} +2A\,\mathrm{sen}\,\alpha\cos\alpha \\ -2C\,\mathrm{sen}\,\alpha\cos\alpha \\ +B\cos^2\alpha \\ -B\,\mathrm{sen}^2\alpha \end{array}\right| x''y'' \left.\begin{array}{l} +A\,\mathrm{sen}^2\alpha \\ +C\cos^2\alpha \\ +B\,\mathrm{sen}\,\alpha\cos\alpha \\ \end{array}\right| x''^2+Q=0$$

ecuacion que simplificándola puede escribirse de la manera siguiente:

$$A'y''^2+B'x''y'+C'x''^2+Q'=0;$$

ahora bien, disponiendo el ángulo $a$ de manera que se pueda hacer desaparecer el término en $x''y''$, la relacion $B'^2=4A'C'=0$, nos muestra que uno de los



coeficientes $A'$ ó $C'$ tambien desaparece, de manera que la ecuacion se presenta bajo la forma:

$$M'y''^2+N'y'+Px'+Q'=0.$$

Ahora trasportemos los ejes paralelamente á sí mismos, poniendo $y''=y'''+p, x''=x'''+q$, tendremos:

$$M'y'''^2+(2M'p+N')y'''+Px'''+(M'p^2+N'p+P'q+Q')=0.$$

No pudiendo destruir á la vez el término en $y'''$ y en $x'''$, pues que P no varia, se pone:

$$2M'p+N'=0, \text{ y } M'p^2+N'p+P'q+Q'=0$$

lo que reduce en fin la ecuacion á la forma

$$M'y'''^2+Px'''=0.$$

## § IV.

### De la elipse, asíntota, etc.

Hemos visto que en el caso en que $B^2-4AC$ es mayor que cero, la ecuacion general del segundo grado puede reducirse á la forma:

$$Mx^2+Ny^2+R=0.$$

Eliminando $x$ é $y$ entre esta ecuacion y la ecuacion $y=ax$ de una recta POP' (Fig. 297) pasando por el origen, resultan valores iguales y signos contra-