CARTA VIGÉSIMAQUINTA.

COMPOSICION Y DESCOMPOSICION DE LAS FUERZAS.

§ I.

Nociones generales sobre la composicion y descomposicion de las fuerzas.

Amigo Eugenio, es evidente que dos fuerzas iguales y contrarias, aplicadas á un mismo punto, estan en equilibrio.

Lo es tambien que se equilibrarán dos fuerzas iguales y contrarias aplicadas á las estremidades de una recta considerada como una barra invariable en longitud.

Resulta de lo espuesto que el efecto de una fuerza que á un cuerpo solicita no cambia en ningun punto de su direccion en que se la suponga aplicada, con tal que este punto sea uno de los puntos del mismo cuerpo, ó que esté fijo á este mismo cuerpo de un modo invariable en caso que esté fuera de él.

Pues supongamos una fuerza cualquiera P (Fig. 303), aplicada sobre el punto A de un cuerpo de cualquier sistema, si en la direccion de esta fuerza se toma otro punto B, fijo invariablemente al sistema, de manera que la longitud AB quede siempre la misma, y si en el punto B se aplican dos fuerzas P′ y—P′ iguales entre sí á la fuerza P y obrando en la direccion de AB, el punto A será aun solicitado de la misma manera que antes, pues el efecto de las dos fuerzas P′ y —P′ es nulo de sí mismo; pero si se considera la fuerza P y su igual y contraria —P′ aplicada en B, su efecto será tambien evidentemente nulo; por consiguiente se puede suprimirlas quedando solamente la fuerza P′, que viene á ser la fuerza P, pero aplicada al punto B de su direccion, y el punto A no ha cesado de ser solicitado de la misma manera.

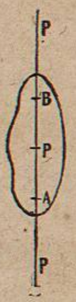

Fig. 303.

Resulta que se puede aplicar una fuerza en un punto cualquiera de su direccion con tal que este punto se ligue al primer punto de aplicacion, por una recta rígida é inestensible.

Cuando dos fuerzas P y Q (Fig. 304), se aplican al mismo punto A, bajo un ángulo cualquiera, se comprende que una tercera fuerza R, aplicada de una manera conveniente en el punto A, puede equilibrar las dos fuerzas P y Q; pues en virtud de los esfuerzos combinados de las dos fuerzas P y Q, el punto A tiende á dejar el lugar en que está, no pudiendo escaparse mas que por un lado, y por consiguiente si en sentido contrario se le aplica una

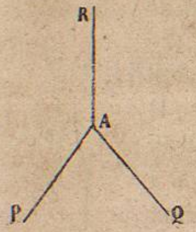

Fig. 304.

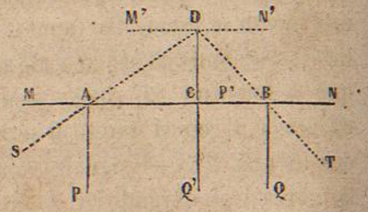

Fig. 305.

fuerza conveniente, este punto permanecerá en equilibrio. La fuerza R es igual y opuesta á la resultante de las dos otras, luego dos fuerzas que concurren tienen una resultante.

Tambien es facil de comprender que esta misma fuerza R está en el plano de las dos fuerzas AP, AQ; pues no hay ninguna razon que la haga inclinar á un lado de este plano mas que al otro.

Admítese como axioma que cuando dos fuerzas P, Q, R, etc., obran en el mismo sentido y en la misma direccion, estas fuerzas añaden y dan una resultante igual á su suma $P+Q+R+$, etc.

Admítese tambien, que cuando varias fuerzas $P+Q+R+$, etc., tiran en una direccion, y que fuerzas $P'+Q'+R'+$, etc., tiran en una direccion opuesta, la resultante es igual á $(P+Q+R+\ldots)-(P'+Q'+R'+\ldots)$, y se ejerce en el sentido ó direccion de la mayor de estas dos sumas.

§ II.

Composicion de las fuerzas paralelas.

TEOREMA. — Si se aplican dos fuerzas P y Q (Fig. 305), paralelas y en la misma direccion á las estremidades A y B de una recta rígida, digo 1° que estas dos fuerzas tienen una resultante, y que esta resultante debe aplicarse á la línea AB entre los dos puntos A y B; 2° que esta fuerza es paralela á las componentes P y Q, é igual á su suma.

En efecto se puede aplicar á los dos puntos A y B dos fuerzas M y N, iguales y contrarias y que obran en la misma direccion A y B. El efecto de estas dos fuerzas será nulo y por consiguiente no cambiará el efecto de las dos fuerzas P y Q; pero las dos fuerzas M y Q, aplicadas en A, tienen una resultante, dirigida evidentemente en el ángulo MAP. De la misma manera las dos fuerzas N y Q tienen una resultante T, aplicada en B, y dirigida en el ángulo NBQ. Figúrate que se haya tomado las dos resultantes y que ambas hayan sido aplicadas en el punto D, en el que necesariamente van á cortarse sus direcciones, la resultante de las dos fuerzas S y T será la misma absolutamente que la de las dos fuerzas P y Q, la cual aplicada en D y debiendo ser dirigida en el ángulo ADB, pasará entre A y B en un cierto punto C, donde se podrá suponerla aplicada.

Ahora bien, es evidente que esta es resultante á las fuerzas P y Q é igual á su suma; pues, supongamos que en D se descomponga la fuerza S en dos fuerzas M′ y P′, paralelas é iguales á M y á P, que se descomponga T en dos fuerzas N′ y Q′, iguales y paralelas á N y Q, las dos fuerzas M′ y N′ se destruirán, y, solo quedará una fuerza igual á P+Q, paralela á cada una de ellas.

Si las fuerzas P y Q son iguales, es evidente que el punto C estará en el medio de AB.

Resulta de lo espuesto que la resultante de tantas fuerzas paralelas como se quiera, iguales de dos en dos, y simétricamente aplicadas á distancias iguales del medio de una misma recta, es igual á la suma de todas estas fuerzas, les es paralela y pasa por el medio de la recta de aplicacion.

Recíprocamente puédese descomponer toda fuerza P, aplicada á una línea en cuantas fuerzas se quiera, con tal que estas fuerzas, tomadas de dos en dos, sean iguales á iguales distancias del punto de la aplicacion de la fuerza R.

TEOREMA. — El punto de aplicacion C (Fig. 306) de la resultante de dos fuerzas paralelas

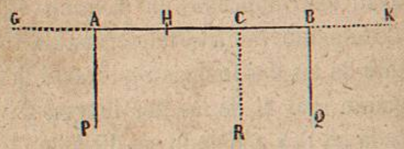

Fig. 306.

P y Q que obran á las estremidades A y B de una recta inflexible AB, divide esta recta en la razon recíproca de P y Q, de manera que se tiene :

$$P:Q:BC:AC.$$

Supongamos que las fuerzas P y Q sean comensurables, esto es, que sean entre sí como dos números enteros m y n; dividamos AB en el punto H en dos partes directamente proporcionales á las dos fuerzas P y Q, de manera que resulte $AH:BH::P:Q$, y por consiguiente $::m:n$; en la prolongacion de la linea inflexible AB, tomemos $AG=AH$, y $BK=BH$, el punto A será el medio de GH, y el punto B el medio de HK.

Establecido esto, puesto que las fuerzas P y Q guardan entre sí la misma proporcion que las líneas AH y BH, tambien serán entre sí como las líneas dobladas, es decir como GH y HK, y como por hipótesis no hay en la línea AH, m medidas como BH contiene n, habrá $2m$ medidas en GH y $2n$ medidas iguales en HK, y la fuerza P puede descomponerse en $2m$ fuerza iguales y paralelas, aplicadas á los $2m$ puntos medios de las medidas comunes de la línea GH, y la fuerza Q en $2n$ fuerzas paralelas, iguales entre sí y á las primeras aplicadas en los $2m$ puntos medios de las medidas comunes HK. Ahora bien, siendo equidistantes todas estas fuerzas iguales, se hallarán colocadas de dos en dos á distancias iguales del medio C de la línea entera GK, y por consiguiente su resultante general, que es la de las fuerzas P y Q, pasará necesariamente por el medio de la línea GK.

Pero á causa de GC=AB, quitando la parte comun AC, resulta B=AG=AH, y añadiendo de parte y otra HC, AC=BH, por consiguiente teniendo

$$P:Q::AH:BH,$$

se tiene tambien

$$P:Q::BC:AC.$$

Supongamos, en segundo lugar que no sean comensurables las dos fuerzas G y P.

En este caso observo que la resultante de dos fuerzas cualesquiera P y Q (Fig. 507), aplicada en los puntos A y B cayendo en C, la resultante de P y de una fuerza +Q I>Q caerá entre el punto C y el punto B; es decir que el punto de aplicacion de la resultante se aproximará del punto de aplicacion de la componente que será aumentado. En efecto, para hallar la resultante de las dos componentes P y Q+I, puédese tomar la resultante R de P y Q, que pase en el punto C por hipótesis y despues lo de R é I, cuyo punto de aplicacion será entre C y B.

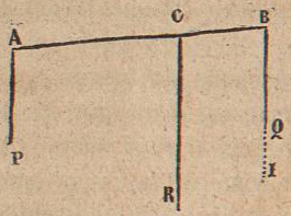

Fig. 507.

Ahora bien si la resultante de las dos fuerzas inconmensurables (Fig. 508), no pasando por el punto C, que es tal que se tiene :

$$P:Q::BC:AC$$

pasará por otra parte. Supongamos que pase en G..., repártase la línea AB en partes iguales, todas mas pequeñas que GC, y habrá, á lo menos, un punto de division entre C y G. Sea I este punto, las dos líneas AI y BI serán comensurables, y el punto I podrá considerarse como el punto de aplicacion de la resultante de las dos fuerzas P y Q, de modo que se tendrá :

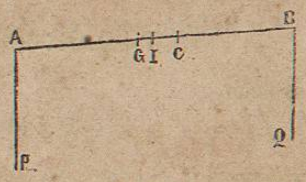

Fig. 508.

$$P:Q'::BI:AI.$$

Lo que da Q'>Q, puesto que, por hipótesis, se tiene :

$$P:Q::BC:AC;$$

pero la resultante de las dos fuerzas P y Q' pasando en I, la de las dos fuerzas P y Q>Q' pasará entre I y B, y no podrá caer en G contra la hipótesis.

Resulta que cuando se equilibran tres fuerzas P, Q, R paralelas, aplicadas á una línea recta y flexible, R es igual y opuesta á la resultante de P y Q ; esto es que

$$P+Q=R, \text{ y por consiguiente } Q=R-P.$$

Dadas las dos fuerzas P y Q, como tambien la distancia AC que separa los puntos de aplicacion, si se pide el punto de aplicacion de la resultante Q se hará la proporcion siguiente :

$$P:Q::BC:AC,$$

de la que resulta

$$P+Q:Q::BC+AC:AC;$$

es decir

$$R:Q::AB:AC,$$

proporcion que hará conocer AB, y por consiguiente el punto B.

Si son iguales las dos fuerzas P y R, la resultante Q es nula, y la distancia $AB=\frac{R\times AC}{0}$, lo que quiere decir infinita, espresion que indica que no puede hallarse una fuerza única que equilibre dos fuerzas iguales, paralelas y en sentido opuesto.

De la misma manera que se componga en una sola dos fuerzas paralelas que obran á puntos dados de una línea, puédese tambien descomponer una fuerza R, aplicada en un punto de una recta inflexible y en dos otros que le sean paralelos, y que se apliquen en puntos dados.

Cuando se sabe hallar la resultante de dos fuerzas paralelas, podráse hallar la de tantas fuerzas paralelas como se quiera, y es evidente que aquella es igual al esceso de la suma de las que tiran en un sentido sobre la suma de las que tiran en el otro.

Teorema. — La resultante de dos fuerzas cualesquieras P y Q (Fig. 309) aplicadas en un mismo punto A bajo un ángulo cualquiera, se dirige segun la diagonal del paralelógramo

ABCD construido sobre las líneas AB, AC, que representan las fuerzas P y Q en cantidad y direccion.

Desde luego es evidente que la resultante de las dos fuerzas P y Q, debe pasar por el punto A y hallarse en el plano de estas dos fuerzas. Ademas digo que debe pasar por el punto D; tomemos en efecto del prolongamiento de la línea BD la parte DG=DC, y acabemos el paralelógramo CDGH; apliquemos á los puntos G y H en la direccion de GH dos fuerzas Q'' y Q', contrarias é iguales entre sí á la fuerza Q. Es facil ver que la resultante de las cuatro fuerzas PQ, Q' y Q'' debe pasar al punto D; pues siendo Q'=Q, las dos fuerzas paralelas P y Q' son entre sí como los lados AB, AC, ó como DC y DB, ó bien, á causa de DG=DC, como las líneas DG y DB, y por consiguiente su resultante S pasa en D. Siendo iguales las dos fuerzas Q y Q'', su resultante T prolongada divide en dos igualmente el ángulo CHG del paralelógramo CDGH, y tambien va á pasar por el punto D, donde se puede suponerla aplicada. Por consiguiente la

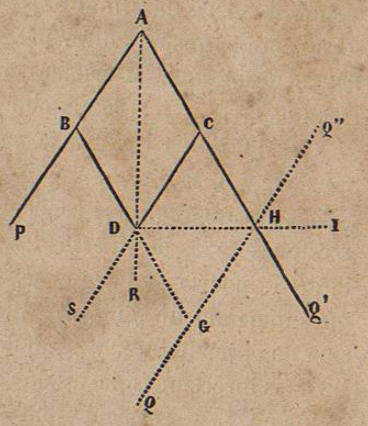

Fig. 309.

resultante general que es la de las dos fuerzas ST pasa en el punto D.

Pero siendo iguales y contrarias las dos fuerzas Q′ y Q″, aplicadas en GH, es nulo su efecto, y la resistencia de las cuatro fuerzas S, Q, Q′, Q″, es idénticamente la misma que la de las dos fuerzas P y Q; luego puesto que la primera pasa en D, la de las dos fuerzas P y Q pasa tambien en el mismo punto.

Dirigiéndose la resistencia por los dos puntos, á la vez A y D, se dirigirá segun la diagonal.

Conclúyese que, si se conociese solamente las direcciones de las dos fuerzas P y Q, y la de su resultante R, podria determinarse la razon de P á Q; pues tomando un punto cualquiera D en la direccion de la resultante, y llevando dos paralelas DC y DB á las direcciones de las dos componentes P y Q, y que en C y B encuentren estas direcciones, se tiene :

$$P : Q :: AB : AC.$$

TEOREMA. — La resultante de dos fuerzas cualesquiera PQ (Fig. 310), aplicadas á un mismo punto A, se representa en cantidad y direccion por la diagonal del paralelógramo ABCD construido en las dos líneas AB, AC, que en valor y direccion representan estas fuerzas.

Sea R esta resultante; supongamos que se aplique al punto A en la prolongacion de la diagona CA, y en sentido contrario de su accion. Las tres fuerzas P, Q, R se equilibrarán en el punto A; lue-

go una de ellas Q, por ejemplo, será igual y opuesta á la resultante de las dos fuerzas P y R. Luego si del punto B se lleva á la direccion AR la paralela BG, que en G encuentra la prolongacion de QA, y del punto G á la direccion AP, la paralela GH que en H encuentra la direccion de la fuerza R, las dos fuerzas P y R, serán entre sí como los lados AB y AH del paralelógramo ABGH. Pero la línea AB representa la fuerza P; luego AH representa la fuerza R; por las paralelas se tiene AH = G = AD; luego etc.

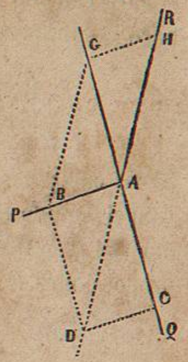

Fig. 310.

Siendo entre sí las fuerzas P, Q, R, como las tres líneas AB, AC, AD, y puesto que tenemos AB = CD en el paralelógramo ABDC, se puede decir que estas tres fuerzas son entre sí como los tres lados CD, CA, AD, del triángulo ACD; pero siendo entre sí estos tres lados como los senos de los ángulos opuestos CAD, CDA, ACD, resulta :

$$P : Q : R :: \text{sen } CAD : \text{sen } BAD : \text{sen } BAC.$$

Lo que indica que cada una de las fuerzas P, Q, R, es como el seno del ángulo formado por las direcciones de los dos otros.

Se puede siempre descomponer una fuerza B en dos otras P y Q, dirigidas, segun las líneas dadas AP, AQ, con tal que estas dos líneas y la fuerza estén en un plano, y concurran á un mismo punto A.

Para calcular los valores de los componentes, se hace las dos proporciones :

$$R:P::\text{sen BAC}:\text{sen CAD},$$
$$R:Q::\text{sen BAC}:\text{sen BAD},$$

en las cuales las solas incógnitas son P y Q.

Si el ángulo BAC fuese recto, suponiendo el radio $=1$, sen $BAC=1$, sen $CAD=\cos BAD$, las dos proporciones se vuelven :

$$R:Q::1:\cos BAD,$$
$$R:Q::1:\cos CAD;$$

resultando $P=R\cos BAD$, $Q=R\cos CAD$.

Cuando se sabe determinar la resultante de dos fuerzas aplicadas á un punto, se puede determinar la de tantas fuerzas P, Q, R, S, etc., que se quiera; pues basta averiguar de dos cualesquiera, averiguar despues la resultante de esta resultante con otra fuerza, y así sucesivamente.

Si todas las fuerzas estan en un mismo plano, tambien lo estará la resultante general.

CARTA VIGÉSIMASESTA.

DE LA PESADEZ O GRAVEDAD.

§ I.

Nociones preliminares.

Llámase pesadez ó gravedad la causa incógnita que precipita en tierra á los cuerpos abandonados á sí mismos. Siendo la gravedad causa de movimiento, puede considerársela como fuerza; esta fuerza penetra las partes mas íntimas de los cuerpos, y obra igualmente en todas sus moléculas, pues la esperiencia prueba que, en el vacío, cuerpos de masas desiguales, una pluma y una bala de plomo, por ejemplo, caen de la misma altura con la misma velocidad; de lo que se concluye que las moléculas de un cuerpo que cae bajan todas de la misma manera que si fuesen contiguas, sin adherir las unas á