Procuremos ahora reducirla empleando coordenadas que tengan el mismo origen, pero en diferentes direcciones de las primeras; con este objeto reemplacemos x' por $x''\cos\alpha - y''\,\mathrm{sen}\,\alpha$, é y por $x''\,\mathrm{sen}\,\alpha + y''\cos\alpha$; el resultado será:

$$\left.\begin{array}{l} A\cos^2\alpha \\ +C\,\mathrm{sen}^2\alpha \\ -B\,\mathrm{sen}\,\alpha\cos\alpha \\ \\ \end{array}\right| y''^2 \left.\begin{array}{l} +2A\,\mathrm{sen}\,\alpha\cos\alpha \\ -2C\,\mathrm{sen}\,\alpha\cos\alpha \\ +B\cos^2\alpha \\ -B\,\mathrm{sen}^2\alpha \end{array}\right| x''y'' \left.\begin{array}{l} +A\,\mathrm{sen} \\ +C\cos^2\alpha \\ +B\,\mathrm{sen}\,\alpha\cos\alpha \\ \\ \end{array}\right| x''^2 + Q = 0$$

Puédese hacer desaparecer el término en $x''y''$; pues poniendo $2\,(A-C)\,\mathrm{sen}\,\alpha\cos\alpha + B\,(\cos^2\alpha - \mathrm{sen}^2 a) = 0$, resulta

$$\mathrm{Tang}\,2\alpha = \frac{-B}{A-B}.$$

Así en los dos primeros casos, la ecuacion general es de la forma $Mx^2 + Ny^2 + 2 = 0$.

Volvamos ahora al caso en que el coeficiente n del radical sea cero, lo que equivale á $B^2 = 4AC$; y en la fórmula general llevemos las fórmulas de trasformacion y direccion de las dadas

$$\left.\begin{array}{l} A\cos^2\alpha \\ +C\,\mathrm{sen}^2\alpha \\ -B\,\mathrm{sen}\,\alpha\cos\alpha \\ \\ \end{array}\right| y''^2 \left.\begin{array}{l} +2A\,\mathrm{sen}\,\alpha\cos\alpha \\ -2C\,\mathrm{sen}\,\alpha\cos\alpha \\ +B\cos^2\alpha \\ -B\,\mathrm{sen}^2\alpha \end{array}\right| x''y'' \left.\begin{array}{l} +A\,\mathrm{sen}^2\alpha \\ +C\cos^2\alpha \\ +B\,\mathrm{sen}\,\alpha\cos\alpha \\ \\ \end{array}\right| x''^2 + Q = 0$$

ecuacion que simplificándola puede escribirse de la manera siguiente:

$$A'y''^2 + B'x''y'' + C'x''^2 + Q' = 0;$$

ahora bien, disponiendo el ángulo a de manera que se pueda hacer desaparecer el término en $x''y''$, la relacion $B'^2 = 4A'C' = 0$, nos muestra que uno de los coeficientes A' ó C' tambien desaparece, de manera que la ecuacion se presenta bajo la forma:

$$M'y''^2 + N'y' + Px' + Q' = 0.$$

Ahora trasportemos los ejes paralelamente á sí mismos, poniendo $y'' = y''' + p, x'' = x''' + q$, tendremos:

$$M'y'''^2 + (2M'p + N')y''' + Px''' + (M'p^2 + N'p + P'q + Q') = 0.$$

No pudiendo destruir á la vez el término en y''' y en x''', pues que P no varia, se pone:

$$2M'p + N' = 0, \text{ y } M'p^2 + N'p + P'q + Q' = 0$$

lo que reduce en fin la ecuacion á la forma

$$M'y'''^2 + Px''' = 0.$$

§ IV.

De la elipse, asiutota, etc.

Hemos visto que en el caso en que $B^2 - 4AC$ es mayor que cero, la ecuacion general del segundo grado puede reducirse á la forma:

$$Mx^2 + Ny^2 + R = 0.$$

Eliminando x é y entre esta ecuacion y la ecuacion $y = ax$ de una recta POP' (Fig. 297) pasando por el origen, resultan valores iguales y signos contrarios, de lo que resulta que las dos longitudes OP′ y OP son iguales y por consiguiente su origen es el centro de la curva, pues todas las cuerdas que pasan por este punto las divide en dos partes iguales. Si se resuelve la ecuacion relativamente á x, por ejemplo, resulta :

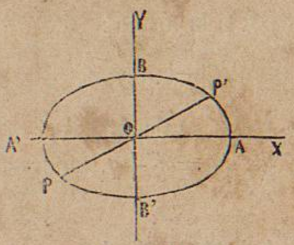

Fig. 297.

$$x \pm \sqrt{\frac{-R-NY^2}{M}},$$

de lo que se concluye que por un valor de y, se halla en x dos valores iguales y de signos contrarios; así el eje de Y divide en dos partes iguales todas las cuerdas paralelas al de X, y de la misma manera que el eje de X divide en dos partes iguales todas las cuerdas paralelas al eje de las Y. Las dos lineas AA′, BB′, se llaman los ejes de la curva, y si nos las representamos por las letras $2a$ y $2b$ tendremos :

$a^2=-\frac{R}{M}$, y $b^2=-\frac{R}{N}$; y por consiguiente la ecuacion se volverá : $a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2$.

Tal es la ecuacion de la curva llamada *elipse* referida á su centro y á sus ejes.

Si del punto O (Fig. 298) se describe un arco de círculo con un radio igual al medio eje a, este arco cortará el arco de las Y en dos puntos F′F′ simétri-

camente colocados á los dos lados del eje de las Y. Estos puntos llamados focos gozan de muchas propiedades que me propongo hacerte notar.

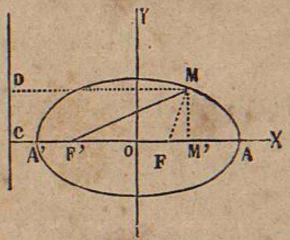

Fig. 298.

Llamemos c la distancia F′O, tendremos $c^2=a^2-b^2$; busquemos la distancia del punto M situado en la curva á cada uno de los focos designando por x é y las coordenadas del punto, tendremos á causa de los triángulos rectángulos, MF′M, y MFM′ las dos ecuaciones ME′$=\sqrt{y^2+(c+x)^2}$, y MF$=\sqrt{y^2+(x-c)^2}$; de lo que resulta MF′+MF$=2a$. Así llamando *radio vector* toda recta que parte de un foco y acaba en una curva, puédese decir que la suma de dos radios vectores, llevados desde un mismo punto de la elipse á los dos focos es constante.

Facil es ver ahora que, para describir una elipse de un movimiento continuo, basta tomar un cordon y atarlo á los dos puntos F′F′, despues de haberlo hecho pasar en un anillo. Haciendo deslizar este anillo sobre un plano que pase por los dos puntos F′M, de manera que se estienda el cordon, el camino recorrido representará una elipse.

Tomada la longitud OC$=\frac{a^2}{c}$, tiremos una perpendicular CD; esta perpendicular será una directriz de la elipse, es decir que será constante la razon de la distancia M′F′ á la longitud de la distancia MD, bajada sobre la directriz del punto M, pues, se tiene

$$MF':MD::a+\frac{cx}{a}:x+\frac{a^2}{c}::c:a;$$

la otra directriz está situada del otro lado del eje de las Y, y á una distancia igual.

La ecuacion de una recta que pase por dos puntos, cuyas coordenadas son x', y', x'', y'', es:

$$y-y'=\frac{y'=y''}{x'=x''}(x-x').$$

Y si estos dos puntos estuviesen sobre la elipse se tiene:

$$a^2y'^2+b^2x'^2=a^2b^2 a^2y''^2+b^2x''^2=a^2b^2,$$

y por consiguiente $a^2(y'^2-y''^2)+b^2(x'^2-x''^2)=0$, y

consecutivamente $\frac{y'-y''}{x'+x''}=-\frac{b^2(x'-x'')}{a^2(y'+y'')}$;

la ecuacion pues de la secante es de la forma:

$$y-y'=-\frac{b^2(x'-x'')}{a^2(y+y'')}(x-x').$$

Si la secante se vuelve tangente los puntos de interseccion se reunirán en un solo, y se tendrá: $x'=x''$, $y=y''$; la ecuacion de la tangente será:

$$y-y'=-\frac{b^2x'}{a^2y'}(x-x'), \text{ ó bien}$$

$$a^2yy'+b^2xx'=a^2b^2.$$

Siendo $x=-\frac{b^2x'}{a^2y^2}$ la tangente trigonométrica del

ángulo que hace esta recta con el eje de las x, resulta que la ecuacion de la normal, pasando por el mismo punto es:

$$y-y'=\frac{a^2y'}{b^2x'}(x-x').$$

En efecto, $y=mx+n$ siendo la ecuacion de una recta PQ (Fig. 299), m designa la tangente del ángulo ω. $Y=m'n+n'$ siendo la ecuacion de una recta P'Q', perpendicular á la primera, se tiene $m'=$ tang ω' é igual á

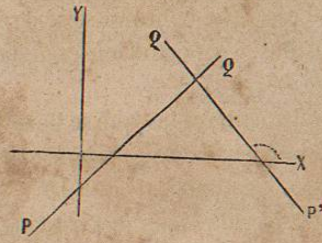

Fig. 299.

cot ω; pero como tang ω cot $\omega=1$, en este caso será $mm'=1$, y su resultado final:

$$\frac{a^2y'}{b^2x'}=-\frac{1}{\frac{bx'}{a^2y'}}$$

Las fórmulas para pasar de un sistema de coordenadas rectángular á un sistema de coordenadas oblicuas sin cambiar del origen son las siguientes:

$$Y=x'\text{ sen }\alpha+y'\text{ sen }\beta x=x'\cos\alpha+y'\cos\beta;$$

y sustituyendo en la ecuacion de la elipse estos valores de x y de y resulta:

$$\left.\begin{matrix}a^2\cos^2\alpha\\+b^2\text{sen}^2\alpha\end{matrix}\right|x'^2+\left.\begin{matrix}a^2\cos^2\beta\\+b^2\text{sen}^2\beta\end{matrix}\right|y'^2+\left.\begin{matrix}2a^2\cos\alpha\cos\beta\\+2\beta^2\text{sen}\alpha\text{sen}\beta\end{matrix}\right|x'y'=a^2b^2.$$

Para hacer desaparecer el término en xy, se debe igualar el coeficiente $2a^2 \cos\alpha \cos\beta + 2\beta^2 \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta$ á cero, de donde se saca $\operatorname{tang}\alpha \operatorname{tang}\beta = -\frac{b^2}{a^2}$.

Por medio de esta relacion se podrá dar á uno de los ejes coordenados la direccion que se quiera, hallando al momento la del otro, y siempre que se satisfaga esta relacion, se dice que la curva se refiere á sus diámetros conjugados, y su ecuacion es de la siguiente forma $a'^2y'^2 + b'^2x'^2 = a'^2b'^2$.

Llámanse cuerdas suplementares las que se llevan de un mismo punto de la curva á las estremidades de un mismo diámetro. Sea $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$ la ecuacion de una elipse referida á sus ejes rectangulares.

Sea AA′ un diámetro, llevemos de un punto cualquiera B las cuerdas suplementares BA, BA′, llamemos $x'-y'$ las coordenadas del punto A′; las de A′ serán $x'-y'$; sean en fin x'' é y'', las del punto B; la ecuacion de la recta BA′ será

$$y-y=\frac{y''-y'}{x''-x'}(x-x')\text{; la de BA será :}$$

$$y+y'=\frac{y''+y'}{x''\pm x}(x+x')\text{;}$$

el producto $\left(\frac{y''-y'}{x''-x'}\right)\left(\frac{y''+y'}{x''+x'}\right)$ es igual á $-\frac{b^2}{a^2}$.

Esta es precisamente la condicion que liga los diámetros; de lo que resulta que dos diámetros paralelos á dos cuerdas suplementares son conjugados.

§ V.

De la hipérbola.

La ecuacion general del segundo grado en el caso que $B^2-4AC<0$, puede reducirse á la forma siguiente :

$$Mx^2 - M'y^2 + R = 0.$$

ecuacion que puede escribirse bajo la forma :

$$a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2$$

poniendo $\frac{R}{M}=a^2$ y $\frac{R}{M'}=b^2$.

El estudio de esta nueva curva llamado hipérbola es enteramente análogo al de la precedente. Si se resuelve con relacion á una de las invariables, despues de haber supuesto la otra nula, hallaráse $x=\pm a$ de un lado, é $y=\pm b\sqrt{-1}$, del otro; así uno de estos ejes solamente corta la curva; llamándose por esta propiedad transverso.

La distancia F′0 de un foco al centro es igual á $\sqrt{a^2+b^2}$, y ordinariamente se la llama c la diferencia F′M—FM de dos radios rectores es igual á $2a$.

Dos directrices existen como en la elipse.

En fin es análogo al de la elipse el cálculo de la tangente de la normal, como igualmente la determinacion de los diámetros conjugados de las cuerdas suplementares, etc.

Si, sin cambiar el origen de las coordenadas, se pasa á los ejes oblicuos de manera que se tenga

$$\tan \alpha = \frac{b}{a} \quad \tan \beta = -\frac{b}{a}$$

la ecuacion se reduce á $axy^2=K^2$.

Estos nuevos ejes toman el nombre de *asíntota* á causa de la propiedad que tienen de ir aproximándose constantemente de la curva sin encontrarla jamas.

Llamemos $x'y'$, $x''y''$, las coordenadas de los dos puntos de la hipérbole, la ecuacion de la secante pasando por estos es la siguiente :

$$y-y'=\frac{y'-y''}{x'-x''}(x-x')$$

Pero $x'y'=k^2$ y $x''y''=k^2$ luego $\frac{y'-y''}{x'-x''}=\frac{x'-x''}{k^2}$ y haciendo $x'-x''$, $y'=y''$ la secante se vuelve tangente y la antigua ecuacion $y-y'=\frac{x'x''}{k^2}(x-x)$ se vuelve $y-y'=\frac{x'^2}{k^2}(x-x')$; si en esta última ecuacion se hace sucesivamente $x=0$ é $y=0$ se deducen dos valores $y=y'$ $x=2x'$ que (Fig. 300) evidentemente indican que BM=AM.

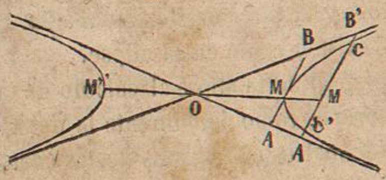

Fig. 300.

Llevando una paralela B'A' á la tangente

es facil establecer que B'C=CA', pues ademas de ser B'M'=M'A', como CC' es una cuerda paralela á la tangente BA, el diámetro M''OMM' que pasa por el punto de contacto toca esta cuerda en dos partes iguales CM' y CM', lo que establece que BC=A'C'.

§ VI.

De la parábola.

Fáltanos examinar la curva representada por la forma $M'y'''^2+Px'''=0$; reemplazando y''' por y, x''' por x, y $\frac{P}{M'}$ por $-2p$ resulta $y^2=2px$ que representa la ecuacion de la parábola bajo la forma ordinaria y referida á su vértice.

Tomemos (Fig. 301) $OF=OA=\frac{P}{2}$, y llevemos AB perpendicular al diámetro OX. Esta perpendicular será la directriz y F el foco de la curva.

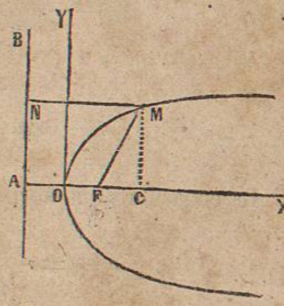

Fig. 301.

Sea M un punto de la curva, X Y sus coordenadas, juntemos MF y bajemos la perpendicular MN.

Se tiene $MN=AO+OC=x+\frac{p}{2}$

$$F'M^2=y+\left(x-\frac{p}{2}\right)^2=y^2+x^2-px+\frac{p^2}{4}=x^2+px+$$
$$\frac{p^2}{4}=\left(x+\frac{p^2}{2}\right)$$

de lo que enfin resulta MN—FM.

La ecuacion de la tangente en el punto $x'y'$ es como puede verse partiendo de la secante :

$$yy'=p(x+x')$$

y poniendo $y=0$, resulta $x+x'=0$, es decir que siempre se tiene

$$P'O=OP \text{ (Fig. 502).}$$

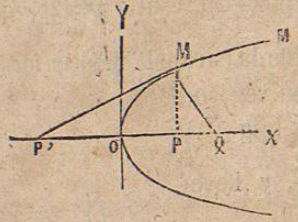

Fig. 502.

La ecuacion de la normal en el punto $x'y'$ es :

$$y-y'=-\frac{y'}{p}(x-x')$$

Haciendo $y=0$, resulta :

$y'=\frac{y'}{p}(x-x')$ luego $p+x'=x=QO$, luego PQ ó la subnormal $=p$.

La ecuacion $y^2=2px$ representa una curva cuyo eje OX es evidentemente un diámetro, pues que divide en dos partes iguales todas las cuerdas paralelas al eje de las y. Trasportando el origen á otro punto cualquiera de la curva, facil será establecer que en esta posicion el nuevo diámetro es paralelo al primero.

Concluyo con esto la geometría analítica ; en mi próxima carta pienso tratar de la estática.