ALMEIDA
RECREACION
FILOSOFICA

Viviano L. Villarreal.

G. Villarreal

RECREACION FILOSOFICA.

Schneider y Langrand, calle de Erfurth, 1.

RECREACION FILOSOFICA

Ó DIALOGO SOBRE

LA FILOSOFIA NATURAL,

PARA INSTRUCCION DE PERSONAS CURIOSAS
QUE NO HAN FRECUENTADO LAS AULAS.

OBRA ESCRITA EN PORTUGUES

POR EL P. D. TEODORO DE ALMEIDA,
De la Congr. del Oratorio de S. Felipe Neri,
y de la Academia de las Ciencias de Lisboa, socio de la real
Sociedad de Londres y de la de Viscaya.

traducida al castellano.

NUEVA EDICION,

CONSIDERABLEMENTE REFUNDIDA, AUMENTADA Y PUESTA AL NIVEL
DE LOS CONOCIMIENTOS ACTUALES,

POR D. PEDRO MATA,
Médico cirujano de la ciudad de Barcelona,
miembro titular y corresponsal del círculo médico de Montpeller,
miembro corresponsal de la sociedad médico-
cirúrgica de la misma ciudad, etc.

TOMO IX.

PARIS,
LIBRERIA DE ROSA.

1841.

ADVERTENCIA.

La buena acogida que han logrado los primeros tomos de esta obra ha estimulado nuestro celo y el deseo que nos anima de mejorarla y enriquecerla en todo lo posible en obsequio de nuestros lectores. Así en el presente tomo además del tratado de geometría que prometimos en nuestro prospecto y en el que reproducimos testualmente al P. Almeida, nos ha parecido oportuno añadir cinco nuevos tratados de otros tantos ramos de matemáticas que, juntamente con el ya citado, formarán un curso elementar de estas ciencias en cuyo elogio seria ocioso estendernos, pues ninguno de nuestros lectores ignora su utilidad importante é inmediata, su aplicacion directa á las ciencias físicas, su caracter cierto y evidente, y la rectitud que imprimen al entendimiento, comunicándole poder de abstraccion y acostumbrándolo á deducciones trascendentales, solo observaremos que fieles al método que nos hemos propuesto, hemos procurado esponer estas materias del modo mas llano y patente que nos ha sido posible, acomodándonos á todas las inteligencias y no suponiendo en nuestros lectores otra nocion preliminar que la de conocer los números, en una palabra procurando suplir en todo lo posible la viva voz del maestro y familiarizar con el cálculo y abstraccion las personas que nunca han saludado la ciencia.

ARITMÉTICA.

observaremos que fieles al método que nos hemos propuesto, hemos procurado esponer estas materias del modo mas llano y patente que nos ha sido posible, acomodándonos á todas las inteligencias y no suponiendo en nuestros lectores otra nocion preliminar que la de conocer los números, en una palabra procurando suplir en todo lo posible la viva voz del maestro y familiarizar con el cálculo y abstraccion las personas que nunca han saludado la ciencia.

ARITMÉTICA.

RECREACION FILOSOFICA.

CARTA PRIMERA.

NUMERACION, OPERACIONES SOBRE NUMEROS ENTEROS.

§ I.

Numeracion.

Amigo Eugenio, he recibido tu muy apreciable en contestacion á lo que te escribí, anunciándote mi feliz llegada, y agradezco lo mucho que te lamentas de mi ausencia, y las ansias con que anhelas mi regreso, como igualmente lo mucho que te aplicas al estudio, aunque guiándome por la adjunta de Silvio, esta aplicacion es escesiva y amenaza hacer mella en tu salud, hasta ahora tan robusta, efecto de tus costumbres sobrias y actividad de profesion. Como sea, yo, como amigo, te aconsejo que vayas con tiento en este punto; pues el tránsito repentino de unos hábitos como los tuyos á una vida intelectual y sedentaria no puede efectuarse sino con menoscabo de tu salud. Por ahora limítate á leer solamente las obras que encontrarás en mi biblioteca, relativas á las ciencias de observacion y esperiencia, y no te enredes en tratados de física y astronomía, que no solamente exigen un grado de tension intelectual y facultad de abstraccion á que no estás acostumbrado, sino que por su misma naturaleza rinden mas prontamente el entendimiento, abruman la imaginacion y desapegan del estudio. Por otra parte, el estudio de estas materias exige conocimientos matemáticos que no posees, y que es mi objeto imbuirte durante mi ausencia, conforme te lo prometí verbalmente la última tarde que tuve el gusto de pasar en tu compañía, los cuales te pondrán en estado no solo de cultivar por tí mismo estos mismos estudios matemáticos, sino las ciencias físicas á que son de una inmediata aplicacion. Pienso hablarte primeramente de la aritmética, por la que generalmente se empieza, como que su conocimiento es necesario para la inteligencia de los demas, y por ser sus aplicaciones á los actos comunes de la vida mas frecuentes y mas directos, siendo, como sabes, necesaria al hombre de ciencias, al economista, al rentista, al comerciante, y aun hasta á las mugeres de gobierno. De esta utilidad comun, de esta aplicacion inmediata procede el error de muchos que hacen consistir esta ciencia en las reducidas y empíricas reglas del comerciante ó hacendista, las cuales ademas de saberse en general de un modo rutinario y sin demostracion alguna, no abrazan mas que una parte de la aritmética, ciencia mucho mas vasta de lo que comunmente se cree. No es este el plan que me he propuesto en esta y en mis sucesivas cartas en que, como hasta el presente, pienso proceder como filósofo, y dar la razon y teoría de todas las operaciones que esponga, estableciendo y procediendo de las nociones mas sencillas, para lo cual espero que escusarás cuanto pueda decirte trivial y pueril al principio; pues ademas de que mi intento es filosofar y demostrar las operaciones mas vulgares, estas mismas demostraciones me deberán servir de base para lograr resultados mas trascendentales. Pero basta ya de preámbulos, y entremos cuanto antes en materia, empezando por la definicion de las ciencias que nos ocupan, como haria Silvio. Llámanse *matemáticas* las ciencias que tratan de la cantidad, entendiendo por cantidad todo lo que es susceptible de aumento ó de disminucion, como números, líneas, superficies, etc. Pero para que la mente humana pueda llegar á formarse un concepto de la cantidad en sus varios grados ó aspectos ó ha sido preciso referirla á una cantidad de la misma especie, natural ó arbitraria destinada á servir de término de comparacion; esta cantidad convencional se llama *unidad*. Así cuando yo digo que el diamante del gran Mogol pesa 275 quilates, espreso una cantidad equivalente al peso ó densidad de este diamante, cuya unidad es un quilate, que sirve como de base ó punto de comparacion para dar á entender el valor de la cantidad, en términos que, cuando la enuncio, supongo que los que me oyen comprenden el valor del quilate; y si no lo saben, tengo el cuidado de esplicárselo; pues de otro modo ignorando la unidad, no podrian comprender la cantidad. Este quilate es una unidad arbitraria ó convencional, esto es, no existe en la naturaleza, y solo procede de haberse convenido los hombres en atribuirle un valor convencional. Si queriendo dar á conocer el volumen del sol, dijera que este astro es un millon y trescientas mil veces mayor que la tierra enunciaria una cantidad equivalente al volumen del sol, cuya unidad ó punto de comparacion seria la tierra, y en este caso la unidad seria natural. Este conjunto de unidades que espresamos para dar á conocer el valor de la cantidad se llama *número*, el cual puede tambien definirse el resultado de la comparacion de la cantidad con la unidad, y la ciencia que se ocupa de estos números, enseñando las diversas combinaciones y operaciones de que son susceptibles, se llama *aritmética*. Los números pueden ser *enteros* ó *fraccionarios*, entendiéndose por el primero el número tal como lo acabo de definir, cuando la unidad es completa y sin alusion á ninguna otra subentendida, mientras que en el fraccionario la unidad que sirve de punto de comparacion es de otra especie y menor que otra unidad á que tacitamente se alude: así cuando yo digo que he comprado dos varas de paño, el número que espreso es entero,

pues la unidad que sirve de punto de comparacion es completa y no se refiere á otra de superior calidad; mas si digo que he comprado los dos tercios de una vara, el número es fraccionario, pues la unidad es un *tercio* que depende ó se refiere á otra unidad superior que es la vara, la que por abstraccion supongo dividida en tres partes iguales para poder, por este medio, dar á entender la cantidad de paño que he comprado.

Otra division de los números es en *abstractos* y *concretos*; la primera denominacion se aplica, cuando al enunciarlos se prescinde de hacer constar la especie ó el nombre definitivo de la unidad, y la segunda cuanta esta se particulariza, como cuatro bancos, seis caballos, etc. En el curso de mi correspondencia emplearé tanto unos como otros, pudiendo tú por la imaginacion aplicar cualquiera unidad arbitraria á los ejemplos que te proponga.

Por salvage é inculta que queramos figurarnos una sociedad de hombres, desde el momento en que vive en sociedad debe tener un idioma articulado y por consiguiente un sistema de enumeracion mas ó menos perfecto. Así un salvage que hubiera muerto diez buytres y quisiese participar este hecho á un compañero suyo, deberá hacer uso de un término que equivalga á la repeticion de la unidad hasta diez veces, juntamente con el sustantivo *buytre*, el verbo *matar* con una modificacion mas ó menos adecuada á la época de la accion y el pronombre personal espreso ó suplido; mas si no queremos suponer su idioma bastante culto para tener un término equivalente á diez, en este caso el salvage, juntamente con el término ó gesto equivalente á matar se verá obligado á repetir ó hacer sonar hasta diez veces la palabra *buytre*, ó bien abrir y presentar sus dos manos estendidas para indicar que el número de buytres muertos era equivalente á los dedos de ambas sus manos, para que su compañero comparando esta cantidad con la unidad *buytre*, cuya naturaleza le consta, comprenda el número que intenta darle á entender. Pero un lenguage tan imperfecto es todo lo mas suponible en hordas, si es que existen, cuyo idioma compuesto casi esclusivamente de interjecciones, apenas cuenta algunos sustantivos para designar los objetos que mas impresion hacen en la mente humana, y de ninguna manera en una sociedad en la que, bien que inculta, suponemos un idioma articulado y partes de la oracion mas ó menos caracterizadas. Los hombres deben haberse necesariamente ocupado de dar á los números nombres fáciles de retener, y como existe una infinidad de ellos puesto que por grande que sea el número, se puede formar otro nuevo añadiendo la unidad, los hombres debieron tambien tener por objeto, buscar un sistema limitado de palabras que combinadas entre sí de una manera conveniente espresase todos los números. Así lo primero que hicieron fué caracterizar á la unidad con un nombre *uno*, despues con otro á la unidad mas otra unidad *dos*, y así sucesivamente hasta el número *nueve*, al cual mediante una unidad mas se considera como otra de un orden diferente, ó unidad de *segundo orden* por oposicion á la unidad primitiva, que se designa

con el nombre de *unidad simple* ó unidad de primer orden. Cuéntase por unidades de segundo orden llamadas tambien *decenas* de la misma manera que se cuenta por unidades simples; así del mismo modo que con el término *dos* se convino designar el resultado de una unidad mas otra unidad primitiva, se ha convenido igualmente en designar con el nombre *veinte* el resultado de una unidad de segundo orden con otra del mismo, y así sucesivamente hasta *ciento*, ó unidad de tercer orden, y así sucesivamente hasta mil, diez mil, un millon, etc. Mediante esta convencion arbitraria se espresan como sabeis números muy crecidos que de otra manera hubieran exigido cada uno un nombre particular, empresa superior á las fuerzas de la memoria.

Sin embargo por simple que sea esta nomenclatura, mucha pena costaria la combinacion de estos mismos números por poco considerable que fuesen, si no se hubieran inventado un medio compendioso de escribirlo ó cifras arbitrarias que los representen. Mas como tambien hubiera superado las fuerzas de la memoria, una cifra representativa por cada uno de ellos, se ha convenido en representarlos de un modo análogo á su nomenclatura, conviniendo en representar los nueve primeros nombres por los nuevos caracteres ó cifras 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, y estableciendo este principio de mera convencion que toda cifra colocada inmediatamente á la izquierda de otra espresa unidades de un orden inmediatamente superior á las de esta otra, ó en otros términos que el valor de una cifra colocada inmediatamente á la izquierda de otra es diez veces mayor que el de esta otra. Por consiguiente si se quiere escribir el número veintiocho, deberá espresarse segun el principio establecido por estas dos cifras 28, pues este número equivale á dos unidades de segundo orden mas ocho unidades simples. Pero como puede presentarse que el número que se intenta representar sean unidades de segundo orden ó de otro mas elevado sin contener unidades simples, se ha debido adoptar una cifra que sin ningun valor por sí misma sirva para ocupar el lugar de cada orden que falta cuando se enuncia el número. Esta cifra es 0 que, como muy bien sabes, se pronuncia *cero*, que colocada á la derecha da á entender que la cifra que le antecede inmediatamente tiene un valor diez veces mayor. Establecidos estos principios, sobre cuya minuciosidad imploro tu indulgencia á favor del deseo que me anima, pasemos á varias operaciones que pueden tener lugar sobre números enteros, segun las diversas necesidades habituales de la vida. Estas operaciones se designan bajo los nombres de *adicion*, *sustraccion*, *multiplicacion* y *division*, cuya demostracion matemática voy á tratar de esponerte, recordándote de paso el proceder práctico que hace tiempo conoces.

§ II.

De la adicion.

Figúrate que eres mercader y que haces una remesa á Rio-Janeiro de 2464 pañuelos de seda; despues envias otra á Guatemala de 4282, otra á la Havana de 6812 y últimamente has vendido durante el año en menor 4806; tu objeto es saber el número exacto de los pañuelos vendidos, sea para deducir los que te quedan en la tienda, sea para averiguar la ganancia que de todos ellos resulta. ¿Qué harás para conseguirlo? Deberás reunir todos estos números en uno solo, ó procurar buscar un número que contenga todos los demas, ó cuyo valor equivalga á las cuatro cantidades propuestas. Esta operacion se llama *adicion*, y el número que resulta y cuyo valor equivale al de los que son sometidos á la operacion, se llama *suma*. Cuando esta operacion solo tiene por objeto los números de una sola cifra, nada hay mas facil: los niños desde la edad mas tierna se acostumbran á hacerlo por los dedos y sus resultados se graban profundamente en la memoria, así basta esta sola para efectuarla á menos que sea muy larga. Mas no sucede lo mismo cuando hay que adicionar guarismos ó cantidades muy crecidas como en el ejemplo propuesto: en este caso es preciso colocar las cuatro cantidades unas debajo de otras de manera que las unidades simples vengan debajo de las unidades simples, las decenas debajo de las decenas, y así sucesivamente, despues de lo cual se suman en columnas ó hileras verticales en esta forma :

$$\begin{array}{r} 2464 \\ 4282 \\ 6812 \\ 4806 \\ \hline 18364 \end{array}$$

Despues se procede á sumar las unidades simples ó la columna ó hilera mas á la izquierda, lo cual no presenta mucha dificultad, pues se efectua exactamente de la misma manera que si fuesen las solas que compusiesen la cantidad en cuestion y tal como un niño lo haria contando por sus dedos; el resultado ó suma es 14, esto es una decena ó unidad de segundo orden mas cuatro unidades simples, las cuales escribo, añadiendo la decena á la columna siguiente, cuya suma 16 es de unidades de segundo orden, segun los principios establecidos y por consiguiente es igual á 160 unidades simples. Mas este resultado ó suma de 16 decenas es igual á una centena ó unidad de tercer orden compuesta de 10 decenas, mas 6 decenas restantes. Escribo estas últimas y añado la centena que ha resultado á su columna correspondiente que es la que sigue inmediatamente hácia la izquierda, y opero de la misma manera logrando por resultado 23 centenas; cantidad igual á 3 centenas mas dos unidades de mil que añado á su correspondiente columna y procedo de la misma manera logrando por resultado 18 unidades de mil, las cuales no habiendo otra columna á que añadir escribo enteramente. Por este medio logro la suma total de 18364, compuesta de 18 unidades de mil, 3 centenas, 6 decenas y 4 unidades simples, que ha resultado de la suma sucesiva de las diferentes unidades. Pasemos ahora á la segunda operacion.

§ III.

De la sustraccion.

Habiendo logrado el guarismo 18,364, has averiguado el total de los pañuelos que has vendido, pero yo supongo que quieras saber el número de los que te quedan en tu tienda, acordándote que antes de haber hecho las diferentes ventas que hemos supuesto ascendia á 39,486. Para poder cerciorarte de los pañuelos que te quedan es preciso que averigues el esceso de esta última cantidad sobre el número de los pañuelos vendidos, ó lo que es lo mismo la diferencia que va de este, al número á que ascendian antes de haberse efectuado venta alguna. Esta operacion se llama *sustraccion* y el número que se obtiene y que espresa el esceso ó diferencia se llama *resta* ó diferencia. Para efectuar esta operacion se coloca la cantidad menor bajo la cantidad mayor cuidando que las unidades caigan bajo las unidades, las decenas debajo de las decenas, etc., y se procede á la operacion que como he insinuado consiste únicamente en hallar la diferencia entre los dos números propuestos ó en otros términos en hallar un número que sumado con el menor reproduzca el mayor. Así en el ejemplo propuesto, colocando las dos cantidades segun el proceder esplicado se logra por resultado

$$\begin{array}{r} 59,486 \\ 18,564 \\ \hline 22,122 \end{array}$$

se logra por resultado 22,122 que indicará el número de los pañuelos que quedan en la tienda.

Sobre esta operacion hay que hacer dos advertencias importantes. Supongamos que hay que sustraer 25 de 35. En este caso quedando completamente destruidas las unidades es preciso escribir cero en la columna de las unidades, lo que da 10 de diferencia. Supongamos que se deban sustraer 256 de 345. En este caso debe observarse que no siendo posible, en la columna de las unidades sustraer 6 de 5,

$$\begin{array}{r} 345 \\ 256 \\ \hline 109 \end{array}$$

es preciso recurrir á la cifra de la decena á la que por abstraccion se quita ó se toma prestado una decena que contiene diez unidades, las cuales agregadas á las cinco que tenemos forman 15 unidades

de las cuales fácilmente podemos restar 6, cuyo residuo es 9. Mas al ir á operar la sustraccion en la columna de las decenas no se debe olvidar que han disminuido de una unidad de su orden á causa del empréstito que hemos hecho para poder efectuar la operacion en la columna de las unidades simples.

§ IV.

De la multiplicacion.

Ahora bien, Eugenio, suponte tú que despues de haberte cerciorado, mediante la adicion, la suma total de los pañuelos remitidos á Rio-Janeiro, etc., y vendidos durante el año sube á 18,564, deseas saber cuanto dinero te importa su venta admitiendo que vendas cada uno á 8 reales. Para averiguar esto puédese proceder por la adicion, su mando 64 veces 8, ó bien 8 veces 18,564. Pero como esta operacion seria larga, se simplifica mediante una operacion llamada *multiplicacion*, que consiste en repetir un primer número tantas veces cuantas unidades hay en un segundo, ó bien en formar un tercer número que esté compuesto con el primero como el segundo está compuesto con la unidad. Llámase *multiplicando* el número que debe multiplicarse, *multiplicador* el número por el cual se multiplica, y *producto* el resultado de la multiplicacion; los dos números propuestos se designan tambien bajo el nombre de factores del producto.

Hablando con propiedad, la multiplicacion no es mas que una adicion abreviada, pues, para obtener el resultado, bastaria colocar unos debajo de otros tantos números iguales al multiplicando, cuantas unidades hay en el multiplicador y despues proceder á la adicion. Pero este modo de operar seria muy largo si el multiplicador se compusiese de muchas cifras; por consiguiente se ha procurado simplificarle y esto se ha conseguido mediante esta adicion abreviada que compone la multiplicacion.

Mientras que los dos *factores* no contienen cada uno mas que una cifra, el producto se obtiene por las adiciones sucesivas del mismo número; así para multiplicar 7 por 3, se dice 7 y 7 son 14, y 7 son 21. siendo este último número el resultado de la adicion de tres 7.

El producto de la multiplicacion de los nueve primeros números consta generalmente de memoria, y son muy útiles para lograr con facilidad los productos de los números espresados por muchas cifras. Sin embargo, hasta estar bien ejercitado, no es malo tener á la vista una tabla llamada *tabla de multiplicacion* ó *pitagórica*, del nombre de Pitágoras, que se supone que la inventó ó esparció su uso.

Tabla de multiplicacion.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

La primera fila horizontal de esta tabla se forma añadiendo 1 sucesivamente hasta llegar á 9. La segunda añadiendo 2 sucesivamente; la tercera añadiendo 3, y así con los demas números. Repara por otra parte que puédese tambien emplear esta tabla en sentido vertical, pues cada columna vertical está compuesta de los mismos números que la fila horizontal correspondiente. Así la sesta fila horizontal se compone de los números 6, 12, 18.... 54; la sesta fila vertical encierra los mismos números 6, 12, 18..... 54. Establecido esto, si se quiere hallar, por medio de esta tabla, el producto de dos números, espresados por una sola cifra, se busca el multiplicando en la primera fila horizontal, y partiendo de este nombre se baja *verticalmente* hasta encontrarse en frente del multiplicador que se hallará en la primera columna vertical : el número contenido en el cuadrete correspondiente, es el producto. Por ejemplo, para hallar el producto de 8 por 5, se baja desde 8, tomado en la primera fila horizontal, hasta llegar en frente de 5, tomado en la primera columna vertical; y el número 40, contenido en el cuadrete, es el producto que se busca. Ahora vamos á ver como mediante estos conocimientos preliminares efectuamos la multiplicacion. Vamos á ver en primer lugar como se procede cuando el multiplicador solo consta de una cifra.

Cuando el multiplicador consta de una sola cifra, se escribe bajo el multiplicando, debajo de las unidades por lo comun, y se multiplica por las unidades del multiplicando. Si este producto no se compone mas que de unidades simples, se escribe debajo del multiplicador, del cual se separa con una línea, y si ademas de las unidades contiene una ó mas decenas, se escriben solamente las unidades y se guardan la decena para añadirla al producto de estas ó el producto de unidades de segundo orden. Multiplícanse despues las decenas del multiplicando por el multiplicador, añadiendo á su producto la decena ó decenas que se retengan de las unidades simples; escríbese el producto al lado del de las unidades, guardando las centenas si las hay para añadirlas al producto de estas, y así sucesivamente. Operando de este modo, el producto de 2864 por 6 es 17,184.

$$\begin{array}{r} 2864 \\ 6 \\ \hline 17{,}184 \end{array}$$

Cuando el multiplicador contiene mas de una cifra, es preciso operar con cada una de estas cifras sucesivamente, lo mismo que se practica cuando no hay mas que una, pero comenzando por la derecha. Hay que advertir que el producto de las decenas del multiplicador deberá escribirse un grado mas hácia la izquierda, dos el de las centenas, y así sucesivamente. El producto total resulta de la suma de los varios productos parciales. Supongamos que queremos multiplicar 65487 por 6958, operando del modo esplicado, el producto total es 455658546.

$$\begin{array}{r} 65487 \\ 6958 \\ \hline 523896 \\ 327435 \\ 589383 \\ 392922 \\ \hline 455658546 \end{array}$$

Si el multiplicando, el multiplicador, ó ambos acabasen por ceros, se puede abreviar la operacion prescindiendo de estos y operando como si no estuviesen; pero es preciso ponerlos al fin del producto total.

Cuando uno de los factores es 10, 100, 1000, 10000, etc., el producto puede formarse añadiendo al otro factor un número de ceros equivalente.

contenido en el cuadrete correspondiente, es el producto. Por ejemplo, para hallar el producto de 8 por 5, se baja desde 8, tomado en la primera fila horizontal, hasta llegar en frente de 5, tomado en la primera columna vertical; y el número 40, contenido en el cuadrete, es el producto que se busca. Ahora vamos á ver como mediante estos conocimientos preliminares efectuamos la multiplicacion. Vamos á ver en primer lugar como se procede cuando el multiplicador solo consta de una cifra.

Cuando el multiplicador consta de una sola cifra, se escribe bajo el multiplicando, debajo de las unidades por lo comun, y se multiplica por las unidades del multiplicando. Si este producto no se compone mas que de unidades simples, se escribe debajo del multiplicador, del cual se separa con una línea, y si ademas de las unidades contiene una ó mas decenas, se escriben solamente las unidades y se guardan la decena para añadirla al producto de estas ó el producto de unidades de segundo orden. Multiplícanse despues las decenas del multiplicando por el multiplicador, añadiendo á su producto la decena ó decenas que se retengan de las unidades simples; escríbese el producto al lado del de las unidades, guardando las centenas si las hay para añadirlas al producto de estas, y así sucesivamente. Operando de este modo, el producto de 2864 por 6 es 17,184.

$$\begin{array}{r} 2864 \\ 6 \\ \hline 17{,}184 \end{array}$$

Cuando el multiplicador contiene mas de una cifra, es preciso operar con cada una de estas cifras sucesivamente, lo mismo que se practica cuando no hay mas que una, pero comenzando por la derecha. Hay que advertir que el producto de las decenas del multiplicador deberá escribirse un grado mas hácia la izquierda, dos el de las centenas, y así sucesivamente. El producto total resulta de la suma de los varios productos parciales. Supongamos que queremos multiplicar 65487 por 6958, operando del modo esplicado, el producto total es 455658546.

$$\begin{array}{r} 65487 \\ 6958 \\ \hline 523896 \\ 327435 \\ 589383 \\ 392922 \\ \hline 455658546 \end{array}$$

Si el multiplicando, el multiplicador, ó ambos acabasen por ceros, se puede abreviar la operacion prescindiendo de estos y operando como si no estuviesen; pero es preciso ponerlos al fin del producto total.

Cuando uno de los factores es 10, 100, 1000, 10000, etc., el producto puede formarse añadiendo al otro factor un número de ceros equivalente.

§ V.

De la division.

Eugenio, suponte tú que eres padre de familia, que tienes cuatro hijos y ochenta almendras confitadas que repartir entre ellos; suponte que los ves alargando sus manitas y tu ternura paternal exige que los contentes á todos igualmente. ¿Qué harás? Buscarás ó procurarás averiguar la parte que á cada uno le cabe, ó de otro modo cuantas veces el número 4, que es el de los chiquillos, está contenido en ochenta que es el de las almendras, y el número de veces que esté contenido será el número de almendras que á cada uno le toca, á menos que prefieras ir dando sucesivamente una almendra á cada uno hasta que no te quede ninguna en la mano. De cualquier modo, cada chiquillo habrá recibido 20 almendras, y el resto será nulo. Ahora bien esta operacion, por la que se averigua cuantas veces un número está contenido en otro, se llama *division*, llamándose *dividendo*, como el término lo indica, el número que debe ser distribuido ó repartido; *divisor*, el número que señala entre quienes debe ser repartido ó distribuido el dividendo, y *cuociente*, de la palabra latina *quoties* (cuantas veces), el número que indica las veces ó partes que tocan á cada unidad del divisor, ó bien sea las veces que este último está contenido en el dividendo. Así, en el ejemplo propuesto, las ochenta almendras es el dividendo, los cuatro chiquillos es el divisor, y las veinte almendras que componen la parte de cada chiquillo es el cuociente; en términos que si se multiplica las veinte almendras recibidas, ó el cuociente por los cuatro chiquillos, ó el divisor, el producto será igual al dividendo ú ochenta almendras.

Luego la division es una operacion que tiene por objeto el averiguar cuantas veces un número está contenido en otro, ó bien, dados dos números, hallar un tercero que, multiplicado con el segundo, reproduzca el primero, ó bien, conocido el producto y uno de los factores, hallar el otro factor. Esta operacion se considera como una especie de sustraccion abreviada, como espero te convencerás por lo que voy á esponerte. Supongamos que se trata de dividir 4536 por 8. Siendo el dividendo igual á la suma de los productos parciales del divisor por los números espresados por las diferentes cifras del cuociente, si se pudiese deducir del dividendo estos diferentes productos parciales, bastaria dividirlos por el divisor para lograr las cifras del cuociente que se busca; en cuyo caso la operacion se reduciria á una serie de divisiones parciales, fáciles de ejecutar, y que darian sucesivamente todas las cifras del cuociente. Para descubrir las partes del dividendo que encierran estos productos parciales, dispónese el cálculo de la manera siguiente :

Dividendo	4556	8 divisor,	
	40	5 centenas	cuocientes parciales.
1er residuo	556	6 decenas	
	48	7 unidades	
2º residuo	56	567 cuociente total.	
	56		

Lo primero que se procura, es buscar la cifra de las mas altas unidades del cuociente, ó en otros términos cual será el orden mayor de estas; con este objeto se determina la parte del dividendo que encierra el producto de esta cifra por el divisor 8, lo cual se consigue tomando del dividendo tantas cifras á la izquierda cuantas basten para que el número que resulte, considerado como unidades simples, contenga á lo menos una vez el divisor 8. El número 45, que satisface á esta condicion, es la parte del dividendo que encierra el producto de la cifra de las mas altas unidades del cuociente por el divisor; y como 45, en el dividendo, espresa centenas ó unidades de tercer orden, síguese que las mas altas unidades del cuociente serán centenas, de lo cual, por otra parte, es facil convencerse, pues el divisor 8, multiplicado por el cuociente buscado, debe reproducir el dividendo 4556. Este dividendo está comprendido entre 800 y 8000, es decir entre 8×100 y 8×1000, por consiguiente el cuociente de 4556 por 8 debe estar tambien comprendido entre 100 y 1000; luego sus mas altas unidades son centenas.

Para determinar la cifra de las centenas del cuociente, obsérvase que el número 45 siendo compuesto del producto de las centenas del cuociente por el divisor 8, y de las centenas que deberán tal vez retenerse por la multiplicacion de las decenas y unidades del cuociente por el divisor, resulta que si esta retencion es menor que el divisor 8, el multíplice mayor del divisor 8, contenido en 45, necesariamente espresará el producto de la primera cifra del cuociente por el divisor 8; de suerte que la division de este multíplice por el divisor 8 dará la primera cifra del cuociente. Ahora bien, es facil convencerse que las centenas retenidas (resultantes de la multiplicacion de las decenas y unidades por el divisor) es menor que el divisor 8, pues el número, espresado por las decenas y unidades del cuociente, siendo menor que 100, la multiplicacion de este número por el divisor 8 da un producto menor que 8×100 ó que 8 centenas.

El mayor multíplice del divisor 8, contenido en el número 45 de las centenas del cuociente, siendo 40, la division de 40 por 8 dará la cifra 5 de las centenas del cuociente. En efecto, el dividendo 4556, comprendido como está entre 40 y 48 centenas, es decir entre 5 centenas $\times 8$ y 6 centenas $\times 8$, el cuociente da 4,556 por 8, está tambien comprendido entre 5 y 6 centenas; luego está compuesto de 5 centenas, mas un cierto número de decenas y unidades.

Dividir por 8 el mayor multíplice de 8, contenido en 45, viene á ser lo mismo que buscar cuantas veces 8 está contenido en 45; el resultado 5 es la cifra de las centenas del cuociente. Conociendo la cifra 5 de las centenas del cuociente de 4536 por 8, para hallar las decenas y unidades de este mismo cuociente, obsérvase que el dividendo 4536, componiéndose de los tres productos parciales de las 5 centenas, de las decenas y de las unidades por el divisor 8, si se quita de este dividendo el producto 40 centenas de las 5 centenas del cuociente por el divisor, el resto 536 no contiene mas que los dos productos parciales de las decenas y de las unidades del cuociente por el divisor. Por consiguiente puede considerarse el primer resto 526, como un nuevo dividendo parcial, compuesto del producto del divisor 8 por un cuociente parcial, cuyas decenas y unidades son las del cuociente total, lo que simplifica la cuestion, de modo que no hay mas que dividir 536 por 8, y se sabe que las mas altas unidades del cuociente son decenas. No pudiendo hallarse el producto de las decenas del cuociente por el divisor 8, sino en las 53 decenas del dividendo parcial 536, y como la multiplicacion de la cifra de las unidades del cuociente por el divisor 8, da una retencion de decenas menor que 10×8 ó que 8 decenas, se logrará la cifra de las decenas del cuociente, indagando cuantas veces el divisor 8 está contenido en 53, que son 6, que será la cifra de las decenas del cuociente total; si se sustrae 8 veces 6 decenas ó 48 decenas de 536, la diferencia 56 espresa el producto del divisor 8, por las cifras de las unidades del cuociente, la cual, por consiguiente, se logrará dividiendo 56 por 8, lo que da 7; y restando el producto de 7 por 8 de 56, la dife-

rencia es nula ó cero, lo que indica que el cuociente es exacto sin esceso alguno.

Supongamos ahora que se trata de dividir 472878 por 567, dispónese el cálculo de la manera siguiente:

472878	567
4536	834
19278	
1701	
2268	
2268	

Para determinar la cifra de las mas altas unidades del cuociente, razónase como en el ejemplo precedente, buscando en primer lugar la parte del dividendo que encierre el producto de la cifra que se busca por el divisor, producto compuesto de unidades del mismo orden que las de la cifra en cuestion, que debe hallarse en el dividendo, y no puede ser menor que el divisor; por consiguiente, obtiénese la parte del dividendo que contiene el producto de la primera cifra á izquierda del cuociente por el divisor, tomando tantas cifras á la izquierda del dividendo, cuantas basten para que el número que resulte considerado como unidades simples contenga á lo menos una vez al divisor 567. El número 4728 que satisface á esta condicion, es la parte del dividendo que encierra el producto de la cifra de las mas altas unidades del cuociente por el divisor; y como 4728 espresa centenas de mil en el dividendo, se ve que las mas altas unidades del cuociente serán centenas. Para hallar estas, obsérvase que el dividendo componiéndose del producto de las centenas del cuociente por el divisor, mas las centenas retenidas tal vez por la multiplicacion de las decenas y unidades del cuociente por el divisor, resulta que si esta retencion es menor que el divisor 567, el mayor múltiplice de este contenido en 4728, será el producto de la cifra que se busca por el divisor, de manera que se logrará esta cifra indagando cuantas veces el divisor 567 se contiene en el dividendo 4728. Ahora bien, el número de las centenas que se retienen (producto de las decenas y unidades del cuociente por el divisor) es necesariamente menor que el divisor 567; pues las decenas y unidades del cuociente formando siempre un número menor que 100, la multiplicacion de este número por el divisor 567 forma un producto menor que 100×567, ó que 567 centenas. Por consiguiente, si se busca cuantas veces 567 está contenido en 4728, el número 8 resultará como cuociente, pues el dividendo 47 comprendiéndose entre 800×567 y 900×567, el cuociente de 472878 por 567 debe comprenderse entre 800 y 900; luego este cuociente se compone de 8 centenas, mas un cierto número de decenas y unidades.

Para saber cuantas veces el divisor 567 está comprendido en 4,728, puédese formar los productos del primero por los números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, por cuyo medio se ve que 4728 cae entre 567×8 y 567×9, de manera que el número que debe ponerse al cuociente es 8. Pero en la práctica se llega al mismo resultado por medio de un tanteo que voy

á indicarte. El dividendo parcial 4728 contiene los tres productos parciales de las 7 unidades, de las 6 decenas y de las 5 centenas del divisor 567 por el número que deberá ponerse como cuociente, y el último de estos productos espresando centenas no puede hallarse mas que en las 47 centenas de 4728. Por consiguiente 47 es el producto de las primeras cifras del divisor por el número que se busca, mas de las centenas retenidas que tal vez procederán por los dos otros productos parciales, de modo que, si se procura saber cuantas veces 5 está contenido en 47, el número 9 que se encontrará espresará el número que se busca ó un número demasiado grande, pero jamás un número demasiado pequeño. Para ensayar 9, se multiplica este número por 567; el producto 5103 es mayor que 4728, luego 9 es demasiado. Para ensayar 8 se multiplica este número por el divisor; el producto 4536 es menor que 4728, luego se sabe que el divisor 567 está contenido ocho veces en el dividendo 4728.

Conocida la cifra 8 de las centenas del cuociente, para obtener las otras dos de este cuociente, obsérvase que el dividendo 472878 componiéndose de los tres productos parciales de las ocho centenas, de las decenas y de las unidades del cuociente por el divisor 567, si se sustrae de este dividendo el primer producto parcial 4536 centenas, el resto 19278 no contendrá mas que los productos de las decenas y de las unidades del cuociente por el divisor; puédese pues considerar este resto 19278 como un nuevo dividendo parcial formado del producto del divisor 567 por un cuociente parcial, cuyas decenas y unidades son las del cuociente total. La cuestion queda de este modo reducida á dividir 19278 por 567, sabiendo que las mas altas unidades de este cuociente son decenas. Para hallar estas decenas se observa que su producto por el divisor 567 se halla en las 1927 decenas del dividendo 19278. Por otra parte las decenas que se retienen y que resultan de la cifra de las unidades del cuociente por el divisor 567, es menor que 10×567 ó que 567 decenas. Por consiguiente averiguase la cifra de las decenas del cuociente procurando saber cuantas veces 567 está contenido en 1927, á cuyo efecto determínase cuantas veces 5 está contenido en 19; el número 3 que se obtiene espresa la cifra de las decenas del cuociente ó una cifra demasiado fuerte. Para ensayar la cifra 3 multiplícase 567 por 3. El producto 1701 espresando decenas, se sustrae 1701 decenas de 19278; el resto 2268 siendo el producto del divisor por la cifra de las unidades del cuociente, se logrará esta cifra dividiendo 2268 por 567, ó lo que es mas simple dividiendo 22 por 5. El número 4 que se obtiene espresa las unidades del cuociente total; pues sustrayendo 4 veces 567 de 2268, el resto es cero. El cuociente que se busca es 834.

Resultan de los razonamientos espuestos esta regla general: Para dividir un número por otro, se escribe el divisor á la derecha del dividendo, se traza una línea de separacion entre estos dos números, y se traza tambien otra debajo del divisor para separarlo del cuociente que se busca. Despues se toman en el dividendo tantas cifras cuantas sean

necesario para contener el divisor á lo menos una vez, si se procura saber el número que espresa cuantas veces este dividendo parcial contiene al divisor. Este número será la primera cifra á izquierda del cuociente, que se escribe en su lugar correspondiente, se multiplica por el divisor y colócase el producto bajo del dividendo, colocando una línea separatoria para poder escribir el residuo que resultará de estos dos números. En seguida se baja á la derecha la primera de las cifras del dividendo que no ha sido empleada aun, por cuyo medio resulta otro dividendo parcial sobre el cual se opera como sobre el precedente, logrando así la segunda cifra del cuociente que se busca y que se escribe á la izquierda de la primera. Continúase la misma operacion hasta acabar completamente con las cifras del dividendo. Cuando alguno de los dividendos parciales será menor que el divisor, la cifra correspondiente del cuociente será un cero.

Hemos supuesto en los ejemplos precedentes que el dividendo era el producto del divisor por un número entero, y en este caso la division ha conducido á un último resto igual á cero. Pero no siempre se verifica así. Cuando se dividen dos números cualesquiera uno por otro, frecuentemente sucede que el dividendo no es el producto del divisor por un número entero; en este caso se llega á una sobra ó resta que, si bien menor que el divisor, no es nulo. Siendo el dividendo igual al producto del divisor por el número entero obtenido en el cuociente, mas el resto último, y este resto siendo menor que el divisor, es cierto que el dividendo está comprendido entre el producto del divisor por el número entero obtenido en el cuociente, y el producto del divisor por el número entero obtenido en el cuociente aumentado de una unidad. El cuociente total está pues comprendido entre el número entero obtenido en el cuociente y este mismo número entero aumentado de una unidad. Por este motivo se dice que el número entero que ha resultado en el cuociente es la parte entera del cuociente.

Dícese que un número es divisible por otro cuando la operacion se efectua sin resto alguno: tal como 64 por 8 cuyo producto es 8 y el resto nulo.

Para dividir un número por el producto de muchos factores, basta dividirlo sucesivamente por los factores del producto.

Para hacer la prueba de la division basta multiplicar el divisor por el número entero que resulta en el cuociente, añadiendo á este producto el resto si lo hay, cuya suma debe ser igual al dividendo.

Basta por esta vez; la siguiente pienso escribirte de algunas propiedades acerca de la naturaleza de los números enteros; escusa si en esta te he entretenido de procederes y conocimientos que hace tiempo te constan, pues, repito, mi intencion es demostrar las operaciones generalmente conocidas, y establecer estos principios como base para establecer y decir otros mas trascendentales.

CARTA SEGUNDA.

OBSERVACIONES SOBRE ALGUNAS PROPIEDADES DE LOS NUMEROS.

Amigo Eugenio, en la presente pienso estenderme menos que en la anterior, siendo mi objeto esponerte sucintamente algunas observaciones que resultan del examen de las propiedades de los números.

Cuando muchos números tienen un divisor comun, su suma igualmente lo tiene, pues el cuociente de cada número por el divisor comun siendo un número entero, la reunion de los cuocientes parciales es un número entero que espresa el cuociente total de la division de la suma de los números propuestos por el divisor comun.

Todo divisor de un número divide los multíplices de este número.

La suma de muchos multíplices de un número es un multíplice de este número.

Cuando una suma se compone de dos partes, tocomprendido entre el producto del divisor por el número entero obtenido en el cuociente, y el producto del divisor por el número entero obtenido en el cuociente aumentado de una unidad. El cuociente total está pues comprendido entre el número entero obtenido en el cuociente y este mismo número entero aumentado de una unidad. Por este motivo se dice que el número entero que ha resultado en el cuociente es la parte entera del cuociente.

Dícese que un número es divisible por otro cuando la operacion se efectua sin resto alguno: tal como 64 por 8 cuyo producto es 8 y el resto nulo.

Para dividir un número por el producto de muchos factores, basta dividirlo sucesivamente por los factores del producto.

Para hacer la prueba de la division basta multiplicar el divisor por el número entero que resulta en el cuociente, añadiendo á este producto el resto si lo hay, cuya suma debe ser igual al dividendo.

Basta por esta vez; la siguiente pienso escribirte de algunas propiedades acerca de la naturaleza de los números enteros; escusa si en esta te he entretenido de procederes y conocimientos que hace tiempo te constan, pues, repito, mi intencion es demostrar las operaciones generalmente conocidas, y establecer estos principios como base para establecer y decir otros mas trascendentales.

CARTA SEGUNDA.

OBSERVACIONES SOBRE ALGUNAS PROPIEDADES DE LOS NUMEROS.

Amigo Eugenio, en la presente pienso estenderme menos que en la anterior, siendo mi objeto esponerte sucintamente algunas observaciones que resultan del examen de las propiedades de los números.

Cuando muchos números tienen un divisor comun, su suma igualmente lo tiene, pues el cuociente de cada número por el divisor comun siendo un número entero, la reunion de los cuocientes parciales es un número entero que espresa el cuociente total de la division de la suma de los números propuestos por el divisor comun.

Todo divisor de un número divide los multíplices de este número.

La suma de muchos multíplices de un número es un multíplice de este número.

Cuando una suma se compone de dos partes, todo número que divide la suma y la primera parte divide necesariamente la segunda; pues la diferencia entre la suma y la primera parte siendo igual á la segunda parte, si se divide la suma y la primera parte por su divisor comun, los dos cuocientes serán números enteros; y su diferencia, que será un número entero, espresará el cuociente de la segunda parte por el divisor comun. Por consiguiente este último cuociente será efectivamente un número entero.

La diferencia entre dos multíplices de un número es un multíplice de este número.

Cuando se combinan varios multíplices de un número por via de adicion ó sustraccion, la diferencia es un multíplice de este número.

Cuando una suma se compone de dos partes de las cuales la una es divisible por un número y la otra no lo es, la suma no es divisible por el número en cuestion.

Un número jamás es divisible por otro mayor que su mitad.

El resto de la division de un número por 2 es el mismo que el de su primera cifra á derecha por 2.

El resto de la division de un número por 5 es el mismo que el de la division de su primera cifra á derecha por 5.

Para hallar el resto de la division de un número por 9, basta adicionar las cifras del número propuesto, y si la suma es menor que 9, esta suma será el resto. Si es mayor que 9, se opera sobre el guarismo de esta suma adicionando las cifras que las componen; y así sucesivamente hasta llegar

á encontrar una suma menor que 9. Si esta suma es igual á 9, el resto es cero y el número es exactamente divisible por 9. Esto es evidente si se repara que:

$$10=9+1,\ 100=99+1,\ 1{,}000=999+1,\ \text{etc.}$$

Llámase número primero el que solo es divisible por sí mismo ó por la unidad.

Dos números se designan bajo el nombre de comunes entre sí, cuando no tienen factor comun.

El mayor de todos los divisores comunes á dos números, es el que se llama su mayor comun divisor. Voy á hacerte entender como este número se halla, y para fijar las ideas, consideraremos 48 y 18. Su mayor divisor comun no pudiendo pasar de 18, se ve si el número menor propuesto 18 divide exactamente el número mayor 48, en cuyo caso seria el mayor comun divisor, pues 18 se divide exactamente á sí mismo dando por cuociente la unidad. En este ejemplo se halla que 48 es igual á $18\times2+12$. Resulta de los principios que he establecido que el mayor comun divisor entre 48 y 18 es el mismo que el de 18 y 12, pues el mayor comun divisor á 48 y 18 divide tambien la suma 48 y 18×2 que es una de sus partes, debe por consiguiente dividir la otra parte 12. Dividiendo 18 y 12, no puede sobrepujar el mayor comun divisor de 18 y 12; pero el último dividiendo 12 y 18×2 divide la suma 48, dividiendo pues 48 y 18, y por consiguiente no puede sobrepujar el mayor comun divisor de 18 y 48. Estos dos mayores comunes divisores, no pudiendo ser el uno mayor que el otro, son iguales. Los mismos razonamientos, pudiendo aplicarse á los demas números, se ve que todo divisor comun á dos números divide el resto de su divisor, y que el mayor comun divisor de dos números es el mismo que el que existe entre el mas pequeño de estos números y el resto de la division del mayor por el menor. La cuestion se reduce á saber cual es el mayor comun divisor de 18 y 12; ahora bien $18=12+6$, por consiguiente el mayor comun divisor es 6. En general, para cerciorarse del mayor comun divisor de dos números, se divide el mayor por el menor; si el resto es cero, el mas pequeño será el mayor comun divisor; si hay un resto, se divide el mas pequeño de los números propuestos por el primer resto; si el resto de esta division es cero, el primer resto será el divisor buscado, en el caso contrario se continuará en dividir los restos sucesivos unos por otros hasta llegar á un cuociente exacto; el resto que exactamente dividirá el resto precedente será el mayor comun divisor buscado.

El número de las divisiones que deben efectuarse para obtener el mayor comun divisor no puede esceder la mitad del mas pequeño de los dos números propuestos; pues á cada division los restos sucesivos disminuyen á lo menos de dos unidades.

Para hallar el mayor comun divisor de muchos números, basta buscar sucesivamente el mayor comun divisor entre el primero y el segundo, entre el mayor comun divisor obtenido y el tercer número, y así sucesivamente.

Para descomponer un número en sus factores primeros, se lo divide necesariamente por cada uno de los números primeros 2, 3, 5, etc., que no esceden su mitad, hasta lograr un cuociente exacto. Divídese despues este cuociente por el primer número que ha servido de divisor. Opérase despues sobre el último cuociente obtenido como sobre el número propuesto, observando que este cuociente no puede dividirse sino por números primeros mayores que el que ha servido de division; continúanse estos cálculos hasta que se llega á un cuociente exacto que sea un primer número. El número propuesto es igual al producto de este último cuociente por todos los números que han servido de divisor.

CARTA TERCERA.

DE LAS FRACCIONES O QUEBRADOS.

Amigo Eugenio, hemos visto que á veces un número no es exactamente divisible por otro, quedando un resto que no es nulo; por ejemplo, el cuociente de 26 por 8 es mayor que 3 y menor que 4, y no puede ser espresado por un número entero. Para tener una idea exacta de este cuociente, se observa que 26 es igual á 24 mas 2, y por consiguiente se logrará el cuociente de 26 por 8, reuniendo el de 24 por 8, al de 2 por 8. Ahora bien el cuociente de 24 por 8 es exactamente 3; queda, pues, á dividir 2 por 8. Para evaluar este último cuociente, imagínase la unidad dividida en 8 partes iguales; cada una de estas partes espresa el cuociente de 1 por 8, puesto que cada una de ellas repetida 8 veces da el dividendo 1; pero 2 siendo igual á 1 mas 1, se logrará el cuociente de 2 por 8, tomando 2 veces el octavo de 1, de manera que el

octavo de 2 es lo mismo que 2 veces el octavo de 1. Añadiendo los dos cuocientes parciales de 24 por 8 y de 2 por 8, se ve que el cuociente total de 26 por 8 se forma de tres unidades, mas de 2 de las octavas partes de que la unidad puede imaginarse compuesta.

Esta parte que se añade á las unidades del cuociente siendo siempre menor que la unidad, ha recibido el nombre de *fraccion ó quebrado.*

Para escribir la fraccion que espresa el cuociente del último resto por el divisor, se coloca el divisor bajo este resto, y se separa estos dos números por una línea; así el cuociente de 26 por 8 es de 3 unidades mas $\frac{2}{8}$ de unidad.

Para enunciar las fracciones, se da nombres particulares á las diversas subdivisiones de la unidad, y cuando esta está dividida en 2, 3, 4, etc., partes iguales cada una de estas partes se llama un medio, un tercio, un cuarto, etc.

Como en una fraccion, el número inferior sirve á denotar la especie de partes en que la unidad está dividida, y el número superior denota el número de partes que se toma; el primero se llama *denominador*, y el segundo *numerador*, y ambos se designan bajo el nombre de los *términos de una fraccion.* Así $\frac{2}{8}$ se pronuncia dos octavos; en este caso 2 es el numerador, y 8 el denominador, y ambos son los *términos de la fraccion.*

Es evidente que una fraccion no cambia de valor cuando sus dos términos se multiplican ó dividen por un mismo número, pues el efecto que un término produce el otro lo neutraliza. Así la fraccion

$\frac{2}{3}$ tiene el mismo valor que $\frac{4}{6}$ que es la misma fraccion multiplicada por 2, de manera que la misma cantidad recibe el que recibe los $\frac{2}{3}$ de una fanega de trigo que el que recibe $\frac{4}{6}$, pues si bien en este último caso el número de partes que se recibe y que espresa el numerador es doble, tambien el número de partes en que la unidad se considera dividida es doble, y por consiguiente doble mas pequeñas; en términos que siendo dobles se necesitan dos para componer una de las primeras, y por consiguiente para tomar la misma cantidad que en el primer caso es preciso tomar doble número de partes. En el primer caso suponemos la fanega dividida en tres partes iguales de las que se recibe 2, es decir la fanega entera menos una parte; en el segundo, consideramos la fanega dividida en 6 partes iguales, cada una de las cuales debe ser doble menor que cada una de las antecedentes, lo que equivale á decir que cada una de las 3 partes del primer caso se ha dividido en dos; luego si dividida así la fanega se recibiese el mismo número de partes, la cantidad recibida seria la mitad de lo que se hubiera recibido anteriormente cuando la fanega se suponia dividida en doble menos de partes; luego es preciso recibir doble número de partes para recibir la misma cantidad que anteriormente, luego una fraccion no se altera multiplicando los dos términos que la componen por un mismo número. De la misma manera si la fraccion $\frac{2}{4}$ la divido por dos, será doble menor el número de partes que se suponen que se reciben; pero tambien doble mayor las partes en que la unidad se supone dividida. Así la fraccion resul-

tante $\frac{1}{2}$ vale tanto como la fraccion $\frac{2}{4}$ diferenciándose solo en la forma. Así la misma cantidad recibe el que recibe $\frac{2}{4}$ de una fanega de trigo que el que recibe $\frac{1}{2}$ de fanega de trigo, ó la mitad de una fanega ó media fanega.

De lo dicho se infieren las consecuencias siguientes:

1ª. Una fraccion no se altera cuando sus dos términos se multiplican ó se dividen por un mismo número.

2ª. Para multiplicar una fraccion por un número cualquiera, bastará multiplicar su numerador por este número, ó dividir por él mismo su denominador.

3ª. Para dividir una fraccion por un número cualquiera, bastará dividir su numerador ó multiplicar su denominador.

4ª. Para reducir dos ó mas fracciones á un mismo denominador sin cambiar su valor bastará multiplicar los dos términos de cada una por el producto de los dos términos de las otras.

5ª. Cuando tengamos una ó muchas fracciones del mismo ó diferente denominadores de cuyo valor relativo queramos tener una idea mas completa, esto es, penetrarnos de la cantidad que espresan, deberemos reducirlas á su última espresion, lo que puede efectuarse dividiendo sus dos términos por su mayor comun divisor, conforme espliqué en mi carta anterior. Así supongamos que de resultas de varios cálculos nos resulta la fraccion $\frac{41412}{135654}$; como los términos que componen esta fraccion están compuestos de muchas cifras, no podemos formar-nos mas que una idea muy confusa de su valor; pero si procuramos, por las reglas establecidas, buscar el mayor comun divisor de ambos términos, hallamos que su denominador se divide exactamente, dando por cuociente 2, de lo que resulta, segun los principios establecidos, que su mayor comun divisor es el número 6842 que compone su numerador, el cual dividido por sí mismo da 1, luego la fraccion propuesta es igual á $\frac{1}{2}$ esto es, á la mitad de la unidad. De la misma manera y discurriendo segun los mismos principios, la fraccion [illegible] es igual á [illegible].

Para sumar fracciones del mismo denominador, se efectua formando la suma de los numeradores, y dando á esta suma el denominador de las fracciones propuestas.

Para sustraer dos fracciones, se sustrae un denominador de otro y dando á la diferencia el denominador comun.

Si en ambas operaciones las fracciones fuesen de diferente especie, esto es, que los denominadores fuesen diferentes, será preciso reducirlas á un denominador comun; de otro modo la adicion ó sustraccion no podrian efectuarse porque las unidades fraccionarias serian de diferente especie.

La multiplicacion de las fracciones presenta dos casos:

1°. Cuando el multiplicando es una fraccion y el multiplicador un número entero, el producto se logra multiplicando el numerador ó dividiendo el denominador, segun los principios que he establecido.

2°. Cuando ambos factores son fracciones, la multiplicacion no puede considerarse como una adicion abreviada, como cuando se trata de números enteros. Es preciso generalizar el sentido que se fija á la palabra multiplicar. Esta operacion puede considerarse en este caso como teniendo por fin calcular un número llamado producto, que esté compuesto con un número llamado multiplicando de la misma manera que otro número llamado multiplicador está compuesto con la unidad. De esta definicion se deduce que el producto de muchas fracciones se espresa por una fraccion cuyo numerador es el producto de las fracciones propuestas, y cuyo denominador es el producto de los denominadores de las primeras fracciones. En efecto, supongamos que queremos multiplicar $\frac{2}{3}$ por $\frac{4}{5}$; el multiplicador $\frac{4}{5}$ componiéndose de 4 veces el quinto de $\frac{1}{5}$, se obtiene el quinto de $\frac{2}{3}$ dividiendo $\frac{2}{3}$ por 5, y los razonamientos precedentes demuestran que el cuociente es $\frac{2}{3 \quad 5}$; por consiguiente se obtendrá cuatro veces la quinta parte de $\frac{2}{3}$ ó los $\frac{4}{5}$ de $\frac{2}{3}$ repitiendo 4 veces la fraccion $\frac{2}{3 \times 5}$, lo que reduce, como se acaba de ver, á multiplicar el numerador por 4. El producto de $\frac{2}{3}$ por $\frac{4}{5}$ es pues $\frac{2 \times 4}{3 \times 5}$ ó $\frac{8}{15}$. Luego para multiplicar una fraccion por otra se multiplica numerador por numerador y denominador por denominador.

El producto de muchas fracciones conserva su valor en cualquier orden que se efectue la multiplicacion.

La division de las fracciones puede presentar tres casos:

1°. Dividir una fraccion por otra fraccion: para efectuar esta operacion se multiplica el numerador de la fraccion dividendo por el denominador de la fraccion divisor, despues el denominador de la fraccion dividendo por el numerador de la fraccion divisor. Supongamos que queremos dividir $\frac{3}{5}$ por $\frac{8}{11}$, el producto será $\frac{33}{40}$.

2°. Dividir un entero por una fraccion. En este caso es preciso multiplicar el entero por el denominador, dividir el producto por el numerador. Así el cuociente de 12 por $\frac{7}{9}=\frac{108}{7}$. Mas esta fraccion es *impropia*, es decir que su numerador es mayor que su denominador, y por consiguiente vale mas ó es mayor que la unidad; para averiguar su valor se divide el numerador por el denominador y al resto se pone el denominador; así la fraccion resultante $\frac{108}{7}$ es igual á 15 unidades, ó números enteros y á $\frac{3}{7}$. Este proceder debe aplicarse á todos los casos que resulte una fraccion de este género. Si la fraccion tuviese el numerador exactamente igual al denominador su valor seria la unidad. La razon de este proceder es facil de percibir: supongamos que efectuando divisiones sobre fanegas de trigo, os resultase por cuociente 4 fanegas y $\frac{2}{3}$ de fanega; esta última fraccion es facil de apreciar, pues equivaldria á una fanega entera menos un tercio, ó en otros términos que el cuociente logrado seria igual á 5 fanegas menos un tercio; mas supongamos que el cuociente logrado fuese 4 fanegas y $\frac{6}{4}$ de fanega; en este caso la fraccion lograda seria impropia, es decir valdria mas que la unidad ó la fanega, pues una fanega no contiene mas que cuatro cuartas partes, y si contuviese mas, ya no serian cuartas partes; luego si han resultado seis cuartas partes de fanega ha resultado mas de una fanega, y para conocer su valor es preciso dividir el numerador por el denominador, lo que da por producto 1 mas $\frac{2}{4}$; luego $\frac{6}{4}$ de fanega es igual á 1 fanega mas $\frac{2}{4}$ de fanega, y como $\frac{2}{4}$, por los principios establecidos es igual á $\frac{1}{2}$, resulta que $\frac{6}{4}$ de fanega es igual á 1 mas $\frac{1}{2}$ ó á fanega y media. Mas si el producto hubiera sido 4 fanegas y $\frac{4}{4}$ de fanega, este producto seria equivalente á 5 fanegas, pues 4 dividido por 4 da 1, y si consideramos la unidad ó fanega dividida en cuatro partes iguales, como el denominador indica, y tomamos todas cuatro como el numerador señala, tomamos toda la fanega.

3°. Cuando se trata de dividir una fraccion por un entero, se multiplica el denominador de la fraccion por el entero dejando tal cual está el numerador. Este proceder es evidente si os acordais de lo que ya os he esplicado que para hacer una fraccion un número de veces mas pequeña, ó lo que es lo mismo dividirla por este número, se divide su numerador ó multiplica su denominador: así si queremos dividir por 4 ó hacer cuatro veces mas pequeña la fraccion $\frac{4}{10}$, segun los principios establecidos el cuociente por 4 de esta fraccion es igual á $\frac{1}{10}$ ó bien á $\frac{4}{40}$; mas como no siempre es divisible el numerador por el entero divisor, conviene mas dejar el numerador tal cual es y multiplicar el denominador; así en este ejemplo $\frac{3}{6}$ dividido por 4, no siendo el numerador divisible por 4, se usa del segundo proceder, esto es, se multiplica el denominador; así el producto de esta division será $\frac{3}{24}$.

CARTA CUARTA.

DE LOS NUMEROS COMPLEXOS O DENOMINADOS.

Amigo Eugenio, hasta el presente hemos considerado los números de un modo abstracto, esto es, no determinando la especie de unidades; ahora vamos á aplicar los principios establecidos y los procederes descritos á los números concretos, ó á los números que designan qué especie de unidades los componen. Voy á hablarte de lo que los aritméticos llaman *números complexos* ó *denominados*, bajo cuyo nombre comprenden todo nombre concreto que se compone de muchas partes ó especies que se refieren á un mismo género, como 4 quintales, 8 arrobas, 10 libras, 6 onzas; ó 4 pesos fuertes, 8 reales, etc. Las operaciones sobre números de esta naturaleza es muy frecuente é importante, y mi objeto en la presente carta es enseñarte los procederes por medio de los cuales se efectuan, aplicando á su práctica la teoría espuesta de los

números enteros y fraccionarios. Esta teoría ha perdido, á lo menos en Francia, parte de su utilidad desde el establecimiento del sistema decimal. Los Franceses, pueblo eminentemente ilustrado y culto, que á pesar de su acendrado patriotismo no hesitan en abandonar las viejas costumbres cuando redunda en ventaja del progreso, han generalizado el sistema decimal, esto es, un sistema de fracciones en que la unidad se decuplica ó subdivide en partes sucesivas de diez en diez veces mas pequeñas, convencidos de las grandes ventajas que este sistema trae consigo, facilitando los cálculos, y pudiendo ya sea inmediatamente, ó ya sea por operaciones muy breves y fáciles seguir la misma ley que los enteros. De este sistema que tal vez las demas naciones europeas acabarán por adoptar, pienso hablarte prolijamente en mi próxima carta, si bien tengo un recuerdo de haber tocado ligeramente este punto en la primera tarde de nuestras conferencias [1]; en la presente, puesto que son de un uso continuo las operaciones sobre los números complexos tales como en general se admiten, voy á esponerte su teoría, siendo esta por otra parte muy propia á familiarizarte con la consideracion de las fracciones y á acostumbrarte al cálculo. Pero antes pienso esponerte un cuadro sucinto de la ley y subdivision del tiempo, pesos y medidas, adoptando en estos dos últimos puntos la division española, puesto que estoy en España y que su estudio debe serte util, si

[1] Véase el tomo I, desde la página 57 hasta la 63, y ademas las tablas de la reduccion de pesos y medidas al fin del mismo tomo.

es verdad como me has dicho en otra ocasion que piensas hacer un viage á España.

En el tiempo, como no ignoras, se observa la division siguiente : el siglo consta de 100 años, el año de 365 dias, y si es bisiesto de 366; el dia de 24 horas; la hora de 60 minutos; el minuto de 60 segundos; el segundo de 60 terceros.

Para las cosas que se venden al peso, la unidad de especie superior es el quintal, que se compone de 4 arrobas; la arroba de 25 libras; la libra de 16 onzas; la onza de 16 adarmes; el adarme de 3 tomines, y el tomin de 12 granos. La libra se divide tambien en 2 medias libras, en 4 cuarterones, y en 8 medios cuarterones; la onza en 2 medias onzas, en 4 cuartas y en 8 octavas ó dracmas; la libra se divide tambien en 2 marcos, y el marco en 8 onzas.

En las medidas agrarias la unidad primera es el estadal cuadrado, que es un cuadro de 4 varas, ó 12 pies de largo y otro tanto de ancho. Sigue despues la aranzada que se compone de 20 estadales en cuadro; y luego la fanega de tierra, que se compone de 24 estadales en cuadro. La fanega de tierra se divide en 12 celemines, y el celemin en 4 cuartillos.

Para los granos, la sal y demas cosas secas la unidad de especie superior es el cahiz, que se compone de 12 fanegas, y la fanega de 12 celemines; tambien se divide la fanega en 2 medias fanegas y en 4 cuartillas.

Para los líquidos, escepto el aceite, se usa de la cántara ó arroba que se divide en 2 medias cántaras; la media cántara en 2 cuartillas, la cuartilla en 2 azumbres; la azumbre en 2 medias azumbres; la media azumbre en 2 cuartillos; el cuartillo en 2 medios cuartillos; el medio cuartillo en 2 copas; de modo que la cántara tiene 32 cuartillos; el moyo se compone de 16 cántaras.

El aceite lo esceptuo, porque sus medidas están arregladas al peso; y así se usa de la arroba, media arroba, cuartilla ó cuarto de arroba, libra, media libra, cuarteron ó panilla, y de la media panilla.

En la moneda la unidad de especie superior es el doblon, que se compone de 4 pesos; el peso de 15 reales, y el real de 34 maravedises.

Las medidas de longitud se refieren al pie; este se divide en 16 dedos, y el dedo en mitad, cuartà, octava, y diez y seisava parte; tambien se divide en 12 pulgadas y la pulgada en 12 líneas.

Entendido esto, vamos á ver ahora como se procede para efectuar las diversas operaciones relativas á los números complexos.

Para sumar estos números, se ponen unos debajo de otros, de manera que se correspondan las unidades de cada especie; empiézase por la unidad de especie inferior, y si de la suma de esta resulta alguna ó algunas unidades de la especie inmediatamente superior, se la añade á esta, como en los números abstractos la suma de las unidades simples se agregan á las decenas; y así se continua hasta haber sumado las de la especie superior siendo la suma el número que resulta. Por ejemplo, trátase de sumar 16 quintales, 2 arrobas, 10 libras y

6 onzas, con 24 quintales 6 arrobas, 4 libras y 2 onzas, con 6 quintales, 19 arrobas, 4 libras y 2 onzas, con 10 quintales, 6 arrobas, 8 libras y 6 onzas, coloco todos estos números uno debajo de otros.

(8	(1	(1	
16 qs.	2 ars.	10 lib.	6 onz.
24	6	4	2
6	19	4	2
10	6	8	6
64	~~34~~	~~27~~	~~16~~
	2	2	0

y empiezo á adicionar por las onzas, cuya suma resulta 16; que componiendo una libra exactamente, borro 16 y pongo debajo 0, y 1 libra que resulta la pongo encima de la columna de las libras separado con una media luna; sumo las libras y tengo por suma 27, cuyo número me compone 1 arroba y 2 libras; borro el 27, pongo 2 y añado 1 arrobas que ha resultado á la columna de las arrobas; sumo estas y tengo por resultado 34, lo que compone 8 quintales y 2 arrobas; borro el 34, pongo 2 añado los 8 quintales á la columna de estos, cuya suma resulta 64; la suma de los números propuestos se compone de 64 quintales 2 arrobas y 2 libras.

Para restar los números complexos ó denominados se pone el sustraendo debajo del minuendo, de modo que se correspondan las unidades de una misma especie; despues se resta cada especie de unidades de sus unidades correspondientes en el

minuendo, empezando por las de la especie inferior. Si alguna especie de unidades del sustraendo fuese mayor que la del minuendo se toma de este una cantidad de la especie inmediata superior, y si no hubiese en este se tomará de la otra, ó de la siguiente si tampoco hubiese en esta, etc.; y cuando se toma una unidad superior de dos ó tres órdenes, se descompone en las inferiores. Por ejemplo, trátase de restar 4 quintales, 6 arrobas y 2 libras de 2 quintales, 4 arrobas y 4 libras. Dispónese la operacion del modo siguiente :

4 qs.	6 ars.	2 lib.
2	4	4
2	1	25

Despues empiezo á restar por la columna de las libras, y como 4 libras no pueden restarse de 2, tomo una unidad de las arrobas que valen 25 libras, las que juntamente con las 2 que tengo hacen 27, de las que, restando 4, quedan 5, que escribo bajo la raya ó línea que he trazado; despues paso á las arrobas, y teniendo en consideracion la que saqué para añadir á la columna de las libras, resulta por resto 1; y últimamente pasando á la columna de los quintales, resultan 2 de diferencia; luego la diferencia total es de 2 quintales, 1 arroba y 25 libras.

Supongamos que de 18 quintales, quiero restar 16 quintales, 2 arrobas y 16 libras.

	5	25
18 qs.	0 ars.	0 lib.
16	2	16
1	1	9

Como no puedo restar libras de donde no las hay, y como no puedo tomar una unidad superior, arroba, puesto que tampoco las hay, paso á tomar un quintal, que tiene cuatro arrobas; y como solo necesito una arroba para restar las libras, dejo 3 arrobas en el lugar de las arrobas, y pongo lo restante en el lugar de las libras, que me da 25 libras, de las cuales restando 16, la diferencia es 9; pongo 9 por diferencia, y continuo la operacion, restando 2 arrobas de 3, lo que da de diferencia 1; y cuando llego á los 18 quintales, tengo presente que he quitado uno; de modo que la diferencia es 1; la suma total es 1 quintal, 1 arroba y 9 libras.

Para multiplicar los números complexos ó denominados se practica lo siguiente:

1°. Se reducen ambos factores á la menor de sus especies;

2°. Se multiplican estos dos números despues de reducidos;

3°. Divídase el producto por el número que espresa las veces que la unidad de especie inferior del multiplicador cabe en la mayor, y el cuociente espresará el producto en las unidades de especie inferior del multiplicando, por lo que deberá reducirse á las de especie superior. En esta cuestion es indispensable conocer cada factor por lo que te diré que el multiplicando es de la especie que se busca en el producto, y que por consiguiente el otro será el multiplicador. Por ejemplo, si quiero averiguar cuanto valen 7 varas y 1 pie á 9 pesos y 6 reales la vara, observaré que como lo que busco aquí son pesos y reales, el multiplicando es 9 pesos y 6 reales; por lo que los reduciré primero á la menor de sus especies, y tendré reducido el multiplicando á 141 reales, y el multiplicador á 22 pies; multiplico 141 por 22, y saco el producto 3,102; el cual lo divido por 3, á causa de que el pié está contenido 3 veces en la vara, lo que me da el cuociente 1,034 que espresa los reales que valen las 7 varas y 1 pie; y reduciendo 1,034 á pesos sacaré 68 pesos y 14 reales.

Para dividir los números complexos ó denominados, se practica el proceder siguiente: redúcese el divisor á la menor de sus especies; en seguida se hace la division empezando por las unidades de especie superior del dividendo, reduciendo el residuo si lo hubiese á las unidades de especie inferior inmediata, y añadiendo las unidades de esta especie que hay en el dividendo; despues se dividen por el divisor, y si queda alguna resta se reduce á las unidades de especie inferior inmediata, y así se continua hasta que no quede unidades de especie inferior: despues multiplícase todo este cuociente por el número que espresa las veces que la unidad de especie inferior del divisor está contenida en la mayor, empezando esta multiplicacion por las unidades de especie inferior, para, si resultan unidades de especie superior, añadirlas al producto de la columna inmediata, y el resultado es lo que se pide. Por ejemplo, sabido que 4 libras y 8 onzas me cuestan 4 pesos y 12 reales, se trata saber á cuanto me sale la libra. Segun el proceder indicado, reduzco el divisor 4 libras y 8 onzas á la menor de sus especies.

Por ejemplo, se sabe que 7 varas y un pié han costado 68 pesos y 14 reales, si quiero averiguar á como ha costado la vara, dividiré los 68 pesos y 14 reales por 7 varas y un pié. Aquí se conoce el dividendo en que es de la misma especie que lo que se busca. Practico lo primero, y se me convierte el divisor en 22 pies; despues hago la division de la manera siguiente.

68 ps. 14 rs.	22
02	3 ps. 2 rs.
15	3
30	9 ps. 3 rs.
14	
44	
0	

Empiezo por los pesos que siendo 68, les toca 3, que son pesos, que para reducirlos á reales los multiplicaré por 15, y al producto 30 le añadiré los 14 reales que hay en el dividendo; veo que el 22 cabe dos veces en 44, y no deja resta; ahora el cuociente 3 pesos y 2 reales lo multiplico por 3, que es el que espresa las veces que la unidad de especie inferior del divisor está contenida en la mayor, y saco el producto 9 pesos y 6 reales que es en efecto el valor de la vara.

No me detendré en la demostracion de todas estas operaciones, porque se apoya en los principios que he establecido.

CARTA QUINTA.

DE LAS FRACCIONES O QUEBRADOS DECIMALES.

§ I.

Numeracion y naturaleza de estas fracciones.

Amigo Eugenio, segun dejé insinuado en mi última, de todas las maneras de subdividir la unidad principal la mas simple y cómoda para los cálculos, es, sin duda, la subdivision en partes sucesivas de diez en diez veces mas pequeñas, de lo que resultan fracciones que tienen el denominador, seguido de uno ó muchos ceros, llamadas fracciones decimales. Este modo de subdivision de la unidad ofrece, repito, grandes ventajas, puesto que inmediatamente, ó á lo menos mediante operaciones sumamente fáciles, se reducen las operaciones de los números fraccionarios á operaciones sobre números enteros. Esto es lo que te haré ver despues de haberte hecho conocer la numeracion de las fracciones decimales, es decir su nomenclatura y la manera de escribirlas en cifras.

De la misma manera que decuplicando sucesiva-cuestan 4 pesos y 12 reales, se trata saber á cuanto me sale la libra. Segun el proceder indicado, reduzco el divisor 4 libras y 8 onzas á la menor de sus especies.

Por ejemplo, se sabe que 7 varas y un pié han costado 68 pesos y 14 reales, si quiero averiguar á como ha costado la vara, dividiré los 68 pesos y 14 reales por 7 varas y un pié. Aquí se conoce el dividendo en que es de la misma especie que lo que se busca. Practico lo primero, y se me convierte el divisor en 22 pies; despues hago la division de la manera siguiente.

68 ps. 14 rs.	22
02	3 ps. 2 rs.
15	3
30	9 ps. 6 rs.
14	
44	
0	

Empiezo por los pesos que siendo 68, les toca 3, que son pesos, que para reducirlos á reales los multiplicaré por 15, y al producto 30 le añadiré los 14 reales que hay en el dividendo; veo que el 22 cabe dos veces en 44, y no deja resta; ahora el cuociente 3 pesos y 2 reales lo multiplico por 3, que es el que espresa las veces que la unidad de especie inferior del divisor está contenida en la mayor, y saco el producto 9 pesos y 6 reales que es en efecto el valor de la vara.

No me detendré en la demostracion de todas estas operaciones, porque se apoya en los principios que he establecido.

CARTA QUINTA.

DE LAS FRACCIONES O QUEBRADOS DECIMALES.

§ I.

Numeracion y naturaleza de estas fracciones.

Amigo Eugenio, segun dejé insinuado en mi última, de todas las maneras de subdividir la unidad principal la mas simple y cómoda para los cálculos, es, sin duda, la subdivision en partes sucesivas de diez en diez veces mas pequeñas, de lo que resultan fracciones que tienen el denominador, seguido de uno ó muchos ceros, llamadas fracciones decimales. Este modo de subdivision de la unidad ofrece, repito, grandes ventajas, puesto que inmediatamente, ó á lo menos mediante operaciones sumamente fáciles, se reducen las operaciones de los números fraccionarios á operaciones sobre números enteros. Esto es lo que te haré ver despues de haberte hecho conocer la numeracion de las fracciones decimales, es decir su nomenclatura y la manera de escribirlas en cifras.

De la misma manera que decuplicando sucesivamente la unidad, se forma nuevas unidades á las cuales se ha dado el nombre de decenas, centenas, mil, diez mil, un millon, etc., de la misma manera se ha concebido igualmente dividida la unidad en 10 partes iguales, que se han llamado *décimos*; cada décimo en diez partes iguales, llamadas *centésimos* (porque la unidad principal contiene diez veces 10 ó 100 de estas nuevas partes); despues el centésimo dividido en 10 partes, llamadas *milésimos*; cada milésimo en 10 partes, llamado *diez milésimo*; cada diez milésimo en 10 partes, llamada *cien milésimo*; cada cien milésimo en diez partes, llamada *millonésimo*, y así sucesivamente. De manera que la unidad es, por decirlo así, un centro de donde parten dos sistemas decimales: uno que es 10, 100, 1000, 10000, etc., es decir la unidad recorriendo sucesivamente grados diez veces mayor; y otro de décimos, centésimos, milésimos, diez milésimos, etc., es decir la unidad recorriendo sucesivamente grados diez veces menor. El primero es el sistema decimal ascendente que todo el mundo conoce; el segundo es el sistema decimal descendente que es el que nos ocupa. De manera que la unidad es el término ó punto de donde proceden estos dos sistemas: tal como en el termómetro, el cero es el término de donde proceden los grados llamados sobre cero y bajo cero, ó como se puede tambien llamar grados de calor y frio.

De la misma manera que en el sistema decimal ascendente, se ha convenido que las cifras por cada grado que se avanzan á la izquierda, adquieran un valor relativo diez veces mayor; se ha convenido

igualmente, como consecuencia legítima, que, en el sistema decimal descendente, tenga lugar todo lo contrario, es decir que cada cifra tenga por cada grado que camine hácia la derecha un valor diez veces mas pequeño. De lo que resulta que si, á la derecha de un número entero ya escrito en cifras, se coloca nuevas cifras, teniendo el cuidado de distinguir estas nuevas cifras de los números enteros por un signo cualquiera, una coma, por ejemplo, se representará mediante este proceder las partes sucesivas de la unidad de diez en diez veces mas pequeñas, es decir *décimos*, *centésimos*, *milésimos*, etc. Por consiguiente el conjunto de las cifras 24, 75 espresará 24 unidades, 7 décimos y 5 centésimos; 5,478 espresará 5 unidades, 4 décimos, 7 centésimos y 8 milésimos.

Supongamos que queramos enunciar en lenguage ordinario el número que estas cifras espresan: 56,5546. Este número puede enunciarse si se quiere de esta manera: 56 unidades, 5 décimos, 5 centésimos, 4 milésimos y 6 diez milésimos; pero observemos que 5 décimos valen 50 centésimos, ó 500 milésimos, ó 5000 diez milésimos; de la misma manera 5 centésimos valen 50 milésimos ó 500 diez milésimos; por lo cual el número total viene á ser 56 unidades 5506 diez milésimos; es decir que para enunciar en lenguage ordinario un número fraccionario decimal escrito, es preciso enunciar separadamente la parte entera, ó la parte á la izquierda de la coma, enunciar despues la parte décimal que está á la derecha como si espresase un número entero, y colocar al fin del enunciado el nombre de la unidad de la última subdivision décimal.

Si se quiere tambien, puédese comprender en un solo enunciado la parte entera y la parte décimal. En efecto, tomemos por ejemplo el número 56,5506; como una unidad vale 10 décimos, ó 100 centésimos, 1000 milésimos, 10000 diez milésimos, se deduce que 56 unidades equivalen á 560000 diez milésimos; y por consiguiente 56,5506 representa 565506 diez milésimos; de la misma manera 7 unidades valiendo 700000 cien milésimos, el número 7,49505 es lo mismo que 749505 cien milésimos; es decir que basta, despues de haber enunciado el nombre como si no hubiese coma, colocar al fin del número enunciado el nombre de la última subdivision. Pero en general se enuncia separadamente la parte entera.

Recíprocamente supongamos que se quiera escribir en cifras una fraccion decimal enunciada en lenguage ordinario; supongamos que se quiera escribir el nombre veinte y nueve unidades, trescientos cincuenta y cuatro milésimos: se escribe primero la parte entera 29; despues como 500 milésimos equivalen á 5 décimos y que 50 milésimos forman 5 centésimos, se coloca una coma á la derecha de 29, y se escribe despues sucesivamente las cifras, 5, 5 y 4; de lo que resultará el guarismo 29,554 para el número enunciado. Dedúcese de lo que acabo de esplicar una regla general: para escribir en cifras un número decimal enunciado en lenguage ordinario, se empieza por escribir la parte entera y se coloca una coma; despues se escribe sucesivamente á la derecha de esta coma, las cifras que representan los

décimos, centésimos, etc., que contiene el enunciado, teniendo cuidado de reemplazar por ceros las unidades de diferente orden que pueden faltar.

Si no hubiese parte entera, esto es, si el número propuesto fuese una fraccion propiamente dicha, se escribe un cero para señalar el lugar de la parte entera, y despues se procede como acabo de decir.

En fin, cuando se enuncia el número, puede suceder que la parte entera no se distinga de la parte decimal, lo que no obsta, sin embargo, para escribir el número propuesto. En este caso, se escribirá el número como si solo espresase unidades enteras, y despues se colocará una coma, de manera que la última cifra á derecha esprese unidades de la última subdivision que comporta el enunciado. Por ejemplo, para escribir el número cuatro mil doscientos catorce centésimos, se escribe primero 4214; y como esta última cifra debe espresar centésimos, se coloca la coma entre 2 y 1, lo que da 42,14 ó 42 enteros y catorce centésimos.

Una fraccion ordinaria se puede, si se quiere trasformar en fraccion ordinaria, aunque esta operacion no tenga tal vez otra utilidad que la de mostrar que si bien diferente por la forma son en el fondo iguales con estas últimas. Una fraccion ordinaria se compone ordinariamente de dos números colocados el uno encima del otro, el numerador y el denominador. En fracciones decimales, el lugar que ocupa la coma basta para indicar el denominador que es igual á la unidad, seguida de tantos ceros cuantas cifras decimales hay, al paso que su numerador se compone del conjunto de las cifras á la derecha de la coma, ó bien si se considera el entero como reducido en fraccion, es el número propuesto, hecha abstraccion de la coma. Así el número 25,5037, puesto en la forma ordinaria de una fraccion, resulta como 25 $\frac{5037}{10000}$, ó si se quiere $\frac{255037}{10000}$; el número 2,00403 es igual á 2 $\frac{403}{100000}$ ó $\frac{200403}{100000}$; enfin 0,0002154 equivale á $\frac{2154}{10000000}$.

Recíprocamente, 2 $\frac{55}{1000}$ ó $\frac{2055}{1000}$ puede cambiarse en 2,055; $\frac{172049}{10000}$ en 17,2049.

Estas trasformaciones de fracciones ordinarias en decimales y viceversa son de un continuo uso en el cálculo.

De lo que he espuesto resulta que si, en una fraccion decimal, se adelanta la coma de uno ó muchos rangos hácia la izquierda, se multiplica el número por 10, 100, 1000, etc., y que al contrario, retrocediéndola de uno ó muchos rangos hácia la izquierda, se divide el número por 10, 100, 1,000, etc. Así, por ejemplo, si en el número 155,07295 avanzamos la coma de tres rangos hácia la derecha, lo que da 155072,95; digo que el número se ha vuelto 1000 veces mayor. En efecto, el número primitivo equivalia á $\frac{15507295}{100000}$; y cuando la coma ha mudado de lugar ha resultado $\frac{15507295}{100}$, fraccion cuyo denominador es 1000 veces mas pequeño que el de la otra; y como he demostrado que, cuando se multiplica el denominador de una fraccion, disminuye esta de valor y aumenta cuando el mismo término se divide, resulta que la segunda fraccion es 1000 veces mayor que la primera propuesta.

Al contrario, si se hace retroceder la coma de dos rangos hácia la izquierda en la misma fraccion pro-

puesta, se cambia esta en 1,5507295 ó $\frac{15507295}{10000000}$, fraccion cuyo denominador es 100 veces mayor que el de la fraccion propuesta $\frac{15507295}{100000}$; por consiguiente la nueva fraccion es 100 veces menor que esta.

Tambien se puede demostrar esto, observando que, mudando de lugar la coma, el valor relativo de cada cifra se vuelve 10, 100, 1000, etc., veces mayor ó menor. Así comparando 155072, 95 á 155, 07295, se ve que la cifra 5, que espresaba en esta última unidades simples, espresa en la otra unidades de mil; la cifra 5 á la izquierda de 5, que espresaba decenas, representa decenas de mil, y así de las demas.

Una fraccion decimal no cambia de valor colocando á su derecha un número cualquiera de ceros: así, 5, 415 equivale á 5, 4150 ó á 5, 415000; en efecto, estos números pueden ponerse, como ya he espuesto, bajo la forma $\frac{5415}{1000}$ $\frac{54150}{10000}$ $\frac{5415000}{1000000}$; ahora bien las dos últimas fracciones no son otra cosa mas que la primera, cuyos dos términos se han multiplicado por 10, 100, lo que no cambia su valor, segun el principio que establecí, que una fraccion no cambia de valor cuando ambos sus términos se multiplican ó dividen por el mismo número. Puédese tambien observar que estos ceros colocados á la derecha de las cifras ya escritas no cambian su valor relativo; y como estos ceros no tienen valor alguno por sí mismos, la fraccion no se altera en lo concerniente á su valor.

Por medio de esta trasformacion, las fracciones decimales se reducen á un comun denominador. Por ejemplo, las fracciones 12, 407 | 0, 25 | 7, 0456 | 25, 4, equivalen á 12, 4070 | 0, 2500 | 7, 0456 | 25, 4000; y bajo esta forma tienen todas 10,000 por denominador comun.

Establecidas estas nociones, pasemos ahora á las operaciones sobre las fracciones decimales.

§ II.

Adicion y sustraccion.

Efectúase la adicion de las fracciones decimales de la misma manera que la de los números enteros: solo hay que tener presente dos circunstancias, reducir las fracciones á un comun denominador, y separar en la suma ó resultado de la adicion, por medio de una coma, tantas cifras decimales cuantas contiene la cifra que mas encierra. Por ejemplo, trátase de sumar los números 52, 4056 | 245, 579 | 12, 0476 | 9, 58 | y 459, 2575.

Lo primero que hago, es reducir todas estas fracciones á un comun denominador, añadiendo un cero á la derecha del segundo número y dos á la derecha del cuarto; despues coloco los números, así preparados los unos bajo los otros, de modo que las unidades de un mismo orden se correspondan, y efectuo la adicion como de ordinario.

Por resultado encuentro 7584497, ó separando cuatro cifras decimales á la derecha, 758,4497, porque los números añadidos espresan unidades del orden de diez milésimos.

$$
\begin{array}{r}
52,4056 \\
245,5990 \\
12,0476 \\
9,5800 \\
459,2575 \\
\hline
758,4497
\end{array}
$$

En la práctica, se puede dispensar de escribir ceros á la izquierda de los números que tienen menos cifras decimales, con tal que se tenga cuidado de disponer las unidades del mismo orden en una misma columna.

La sustraccion se efectua tambien como los números enteros, despues de haber reducido las fracciones á un mismo denominador. Por ejemplo, se trata de sustraer 25, 0784 de 62, 09. Para efectuar la sustraccion, escribo dos ceros á la derecha de 62, 09, lo que me da 62, 0900; despues efectuo la sustraccion como de ordinario, teniendo cuidado solamente de separar 4 cifras decimales á la derecha del resultado.

$$
\begin{array}{r}
62,0900 \\
25,0784 \\
\hline
59,0116
\end{array}
$$

Estos procederes se fundan en que las unidades de diferentes órdenes, en las fracciones decimales, teniendo el mismo valor relativo que en los números enteros, debe suceder, como en estos últimos, por lo tocante á las unidades retenidas ó por la unidad del orden inmediatamente superior que, por abstraccion, se toma prestada en la segunda operacion.

§ III.

Multiplicacion de fracciones decimales.

Para efectuar esta operacion, multiplícase los dos números propuestos uno por otro, sin hacer caso de la coma; y logrado el producto total, se separa hácia la derecha por una coma, tantas cifras decimales cuantas hay en ambos factores. Supongamos, por ejemplo, que tenemos que multiplicar 35, 407 por 12, 54.

```
   35,407
    12,54
 --------
   141628
  177035
  70814
 35407
---------
444,00578
```

Para comprender el proceder prescrito, observemos que los dos números propuestos pueden ponerse bajo la forma $\frac{35407}{1000}$ y $\frac{1254}{100}$. Ahora bien, como, segun queda demostrado, para multiplicar dos fracciones una por otra, es preciso multiplicar numerador por numerador y denominador por denominador; y como, segun tambien queda demostrado, los numeradores son los números propuestos, hecha abstraccion de la coma, se deberá comenzar por multiplicar estos números uno por otro, lo que dará 44400578. Despues, multiplicando los dos denominadores, resulta el producto 100000, esto es, la unidad seguida de tantos ceros cuantas cifras decimales hay en ambos factores; y así es preciso dividir el producto obtenido por 100000, lo que equivale evidentemente á separar 5 cifras decimales hácia la derecha, por cuyo medio se logra el resultado 444, 00578.

Para haceros mas patente esta demostracion, procuraré esplicárosla de otro modo. Cuando quitais la coma del multiplicando, se multiplica evidentemente por 1000, puesto que antes espresaba milésimos, y que despues de la operacion espresa unidades principales ó unidades enteras; por consiguiente, segun os he hecho ver, el producto se ha vuelto por este medio 1000 veces mayor; de la misma manera, como mediante la supresion de la coma en el multiplicador, se vuelve 100 veces mayor, de lo que resulta que el producto se ha vuelto de nuevo 100 veces demasiado grande; resultando mediante la supresion de ambas comas 100000 veces mayor, luego para volverlo á su valor debido, es preciso dividirlo por 100000 ó separar 5 cifras decimales á la derecha, cuyo razonamiento seria análogo si mayor fuese el número de cifras decimales en ambos factores.

Puede tambien suceder que solamente uno de los números decimales contenga decimales; en este caso se separa á la derecha del producto tantas cifras decimales cuantas hay en este número, proceder cuya demostracion es ocioso esponer, resultando de los principios establecidos.

Aplicando los procederes prescritos resulta que

1°. El producto de 4, 0567 por 9, 505 es igual á 38, 5508201;

2°. El producto de 4, 0015 por 29 es 16, 0435;

3°. El producto de 0, 03054, por 0, 023 es 0, 00070242.

Este último ejemplo merece alguna atencion. Prescindiendo de la coma en los dos factores, y efectuando la multiplicacion resulta por producto, 70242; pero como hay *cinco* cifras decimales en el multiplicando, y *tres* en el multiplicador, seria preciso separar *ocho* en el producto que no contiene mas que *cinco*. Para zanjar la dificultad, obsérvase que, debiendo espresar el producto unidades de octavo orden decimal, basta escribir á la derecha de 70242, un número de ceros suficiente para que colocando despues la coma, la última cifra 2 ocupe el octavo rango decimal, En el caso presente el número de ceros que deben añadirse deberán ser cuatro, contando el que debe ocupar el lugar de los enteros; y resulta 0, 00070242.

§ IV.

Division de las fracciones decimales.

Para efectuar esta operacion, se comienza por re-

ducir los números propuestos á un comun denominador, y despues se hace la division prescindiendo de la coma. Trátese por ejemplo de dividir 43, 047 por 2, 55698. Empiezo por escribir dos ceros á la derecha de 43,047, lo que me da 43,04700, y despues divido 4504700 por 255698, obteniendo por cuociente 46 $\frac{245552}{255698}$.

$$\begin{array}{r|l} 4504700 & 255698 \\ \cline{2-2} 1767720 & 46 \\ 245552 & \end{array}$$

En efecto despues de haber escrito dos ceros á la derecha del dividendo, lo que no cambia su valor, se puede poner los dos números propuestos bajo la forma de $\frac{4504700}{100000}$ y $\frac{255698}{100000}$; en seguida segun el proceder prescrito para dividir una fraccion por otra se multiplica el numerador del dividendo por el denominador del divisor, y el numerador de este por el denominador de aquel, lo que da por resultado, atendido que 100000 es el factor comun de los dos términos $\frac{4504700}{255698}$; lo que equivale á hacer la division de los dos números, prescindiendo de la coma despues de haberlos reducido á un comun denominador.

Puédese tambien deducir que, despues de haber reducido las dos fracciones á un comun denominador, mediante la supresion de la coma en ambos términos, se vuelve el dividendo y divisor el mismo número de veces mayor, lo cual no altera su valor respetivo, pues multiplicando ó dividiendo por un mismo número el dividendo y el divisor no cambia el cuociente.

§ V.

Reduccion de una fraccion ordinaria en fraccion decimal.

A causa de las ventajas que el sistema décimal presenta sobre las fracciones ordinarias, los aritméticos consideran de mucha importancia el sustituir las fracciones decimales á las comunes, lo que se consigue evaluando en decimales una fraccion ordinaria, ó en otros términos convirtiéndola en decimales. Trátese por ejemplo de convertir en decimales la fraccion ordinaria $\frac{13}{47}$. Este número refiriéndose á la unidad principal, espresa los $\frac{13}{47}$ de esta unidad; pero como una unidad simple vale 10 décimos, se sigue $\frac{130}{47}$ de décimo;

130	47
360	0,27659
310	
280	
450	
27	

Asi, si despues de haber dispuesto los dos números 13 y 47 como en la division ordinaria, se pone un cero en el cuociente para ocupar el lugar de enteros seguida de una coma para separarlo de las cifras decimales, y despues se divide 130 por 47, el cuociente 2 que se obtiene, y que se escribe á la derecha de la coma, representa el número de deci-

mos contenidos en $\frac{130}{47}$; es decir que $\frac{130}{47}$ es igual á 2 décimos mas $\frac{36}{47}$ de décimo. De la misma manera, como un décimo vale 10 centésimos, consiguientemente $\frac{36}{47}$ de décimo es igual á $\frac{360}{47}$ de centésimo, ó efectuando esta nueva division, á 7 centésimos, mas $\frac{31}{47}$ de centésimo. Escribiendo cero á la derecha de 31, y dividiendo 310 por 47, resulta por cuociente 6 milésimos, que se escribe á la derecha de las cifras precedentes, y por resto resulta 28, á cuyo lado se pone un nuevo cero para volverlo en diez milésimos; y así sucesivamente. Continuando la operacion hasta haber logrado cinco cifras decimales hállase que la fraccion $\frac{13}{47}$ equivale á 0, 27659, y ademas $\frac{27}{47}$ de cien milésimo, fraccion de que no se hace caso por ser la cantidad que representa muy poco considerable; y entonces se dice que 0, 27659 representa el valor de $\frac{13}{47}$ con una diferencia menor que un cien milésimo, en atencion á que la fraccion de que se prescinde es menor que la unidad de este orden.

De lo que acabo de esponer resulta la regla siguiente: para convertir una fraccion ordinaria en fraccion decimal, se disponen los dos números como en la division, y se escribe un cero al cuociente y á la derecha de este cero una coma. Despues, se pone un cero á la derecha del numerador, y el número que resulta se divide por el denominador, mediante lo cual se obtiene un cuociente que espresa los décimos y un resto; agrégase á este resto un cero, y el número resultante se divide por el denominador, lo que da un cuociente que espresa los centésimos, y otro resto al que tambien se agrega un 0 á la derecha y se divide por el denominador, mediante lo cual se logra otro cuociente que espresa los milésimos y ademas un tercer resto con el cual se opera como en el anterior, continuando de la misma manera, hasta que resulte el número de cifras decimales que se desea ó que la cuestion exige. Si resulta un resto, la fraccion decimal que se obtiene de este modo, se diferencia de la fraccion propuesta de una cantidad menor que la última unidad decimal del cuociente.

Si el numerador de la fraccion que debe cambiarse en fraccion decimal fuese mayor que el denominador, ó en otros términos, que la fraccion fuese impropia, deberán estraerse las unidades, las que deberán ponerse en el cuociente seguidas de una coma para separarlas de las cifras decimales.

Esto es cuanto pienso oportuno decirte sobre las fracciones decimales en general, sintiendo mucho que los estrechos límites de una carta no me permitan estenderme mas acerca de estos procederes y demostraciones, y especialmente acerca de la reduccion de una fraccion ordinaria en fraccion decimal, punto de grande importancia y que tal vez trataré mas prolijamente á mi regreso. Por ahora me apresuro á cerrar esta carta que ya es demasiado larga, siendo mi intencion escribirte de nuevo á la mayor brevedad esponiéndote sucintamente la aplicacion del sistema decimal que acaba de ocuparnos.

CARTA SESTA.

APLICACION DEL SISTEMA DECIMAL. NUEVO SISTEMA DE PESOS Y MEDIDAS.

Amigo Eugenio, conforme te prometí en mi última, voy á tratar de la aplicacion del sistema decimal, que es el que rige en Francia; por las teorías y procederes que te he espuesto en mi anterior, estás en estado de apreciar todas las ventajas que este cálculo presenta sobre el de las fracciones ordinarias, y de juzgar cuan importante seria establecer un sistema de pesos y medidas dependiente de este sistema. Esta innovacion la han conseguido los hombres de progreso en Francia, si bien á pesar de muchos obstáculos ocasionados por la ignorancia y las preocupaciones. Voy á trazarte el cuadro de la nomenclatura de los números complexos de este sistema, prescindiendo de toda clase de esposicion de procederes aritméticos, que son los mismos que he establecido tratando del sistema decimal en abstracto.

un 0 á la derecha y se divide por el denominador, mediante lo cual se logra otro cuociente que espresa los milésimos y ademas un tercer resto con el cual se opera como en el anterior, continuando de la misma manera, hasta que resulte el número de cifras decimales que se desea ó que la cuestion exige. Si resulta un resto, la fraccion decimal que se obtiene de este modo, se diferencia de la fraccion propuesta de una cantidad menor que la última unidad decimal del cuociente.

Si el numerador de la fraccion que debe cambiarse en fraccion decimal fuese mayor que el denominador, ó en otros términos, que la fraccion fuese impropia, deberán estraerse las unidades, las que deberán ponerse en el cuociente seguidas de una coma para separarlas de las cifras decimales.

Esto es cuanto pienso oportuno decirte sobre las fracciones decimales en general, sintiendo mucho que los estrechos límites de una carta no me permitan estenderme mas acerca de estos procederes y demostraciones, y especialmente acerca de la reduccion de una fraccion ordinaria en fraccion decimal, punto de grande importancia y que tal vez trataré mas prolijamente á mi regreso. Por ahora me apresuro á cerrar esta carta que ya es demasiado larga, siendo mi intencion escribirte de nuevo á la mayor brevedad esponiéndote sucintamente la aplicacion del sistema decimal que acaba de ocuparnos.

CARTA SESTA.

APLICACION DEL SISTEMA DECIMAL. NUEVO SISTEMA DE PESOS Y MEDIDAS.

Amigo Eugenio, conforme te prometí en mi última, voy á tratar de la aplicacion del sistema decimal, que es el que rige en Francia; por las teorías y procederes que te he espuesto en mi anterior, estás en estado de apreciar todas las ventajas que este cálculo presenta sobre el de las fracciones ordinarias, y de juzgar cuan importante seria establecer un sistema de pesos y medidas dependiente de este sistema. Esta innovacion la han conseguido los hombres de progreso en Francia, si bien á pesar de muchos obstáculos ocasionados por la ignorancia y las preocupaciones. Voy á trazarte el cuadro de la nomenclatura de los números complexos de este sistema, prescindiendo de toda clase de esposicion de procederes aritméticos, que son los mismos que he establecido tratando del sistema decimal en abstracto.

Medidas lineares ó de longitud.

Los Franceses han dado el nombre de METRO á la *diez millonésima parte* de la distancia del polo al ecuador, contada del meridiano que pasa por Paris. Segun las operaciones ejecutadas y verificadas con la mayor precision, se he reconocido que el metro evaluado en pies, pulgadas, líneas, etc., vale 5 pies, 0 pulgadas, 11 líneas y 296 milésimos de línea con la diferencia de $\frac{1}{1000}$ de línea á corta diferencia.

Para designar medidas mayores ó menores que el metro se ha convenido de emplear los siguientes términos sacados del griego y del latin :

MIRIO, KILO, HECTO, DECA, DECI, CENTI, MILLI,

que significan diez mil, mil, ciento, diez, décimo de, centésimo de, milésimo de, y que si se quiere se coloca delante de la palabra metro, de manera que se ha formado el siguiente cuadro :

Miriámetro,	ó medida de	diez mil metros.
Kilómetro,	—	mil metros.
Hectómetro,	—	cien metros.
Decámetro,	—	diez metros.
METRO,	—	*unidad* principal.
Decímetro,	—	décimo de metro.
Centímetro,	—	centésimo de metro.
Milímetro,	—	milésimo de metro.

El miriámetro y el kilómetro son las medidas

itinerarias adoptadas actualmente en Francia; el miriámetro es á corta diferencia el doble de una legua ordinaria; el kilómetro será una quinta parte, ó bien tal vez un cuarto de legua poco mas ó menos, aunque esta relacion varia segun las diferentes leguas.

Medidas de superficie.

La unidad de las superficies es el *metro cuadrado;* pero cuando se trata de grandes superficies agrarias, tómase por unidad el *decámetro cuadrado*, ó diez metros cuadrados; esta unidad se llama área y equivale á corta diferencia á 36 pies cuadrados castellanos.

Los múltiplices del área se designan por medio de las voces *myria*, *kilo*, *hecto*, de la manera siguiente :

Miriárea,	equivalente á	diez mil áreas.
Kiloárea,	—	mil áreas.
Hectoárea,	—	cien áreas.
Decárea,	—	diez áreas.
AREA,	—	*unidad* principal.
Deciárea,	—	décimo de área.
Centiárea,	—	centésimo de área.
Miliárea,	—	milésimo de área.

Medidas de solidez.

La unidad de solidez es el METRO CUBO ; es decir un cubo (figura que como sabes tiene la forma de un dado de jugar), que tiene un metro en cada lado. Los múltiplices y los submúltiplices del metro cubo, no han recibido en general denominaciones particulares ; sin embargo el milésimo de un metro cubo ha recibido el nombre de *decímetro cubo*, porque efectivamente es un cubo que tiene á cada lado un decímetro ; el millonésimo de un metro cubo se ha llamado *centímetro cubo*, porque tiene un centímetro á cada lado. Cuando las medidas de solidez se aplican á la leña y materiales de construccion, la unidad principal ó el metro cubo se llama ESTERIO, del que se considera el *decaesterio*, ó medida de diez esterios.

Medida de capacidad para los líquidos y granos.

La unidad de capacidad es el decímetro cubo, llamado LITRO, del cual se forman los siguientes múltiplices y submúltiplices :

Hectólitro,	ó medida de	cien litros.
Decálitro,	—	diez litros.
LITRO,	—	*unidad* principal.
Decílitro,	—	décimo de litro.
Centilitro,	—	centésimo de litro.

Del peso.

La unidad del peso es un centímetro cubo de agua destilada y en su *maximum* de densidad, á la que se ha dado el nombre de GRAMO, siendo los siguientes sus principales múltiplices y submúltiplices :

Miriógramo,	equivalente á	diez mil gramos.
Kilógramo,	—	mil gramos.
Hectógramo,	—	cien gramos.
Decágramo,	—	diez gramos.
GRAMO,	—	*unidad* principal.
Decígramo,	—	décimo de gramo.
Centígramo,	—	centésimo de gramo.
Milígramo,	—	milésimo de gramo.

El kilógramo vale dos libras á corta diferencia.

De las monedas.

La unidad de moneda francesa es el FRANCO. Para lograrla, se ha pesado cinco gramos de barra de plata con un décimo de liga.

El décimo del franco se ha llamado *décimo*, y el centésimo *céntimo*.

Tal es la nomenclatura de las nuevas medidas, cuyas ventajas sobre las antiguas resumiré en pocas palabras :

1°. Este sistema es uniforme y sencillo, porque sus unidades principales y las subdivisiones de estas unidades siguen entre sí la ley del sistema decimal de numeracion, y ya sabes lo facil que es el cálculo de las fracciones decimales.

2°. Es fijo, invariable y susceptible de ser adoptado en todos los paises, pues no pertenece á ningun clima ni á ninguna nacion en particular.

Todas estas medidas reconocen por origen primitivo el *metro*, que se ha sacado á las dimensiones del globo terrestre. Las monedas, que á primera vista parecen alejarse de esta medida, se refieren á ella indirectamente, pues el franco vale cinco gramos de plata ligada, y el gramo es el peso de un centímetro cubo de agua destilada.

La aplicacion de las cuatro reglas de la aritmética al nuevo sistema de pesos y medidas, no puede presentar mucha dificultad despues de lo que tengo espuesto acerca de las fracciones decimales; por este motivo no me detendré en su aplicacion, y tanto menos cuanto que estas aplicaciones minuciosas te serian en parte inútiles, pues hasta la actualidad este sistema solo se usa en Francia [1]. El próximo correo pienso hablarte de las potencias y raices de los números.

[1] Véase al fin del tomo I las tablas de reduccion de pesos y medidas.

CARTA SÉPTIMA.

DE LAS POTENCIAS Y RAICES DE LOS NUMEROS.

§ I.

De la raiz cuadrada.

Amigo Eugenio, segun te he prometido en mi última, vamos á tratar de las potencias y raices.

El producto de un número por sí mismo se llama el *cuadrado* de este número; y el número que, multiplicado por sí mismo, da el cuadrado, se le llama *raiz cuadrada*. Así, el cuadrado de 4 es el producto 16, de 4 por 4, y la raiz cuadrada de 16 es 4.

Para indicar el cuadrado de un número, se coloca la cifra 2 á su derecha y un poco encima; la raiz cuadrada de un número se designa poniendo este número bajo el signo $\sqrt{}$. Así 4^2 indica el cuadrado de 4, y $\sqrt{16}$ designa la raiz cuadrada de 16.

Los cuadrados de los números 1, 10, 100, etc., siendo 1, 100, 1000, etc., tienen sus raices comprendidas entre 1 y 100, entre 100 y 1000, etc., y por consiguiente, cuando el cuadrado de un número entero no tiene mas de dos cifras, la raiz cuadrada de este cuadrado no tiene mas que una cifra; cuando encierra tres ó cuatro cifras, la raiz cuadrada tiene dos y así sucesivamente. Pasemos ahora á ver como se estrae la raiz cuadrada de los números enteros.

Los cuadrados de los números de una sola cifra siendo menores que 100, se saca de estos cuadrados la raiz cuadrada, haciendo los cuadrados de los 9 primeros números, y viendo cual número como raiz conviene al número propuesto.

Para hacerte comprender el proceder que se emplea para estraer la raiz cuadrada de un número entero que depase 100, voy á procurar hacerte comprender como las diferentes partes de la raiz 64, cooperan á la formacion del cuadrado del mismo número.

```
  64
  64
  ──
  16  unidades, cuadrado de 4 unidades.
  24  decenas, producto de 6 decenas por 4 unidades.
  24  decenas, producto de 6 decenas por 4 unidades.
  36   centenas, cuadrado de 6 decenas
────
4096  unidades, cuadrado de 6 decenas.
```

El cuadrado de 64 es el producto 4096, que resulta de la multiplicacion de 64 por sí mismo; mas para hacerte comprender como las diferentes partes de la raiz cooperan á la formacion del cuadrado, he procedido de la manera que ves mas arriba, poniendo separadamente los varios productos parciales que resultan. Así, en el primer producto parcial 16 unidades que resulta de la multiplicacion de 4 por 4, en lugar de poner, como de costumbre 6 unidades y guardar la decena para agregarla al producto de las decenas, escribo completamente las 16 unidades, y lo mismo hago con respecto á las decenas, resultando por producto total 4096 unidades que es el cuadrado del número 64.

La misma descomposicion se puede aplicar á otro cualquier número. De lo que resulta que el cuadrado de un número compuesto de decenas y unidades contiene tres partes: el cuadrado de las decenas, el doble de las decenas multiplicado por las unidades y el cuadrado de las unidades.

Vamos á ver ahora como del cuadrado de un número cualquiera se puede estraer la raiz.

Trátese por ejemplo de estraer la raiz cuadrada de 4096; dispónese el cálculo de la manera siguiente:

Cuadrado	4096	64
	36	$124 \times 4 = 496$
Primer resto	496	
	496	
Segundo resto	0	

y se dice: el cuadrado de 10 vale 100, el cuadrado de las decenas de la raiz solo puede hallarse en las 40 decenas de 4096; sepárase por un punto las dos primeras cifras á la derecha de 40. 96. Como 40 cae entre 6^2 y 7^2, digo que 6 es la cifra de las decenas de la raiz. En efecto 40 siendo mayor que 6^2, las 40 centenas de 4096 espresan un número mayor que 6^2 centenas; por consiguiente si se añade 96 unidades á las 40 centenas la suma 4096 será necesariamente mayor que 6^2 centenas. Por otra parte, 40 siendo menor que 7^2, y el esceso de 7^2 sobre 40 no pudiendo ser menor que la unidad, 40 centenas espresa un número menor que 7^2 centenas, y el esceso de 7^2 centenas sobre 40 centenas no puede ser menor que una centena. Añadiendo pues el número 96 que es menor que una centena, la suma 4096 será necesariamente menor que 7^2 centenas. Por consiguiente el número añadido está comprendido entre 6^2 centenas y 7^2 centenas, es decir entre los cuadrados de 6 decenas y 7 decenas, luego la raiz cuadrada de 4096 está tambien comprendida entre 6 y 7 decenas; luego está comprendida entre 6 decenas y de un cierto número de unidades menor que 10. Para obtener estas unidades, sustraese de 4096 el cuadrado 36 centenas de las centenas de la raiz; el resto 496 no contiene mas que el doble de las 6 decenas de la raiz, multiplicado por las unidades y el cuadrado de las unidades. El doble de las decenas multiplicado por las unidades espresando decenas, solo puede hallarse en las 49 decenas del resto 496, del cual se separan por un punto en esta forma 49. 6. Estas 49 decenas contienen ademas las decenas que pueden resultar del cuadrado de las unidades; por consiguiente dividiendo 49 por 12, que es el doble de las decenas de la raiz,

las cuatro unidades del cuociente espresan las cifras de las unidades de la raiz, ó una cifra demasiado fuerte. Para ensayar la cifra 4, se observa que el resto 496 componiéndose del doble de las 6 decenas, multiplicado por las cuatro unidades y del cuadrado de 4 unidades, basta calcular la suma de estas dos partes y restarla de 496. Con este objeto, se escribe la cifra 4 de las unidades á la derecha de 12, número doble de las decenas de la raiz, lo que da 124, que multiplicado por 4, da por producto la suma que se pide. Sustrayendo 4 veces 124 de 496, el resto cero indica que 64 es la raiz exacta de 4096.

El razonamiento que ha servido á determinar las decenas de la raiz, siendo aplicable á un número cualquiera, conclúyese que la raiz cuadrada del mayor cuadrado contenido en las centenas de un número cualquiera, determina siempre las decenas de la raiz cuadrada de este número.

Si el número propuesto contuviese mas de 4 cifras, por analogía, se deduce que será preciso dividirlo en grupos de dos cifras, partiendo de la derecha, y que será preciso buscar el mayor cuadrado contenido en el último grupo á izquierda. La raiz de este mayor cuadrado espresará el valor de la primera cifra á izquierda de la raiz.

La segunda cifra, partiendo de la izquierda de la raiz, deberá ser tal, que el cuadrado formado por estas dos cifras, sea el mayor cuadrado contenido en las dos últimas columnas á izquierda, y se hallará esta segunda cifra por el método empleado cuando los números no contienen mas de dos grupos;

es decir, que en el número propuesto, se prescindirá de todas las cifras, á escepcion de las contenidas en los dos grupos del lado izquierdo.

La tercera cifra de la raiz deberá ser tal, que el cuadrado del número que da con los dos otros sea el mayor cuadrado contenido en los tres grupos del número propuesto.

Tomemos, por ejemplo, el número 421201; será preciso disponer el cálculo de la manera siguiente:

Cuadrado	42.12.01	649		
	56	125	124	1289
Primer resto	6 12	5	4	9
	4 96	625	496	11601
Segundo resto	1 16 01			
	1 16 01			
Tercer resto	0			

El cálculo puede enunciarse de esta manera; el mayor cuadrado contenido en 42 es 36, cuya raiz es 6; luego 6 es la primera cifra de la izquierda de la raiz.

42.12 contiene el cuadrado de 64: he demostrado que el mayor cuadrado, contenido 42,12, no puede pasar el número 64, y el cuadrado de 64 es igual á 36 centenas, mas 4 veces 12 decenas, ó 48 decenas y ademas 16 unidades.

Restando 36 centenas de 42, 12, el resto 61, 2 deberá contener 4 veces las 12 decenas, mas las unidades; por lo que colocamos una coma entre la cifra 2, y dividimos 61 por 12, y hallamos que 5 es

un número escesivo, pues haciendo el producto de 125 por 5, el producto 625 no puede restarse de 612; ensayamos la cifra 4, la cual pudiendo restarse es cifra exacta. El producto 496 puede sustraerse de 612, y el resto es 116; bájase las dos cifras restantes 01. Este resto debe contener evidentemente el doble producto de 64 decenas por 9; efectúase la division por el número doble de 64 ó 128, y se ensaya la cifra 9, verificando si el producto 1289 por 9 puede restarse de 116, 01, el resto cero indica que 9 es exacto.

Cuando la raiz cuadrada de un número entero se halla comprendida entre dos números enteros consecutivos, esta raiz, aunque exista, no puede espresarse exactamente por ningun número. En efecto, si un número pudiese espresar esta raiz, este número seria decimal ó fraccionario, y convirtiéndolo en fraccion irreductible, el cuadrado de esta fraccion irreductible deberia ser un número entero, lo que no es posible.

Llámanse inconmensurables las cantidades que no tienen medida comun con la unidad.

Para estraer la raiz cuadrada de un número entero, se opera como si este número fuese un cuadrado, y cuando el último resto, correspondiente á las cifras de las unidades de la raiz, no es cero, la raiz que se busca es inconmensurable, y el mayor cuadrado, contenido en la raiz cuadrada, espresa la raiz del mayor cuadrado contenido en el número propuesto.

Si por abstraccion te figuras un número descompuesto en dos partes, y si multiplicas la suma de estas partes por esta misma suma, te convencerás que el cuadrado de una suma formada de dos partes se compone del cuadrado de la primera parte, del doble de la primera parte multiplicada por la segunda, y del cuadrado de la segunda parte.

Cuando el resto que, correspondiente á la raiz que se logra, no es menor que el doble de esta raiz, aumentado de 1, la raiz obtenida es demasiado pequeña, á lo menos de una unidad; y cuando el resto es menor que el doble de esta raiz aumentada de uno, esta raiz no puede ser aumentada de uno.

El cuadrado de una fraccion es el producto de una fraccion por sí misma, é igual por consiguiente al cuadrado del numerador, dividido por el cuadrado del denominador, de lo que resulta que, para estraer la raiz cuadrada de una fraccion, basta estraer separadamente la raiz cuadrada del numerador y la del denominador.

§ II.

De los cubos y de la raiz cúbica de los números enteros.

El producto de tres factores, igual á un número dado, es lo que se llama el cubo de este número; y el número que, tomado tres veces como factor, determina un número dado, es la raiz cúbica de un número dado.

Para indicar el cubo de un número, se coloca la

cifra 3 á su derecha y un poco encima. La raiz cúbica de un número se designa poniendo este número bajo el signo $\sqrt[3]{\ }$

Los cubos de los números 1, 10, 100, etc., siendo 1 y 1000, entre 100 y 1000000, etc., tienen sus raices cúbicas comprendidas entre 1 y 10, entre 10 y 100, etc. Por consiguiente, cuando el cubo de un número entero no contiene mas de 3 cifras, la raiz cúbica de este cubo no contiene mas que una sola cifra; cuando el cubo contiene 4, 5, 6 cifras, la raiz cúbica no contiene mas que dos, y así sucesivamente.

Siendo los cubos de los números de una sola cifra menores que 10^3 ó que 1,000, averigúase las raices cúbicas de estos cubos haciendo uso de la tabla siguiente:

Raiz cúbica: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Cubos: 1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729.

Para estraer la raiz cúbica de un número entero mayor que 1000, obsérvase que el cubo de un número, compuesto de decenas y de unidades, contiene 4 partes: el cubo de las decenas, el producto de tres veces, el cuadrado de las decenas por las unidades, tres veces el cuadrado de las unidades por las decenas, y el cubo de las unidades. Estas cuatro partes espresan respectivamente miles, centenas, decenas y unidades. Así el cubo de 64 se compone del cubo de 216 mil, de 6 decenas de 64, de tres veces el cuadrado de 36 centenas de las 6 decenas multiplicado por las 4 unidades, de 432 centenas, de 3 veces las 6 decenas multiplicadas por el cuadrado de 4 unidades ó de 288 decenas, y enfin del cubo 64 de las 4 unidades; el número 262144, suma de estas 4 partes, espresa el cubo de 64. Para averiguar el cubo de 649, puédese descomponer este número en 64 decenas, mas 9 unidades, y el cubo pedido está formado del cubo 264144 mil de 64 decenas de 649, de 3 veces el cuadrado 4096 centenas, de las 64 decenas multiplicadas por las 9 unidades ó de 110592 centenas, de 3 veces las 64 decenas multiplicadas por el cuadrado 81 de las 9 unidades, ó de 15552 decenas del cubo 729 de las 9 unidades; la suma 273359449 de estas 4 partes es el cubo de 649.

Ahora voy á enseñarte como del cubo de un número entero se puede estraer la raiz cúbica; supongamos que queremos sacar la raiz cúbica del número 262144. Dispónese el cálculo de la manera siguiente :

Cubo	262.144	64	raiz cúbica.
	216	43200	
Primer resto	46 144	2880	
	46 144	64	
Segundo resto	0	46144	

y se dice : el cubo de las decenas de la raiz siendo á lo menos igual á mil, no puede hallarse mas que en las 262 mil de 262. 144 (me se olvidaba decirte que se separa por un punto las tres primeras cifras á derecha de 262144), el número 262 estando comprendido entre 6^3 y 7^3, digo que 7 es la cifra de las

decenas de la raiz; en efecto 262 siendo mayor que 6^3, los 262 mil de 262144 espresan un número mayor que 6^3 mil, luego si se añade 144 unidades á 262 mil, la suma 262144 será necesariamente mayor que 6^3 mil. Por otra parte, 262 es menor que 7^3, y el esceso de 7^3 sobre 262 no puede ser menor que una unidad. Por consiguiente, el esceso de 7^3 mil sobre 262 mil no puede ser menor que una unidad de mil; añadiendo pues á 262 mil el número 144 que es menor que una unidad de mil, la suma 262144 será necesariamente menor que 7^3 mil. El número propuesto 262144 está pues comprendido entre 6^3 y 7^3, es decir entre los cubos de 6 decenas y de 7 decenas; luego la raiz cúbica de 262144 está comprendida entre 6 y 7 decenas, luego se compone de 6 decenas y de un cierto número de unidades menor que 10. Para lograr estas unidades, réstase de 262144 el cubo 216 mil de las 6 decenas de la raiz; el resto 46144 no contiene mas que 3 veces el cuadrado de las 6 decenas de la raiz, multiplicadas por las unidades, 3 veces las 6 decenas multiplicadas por el cuadrado de las unidades y el cubo de las unidades; el producto de 3 veces el cuadrado de las 6 decenas por las unidades siendo centenas, solo puede hallarse en las 461 centenas del resto 461. 44, de cuyo resto sepáranse por un punto las dos primeras cifras á derecha. Ademas estas centenas contienen las centenas contenidas en las dos últimas partes del cubo. El cuadrado triple de las 6 decenas es 108 centenas; luego dividiendo 461 centenas por 108 centenas ó 461 por 108, las cuatro unidades del cuociente espresan las cifras de las unidades de la raiz ó una cifra escesiva. Para ensayar la cifra 4 se quita 64^3 de 262144; el resto cero hace ver que 64 es la raiz cúbica exacta de 262144.

El mismo resultado se consigue restando del resto 46144 la suma de las 3 últimas partes 432 centenas, 288 decenas, 64 unidades del cubo de 64.

Siendo aplicable á un número cualquiera, el razonamiento que ha servido para determinar las decenas de la raiz cúbica citada, conclúyese que la raiz del mayor cubo, contenido en las unidades de mil de un número cualquiera, determina siempre las decenas de la raiz cúbica de este número.

El cubo de una fraccion se obtiene elevando el numerador y el denominador al cubo. Luego para hallar la raiz cúbica de una fraccion, basta estraer separadamente la raiz cúbica del numerador y denominador.

El cubo de un número decimal se obtiene formando el cubo, hecha abstraccion de la coma, y separando á la derecha de este último cubo tres veces tantos decimales cuantos hay en el número decimal propuesto.

CARTA OCTAVA.

RAZONES, PROPORCIONES Y PROGRESIONES.

§ I.

De las razones y de las proporciones aritmética y geométrica.

Amigo Eugenio, la diferencia entre dos cantidades es su relacion aritmética ó por diferencia, y el cuociente de dos cantidades es su razon geométrica ó por cuociente. Así la razon aritmética de 18 á 6 es 18—6 ó 12, y la razon geométrica de 18 á 6 es $\frac{18}{6}$ ó 3; 18 y 6 son los dos términos de cada una de estas razones. El primer término 18 es el antecedente, y el segundo término 6 es el consecuente.

Las razones aritméticas no cambian cuando se aumenta ó se disminuye los dos términos de un mismo número; pues, cuando los dos números aumentan ó disminuyen de una misma cantidad, no cambia su diferencia. Por ejemplo, la razon aritmética la raiz ó una cifra escesiva. Para ensayar la cifra 4 se quita 64^3 de 262144; el resto cero hace ver que 64 es la raiz cúbica exacta de 262144.

El mismo resultado se consigue restando del resto 46144 la suma de las 3 últimas partes 452 centenas, 288 decenas, 64 unidades del cubo de 64.

Siendo aplicable á un número cualquiera, el razonamiento que ha servido para determinar las decenas de la raiz cúbica citada, conclúyese que la raiz del mayor cubo, contenido en las unidades de mil de un número cualquiera, determina siempre las decenas de la raiz cúbica de este número.

El cubo de una fraccion se obtiene elevando el numerador y el denominador al cubo. Luego para hallar la raiz cúbica de una fraccion, basta estraer separadamente la raiz cúbica del numerador y denominador.

El cubo de un número decimal se obtiene formando el cubo, hecha abstraccion de la coma, y separando á la derecha de este último cubo tres veces tantos decimales cuantos hay en el número decimal propuesto.

CARTA OCTAVA.

RAZONES, PROPORCIONES Y PROGRESIONES.

§ I.

De las razones y de las proporciones aritmética y geométrica.

Amigo Eugenio, la diferencia entre dos cantidades es su relacion aritmética ó por diferencia, y el cuociente de dos cantidades es su razon geométrica ó por cuociente. Así la razon aritmética de 18 á 6 es 18—6 ó 12, y la razon geométrica de 18 á 6 es $\frac{18}{6}$ ó 3; 18 y 6 son los dos términos de cada una de estas razones. El primer término 18 es el antecedente, y el segundo término 6 es el consecuente.

Las razones aritméticas no cambian cuando se aumenta ó se disminuye los dos términos de un mismo número; pues, cuando los dos números aumentan ó disminuyen de una misma cantidad, no cambia su diferencia. Por ejemplo, la razon aritmética de 7 á 5 es igual á la de 7+4 á 5+4 ó de 11 á 9; pues 7—5 es igual á 11—9.

Las razones geométricas no cambian cuando se multiplican ó se dividen sus dos términos por un mismo número; pues esta razon es equivalente á una fraccion, cuyo numerador y denominador son el antecedente y el consecuente de la relacion, y ya os he probado que una fraccion no cambia de valor cuando no se divide sus dos términos por un mismo número. Por ejemplo, la razon geométrica de 7 á 5 es la misma que la de 7×4 á 5×4 ó de 28 á 12; pues estas razones son respectivamente iguales á las fracciones $\frac{7}{5}$, $\frac{28}{12}$ que son iguales. El conjunto de dos razones iguales forma lo que se llama una proporcion. Por ejemplo, la razon aritmética de 7 á 5 es igual á la de 11 á 9, los números 7, 5, 11, 9, forman una proporcion aritmética que se escribe así:

7.5:11.9.

y que se enuncia: 7 es á 5 como 11 es á 9.

La razon geométrica de 7 á 5 es igual á la de 28 á 12, los nombres 7, 5, 28, 12, forman una proporcion geométrica que se escribe:

7:5::28:12

y que se enuncia 7 es á 5 como 28 es á 12.

Para distinguir los dos antecedentes y los dos consecuentes de una proporcion, se llama el primer antecedente y el primer consecuente los dos términos de la primera razon, y el segundo antecedente, y

el segundo consecuente, los de la segunda razon.

En una proporcion aritmética, la diferencia de los dos primeros términos es la diferencia de la primera razon, y la diferencia de los dos otros la diferencia de la segunda razon.

Resulta de estas definiciones que en toda proporcion aritmética ó geométrica, la diferencia de la primera razon es igual á la diferencia de la segunda.

El cuarto término de una proporcion se designa con el nombre de una cuarta proporcional á los otros tres términos. Cuando los términos medios son iguales, la proporcion se llama continua.

En la proporcion aritmética 5.7:7.9, el término medio 7 es una mediana aritmética entre 5 y 9; esta proporcion se escribe ordinariamente de esta manera : 5.7.9, en este caso 9 es una tercera proporcional aritmética á 5 y 7; de la misma manera 4:12::12:56 es una proporcion geométrica continua que se escribe de esta otra manera :

::4:12:56.

12 es una mediana geométrica, 56 una tercera proporcional geométrica.

En toda proporcion aritmética, la suma de los estremos es igual á la de los medios. En efecto, sea por ejemplo la proporcion aritmética 7.5:11.9, proporcion que espresa que las razones entre 7—5 y 11—9 son iguales; por consiguiente, si se aumenta las razones de la suma 5+9 de los consecuentes, los resultados serán iguales; mas 7—5+5+9 se reduce á $7+9$, y á $11-9+5+9$ se reduce á $11+5$; luego la proporcion $7.5:11.9$ da $7+9=11+5$.

Cuando la suma de dos números es igual á la suma de dos otros números, estos cuatro números forman una proporcion aritmética, en la cual los dos números que componen una de las sumas son los estremos y los dos otros son los medios.

En efecto, sea la igualdad $7+9=11+5$.

Si de las dos cantidades $7+9$, $11+5$, se resta $5+9$, los restos serán iguales. Se tiene pues $7-5=11-9$, las razones aritméticas $7-5$ y $11-9$ son iguales.

El cuarto término de una proporcion aritmética es igual á la suma de los medios disminuida del primer término. En efecto, la proporcion $7.5:11.9$ dando $7+9=5+11$, se tiene $9=5+11-7$. Por consiguiente cuando se conoce tres términos de una proporcion aritmética, se puede deducir el cuarto.

En toda proporcion geométrica, el producto de los estremos es igual al producto de los medios. En efecto, la proporcion $7:5::28:12$ espresa que

$\frac{7}{5}=\frac{28}{12}$, y por consiguiente que $7\times12=28\times5$.

Cuando el producto de dos números es igual al de dos otros, estos cuatro números pueden formar una proporcion; en efecto,

$$7\times12=28\times5,\ \text{luego}\ \frac{7}{5}=\frac{28}{12},\ \text{luego}\ 7:5::28:12.$$

El cuarto término de una proporcion es igual al producto de los medios divididos por el primer término; en efecto,

$$12=\frac{28\times5}{7}$$

Por consiguiente, cuando se conoce tres términos de una proporcion, se puede siempre deducir el cuarto; si los medios son iguales, cada uno de ellos es igual á la raiz cuadrada del producto de los estremos; en efecto,

$4:12::12:56$, luego $12\times12=12^2=4\times56$, luego

$$12=\sqrt{4\times56}$$

En fin, es facil ver que, siempre que el producto de los medios será igual al de los estremos, tendrá lugar la proporcion. Dedúcese de lo que precede que cuando dos proporciones tienen una razon comun, las dos otras razones forman una proporcion, y que si dos proporciones tienen los mismos antecedentes y los mismos consecuentes, los cuatro términos forman una proporcion. En fin puede decirse: en una proporcion el primer antecedente mas ó menos un cierto número de veces su consecuente, es á este consecuente, como el segundo antecedente, mas ó menos el mismo número de veces su consecuente, es á este consecuente. Por ejemplo

$$20:2::50:5.\ \text{Pónese}\ \frac{20}{2}=\frac{50}{5}.$$

Esta propiedad se demuestra por lo que se sabe de cálculo de las fracciones, que

$$\frac{20 \pm 4 \times 2}{2} = \frac{50 \pm 4 \times 5}{5}.$$

Es facil deducir otras propiedades de las proporciones teniendo presente las diferentes propiedades de las fracciones; así se tiene por ejemplo

$$\frac{20}{2} = \frac{50}{5}, \text{ luego } \frac{20}{2+20 \times 4} = \frac{50}{5+20 \times 4}.$$

Cuando se multiplica los términos de muchas proporciones unos por otros y por orden, los cuatro productos forman una nueva proporcion. En efecto sea, por ejemplo,

$$5:6::4:8 \text{ y } 5:7::20:28$$

$$\text{se tiene } \frac{5}{6} = \frac{4}{8} \text{ y } \frac{5}{7} = \frac{20}{28}$$

$$\text{luego } \frac{5}{6} \times \frac{5}{7} = \frac{4}{8} \times \frac{20}{28}$$

lo que da $5 \times 5 : 6 \times 7 :: 4 \times 20 : 8 \times 28$.

§ II.

Aplic cion de las proporciones.

Suponte tú que mediante lo que acabo de esponer se tratase de resolver el siguiente problema: Cuatro artesanos han fabricado 20 metros de una

obra cualquiera, ¿cuantos metros fabricarán 9 artesanos?

Este problema, por cuyo término se entiende una proposicion en que se enuncia que por medio de ciertas cosas conocidas debemos averiguar alguna desconocida, pertenece á lo que se llama regla de tres simple; para resolverlo se llama x el número en cuestion que es el de los metros que 20 artesanos harian, y segun los principios establecidos se tiene la proporcion siguiente:

$$4:20::9 \text{ es } x, \text{ luego } x = \frac{20 \times 9}{4} = 45.$$

Es decir que el número de metros que fabricarian 9 artesanos es 45.

Ahora, voy á esponerte otro ejemplo algo mas complicado que se llama regla de tres compuesta, pero que como el anterior reposa igualmente en la teoría de razones y proporciones que forma el asunto de esta carta.

Dos artesanos trabajando 5 horas diarias, han hecho en 5 dias 90 metros de una obra cualquiera; ¿cuantos metros fabricarán en 2 dias 3 artesanos trabajando 7 horas diarias?

Es preciso atender sucesivamente al número de los artesanos, de las horas y de los dias.

Dos artesanos trabajando 3 horas diarias durante 5 dias, hacen tanta obra como 6 obreros trabajando 1 hora diaria durante 5 dias; ó que 30 obreros trabajando durante 1 hora y durante un dia. Ahora bien 3 artesanos, trabajando 7 horas, hacen tanta obra como 21 artesanos durante 1 hora, y si trabajan durante 2 dias seria preciso 42 artesanos trabajando durante 1 hora, 1 solo dia para hacer el mismo trabajo.

La cuestion se reduce de este modo á una regla de tres simple que se puede espresar así :

30 artesanos, durante un tiempo dado han hecho 90 metros de obra, ¿cuantos metros harán 42 artesanos durante el mismo tiempo? Tenemos pues

$$30 : 90 :: 42 : x = 126.$$

Pasemos ahora á lo que se llama regla de interés, para comprender la cual, examina el siguiente problema : ¿cuanto debe ser el rédito de 480000 reales de dinero efectivo durante 3 años, á razon del 5 por ciento ?

La ganancia siendo de 5 por ciento, es evidente que al cabo de tres años 100 reales valdrán 115. Observado esto, el problema se reduce á lo siguiente : si 100 reales al cabo de 3 años valen 115, ¿cuánto valdrán 480000? y el cuarto término de la proporcion indica este valor :

$$100 : 115 :: 480000 : x = 552000.$$

Supongamos que se quiere saber cuanto valdrán 560000 reales, pagables á 40 meses.

Si 100 reales dan 5 reales de ganancia por año, por 4 meses daran $\frac{5}{3}$ de real; luego 100 reales valen al cabo de 40 meses,

$$100+5+5+5+\frac{5}{3} \text{ ó } 115+\frac{5}{3} \text{ ó } \frac{350}{3} \text{ reales,}$$

Tenemos pues la proporcion : $\frac{350}{3}$ reales valor de 100 al cabo de 40 meses es á 100, como 560000 es al valor que se busca.

$$\frac{350}{3} : 100 :: 560000 : x = 480000.$$

§ III.

De las progresiones aritméticas.

La progresion aritmética, ó por diferencia, se forma de una sucesion de términos que crecen ó decrecen, de tal modo que la diferencia entre dos términos consecutivos cualesquiera es constante. Esta diferencia es la razon de la progresion. Por ejemplo los números 4, 7, 10, 13, 16, forman una progresion aritmética ascendente cuya razon es 3 y que se escribe de esta manera :

$$\div 4.\ 7.\ 10.\ 13.\ 16.$$

y se enuncia : 4 es á 7 como 7 á 10, etc.

Segun la definicion de la progresion aritmética ascendente, el segundo término es igual al primero, mas la razon ; el tercero igual al segundo, mas la razon, es decir al primer término aumentado de dos veces la razon; y en general un término de un rango cualquiera es igual al primer término, aumentado de tantas veces la razon cuantos términos hay antes de él.

Cuando la progresion es descendente, un término de un rango cualquiera se logra disminuyendo el primer término de tantas veces la razon cuantos términos hay antes de él.

Por consiguiente, puédese formar una progresion cuando se conoce el primero, el último término y el número total de los términos; pues si 4 y 16 siendo los dos términos estremos, se pide que haya tres términos, comprendidos entre 4 y 16, 16 deberá contener el número 4, y ademas la razon tantas veces cuantos términos habrá antes de él, es decir 4 veces la razon; luego se logra la razon restando 4 de 16, lo que da 12, que, dividido por 4, da de razon 3; y de esta manera se halla la progresion:

4:7:10:13:16.

§ IV.

Progresiones geométricas.

La progresion geométrica ó por cuociente se forma de una serie de términos, tales que dividiendo cada uno de ellos por el que le precede, queda constante el cuociente; este cuociente es la razon de la progresion. Por ejemplo, los números 1, 3,

9, 27, 81, forman una progresion geométrica, cuya razon es 3, y que se escribe de la manera siguiente:

::1:3:9:27:81.

y que se enuncia: 1 es á 3, como 3 á 9, como 9 á 27, como 27 á 81.

Segun la definicion de la progresion geométrica, el segundo término es igual al primero multiplicado por la razon; el tercero igual al segundo multiplicado por la razon, y al primero multiplicado dos veces por la razon; y en general, un término de un rango cualquiera es igual al primer término multiplicado por la razon, tomada tantas veces como factor cuantos términos hay antes de él; de manera que un término cualquiera puede obtenerse multiplicando el primer término por la razon elevada á una potencia indicada por el número de términos que le preceden.

Resulta de lo espuesto, que podemos insertar un cierto número de medios geométricos entre dos números dados. Hemos visto que bastaba, para obtener la razon de la progresion que se pide, calcular el cuociente de la division de los dos números dados por el mas pequeño, y de estraer de este cuociente la raiz del grado indicado por el número de medios geométricos aumentado de 1.

Resulta tambien, de lo que hemos visto, que insertando sucesivamente un mismo número de medios geométricos entre el primer término y el segundo de una progresion geométrica, entre el segundo y el tercero, etc., el conjunto de todos es

[redacted]

gundo y el tercero, etc., el conjunto de todos estos términos forma una nueva progresion geométrica.

La propiedad análoga tiene tambien lugar por lo tocante á las progresiones aritméticas.

En mi próxima carta pienso hablarte de los logaritmos.

CARTA NONA.

TEORIA DE LOS LOGARITMOS.

§ I.

Amigo Eugenio, conforme te lo prometí en mi última, pienso á hablarte en esta acerca de los logaritmos, por cuyo nombre se entiende los números en proporcion por diferencia, que corresponden, término por término, á los números en progresion por cuociente ó geométrica. Voy á presentarte mas clara esta definicion. Cuando se compara dos progresiones indefinidas, la una geométrica empezando por la unidad, y la otra aritmética empezando por cero, cada término de la segunda progresion es lo que se llama el *logaritmo* del término correspondiente de la primera progresion, y el conjunto los términos de estas dos progresiones forma lo que se llama *un sistema de logaritmos.*

Síguese de esta definicion que el logaritmo de la unidad es siempre igual á cero.

En progresiones de esta especie, cada término de la progresion geométrica es igual á la razon tomada tantas veces como factor cuantos términos hay antes de él, y cada término de la progresion aritmética es igual á la razon repetida tantas veces cuantos términos hay antes de él. Por consiguiente los términos sucesivos de la progresion geométrica son las potencias relativas de la razon de esta progresion, y el rango de cada término lo indica el esponente de la razon en este término aumentado de una unidad.

Cuando un término de la progresion geométrica ocupa el mismo rango que un término de la progresion aritmética, estos dos términos son tales que el esponente de la razon en el término de la razon geométrica es igual al multiplicador de la razon en el término correspondiente de la progresion aritmética, y recíprocamente todas las veces que el esponente de la razon en un término de la progresion geométrica es igual al multiplicador de la razon en un término de la progresion aritmética, se sabe que estos dos términos ocupan el mismo rango en las dos progresiones.

Multiplicando uno por otro los dos términos de la progresion, y añadiendo los términos correspondientes de la progresion aritmética, el producto y la suma serán términos de estas progresiones, y ademas estos términos se corresponderán. Esto procede inmediatamente de lo que precede.

Resulta, pues, que si dos progresiones, la una

geométrica empezando por la unidad, la otra aritmética empezando por cero, se colocan una en frente de otra :

$$\because 1 : 3 : 9 : 27 : 81 : 243 : 779 : 2187 : 6561 \text{, etc.}$$
$$\div 0 . 2 . 4 . 6 . 8 . 10 . 12 . 14 . 16 \text{, etc.}$$

para hallar el producto, ocupado por el producto de muchos términos de la progresion geométrica, bastará añadir los términos correspondientes de la progresion aritmética; el término que representa la suma corresponderá al término que representa el producto. Así el producto de los tres términos 3, 9, 27, corresponde á la suma de los tres términos 2, 4, 6,, cuya suma es 12; por consiguiente el producto buscado es 279.

Los términos de la progresion aritmética siendo los logaritmos de los términos correspondientes de la progresion geométrica, el logaritmo del producto de muchos términos es pues igual á la suma de los logaritmos.

Si, entre todos los términos de las dos progresiones que hemos considerado, se inserta un número muy grande de términos, podremos trasformar la progresion geométrica en otra que será tal, que la serie de los números enteros consecutivos, partiendo de la unidad, se hallará, sino representada exactamente, á lo menos espresada por términos que diferirán tan poco como se quiera de los números naturales.

Por lo tocante á los números mayores que la unidad, podemos establecer los principios siguientes : el logaritmo del producto de muchos factores es igual á la suma de los logaritmos de estos factores. Por ejemplo 21, siendo el producto de 3 por 7, se tiene :

$$\log.21=\log.3+\log.7.$$

El logaritmo del cuociente es igual al logaritmo del dividendo, menos el logaritmo del divisor; pues el dividendo siendo igual al producto del divisor por el cuociente, resulta que el logaritmo del dividendo es igual á la suma de los logaritmos del divisor y del cuociente. Así :

$$\log.\left(\frac{21}{7}\right)=\log.\ 21-\log.\ 7=\log.\ 3.$$

El logaritmo de un número fraccionario es igual al logaritmo del numerador, menos el logaritmo del denominador; pues se puede considerar un número fraccionario como indicando el cuociente de la division de su numerador por su denominador; así :

$$\log.\ \frac{21}{7}=21-\log.\ 7.$$

El logaritmo de una potencia es igual al producto del logaritmo de este número por el grado de la potencia. Así :

$$\log.\ 4^3=3\ \log.\ 4.$$

El logaritmo de una raiz se obtiene dividiendo

el logaritmo de este número por el grado de la raiz. Así :

$$\log.\ \sqrt[3]{64}=\frac{1}{3}\log.\ 64.$$

§ II.

De los logaritmos en el sistema cuya base es 10.

El sistema decimal, cuyas ventajas te he espuesto, se aplica tambien á los logaritmos. Este sistema, generalmente adoptado para los cálculos numéricos, se deduce de las progresiones siguientes :

$$\because 1:10:100:1000:10000:100000:1000000, \text{ etc.}$$
$$\div 0.1.2.3.4.5.6 \quad \text{etc.}$$

insertando sucesivamente medios geométricos y aritméticos entre los términos de estas progresiones. La razon 10 de la progresion geométrica primitiva se llama la base del sistema del logaritmo.

En este sistema, los logaritmos de los números

1, 10, 100, 1000, etc.

siendo iguales

0, 1, 2, 3, etc.,

resulta que, segun que un número está comprendido entre 1 y 10, entre 10 y 100, etc., su logaritmo cae entre cero y uno, entre uno y dos, etc.

Por consiguiente, si se evalua los logaritmos en decimales, la parte entera del logaritmo de un número entero ó decimal, mayor que la unidad, contendrá tantas unidades menos una cuantas cifras hay en la parte entera del número cuyo logaritmo se busca. Esta parte entera del logaritmo, se llama la *característica*.

Conocido el logaritmo de un número, para deducir el logaritmo del producto ó del cuociente de este número, por la unidad seguida de muchos ceros, basta aumentar ó disminuir el logaritmo dado de tantas unidades como hay ceros. Así, se tiene :

$$\text{Log.}(47\times 10000)=\text{log.}47\times\text{log.}1000=\text{log.}47+5.$$

$$\text{Log.}\left(\frac{47}{1000}\right)=\text{log. }47-\text{log. }1000=\text{log. }47-5.$$

Cuando se aumenta ó se disminuye el logaritmo de un número de muchas unidades, el resultado es el logaritmo del producto ó del cuociente de este número por una potencia de 10 igual al número de unidades de que se aumenta ó disminuye el logaritmo dado. Por ejemplo se tiene :

$$\text{Log. }47+5=\text{log. }47+\text{log. }1000=\text{log. }(47\times 1000)=\text{log. }(47\times 10^3).$$

$$\text{Log. }2547-5=\text{log. }2547-1000=\text{log. }\left(\frac{2547}{1000}\right)=\text{log. }\left(\frac{2547}{10^3}\right).$$

El sistema de logaritmos, determinado por las progresiones primitivas :

$$\because 1:10:100,\ \text{etc.},$$
$$\div 0.\ 1\ .\ 2\quad \text{etc.},$$

no puede conducir sino á los logaritmos de los números mayores que la unidad. Para lograr los logaritmos de los números menores que la unidad, seria preciso que estos números hiciesen parte de la progresion geométrica, y como en esta progresion cada término, dividido por la razon 10, da el término precedente, se puede hacer preceder el término 1 de los términos $\frac{1}{10}$ y $\frac{1}{100}$, etc., de suerte que la progresion geométrica, indefinidamente prolongada de parte y otra del término 1, se vuelve :

$$\ldots : \frac{1}{100} : \frac{1}{10} : 1 : 10 : 100 : \ldots$$

Para hallar los logaritmos de los números $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, se debe establecer convenciones por medio de las cuales se pueda formar los términos que preceden á cero en la nueva progresion aritmética, y como cada término de la progresion aritmética, disminuido de la razon 1, da el término precedente, el término que precede á cero se obtendrá quitando á cero una unidad; lo que hace 0—1, ó solamente -1, y así sucesivamente se tendrá -2, -3, etc.

En este caso, las progresiones se escribirán de la manera siguiente :

$$\because \frac{1}{1000} : \frac{1}{100} : \frac{1}{10} : 1 : 10 : 100.$$
$$-3,\ -2\ -1, 0.\ 1.\ \ 2.$$

Segun que un número esté precedido del signo $+$ ó del signo $-$, se dice que este número es positivo ó negativo. A los números que no estan precedidos de signos, se les supone precedidos del signo $+$, y son por consiguiente positivos.

Para calcular los logaritmos de los números menores que la unidad, es preciso insertar medios geométricos entre los términos 1, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, etc., de la progresion geométrica, y de medios aritméticos entre los términos correspondientes $0-1$, etc. de la progresion aritmética. La indagacion de los medios geométricos no ofrece dificultad; pero la determinacion de los medios aritméticos exige que se sepa operar sobre los números negativos.

§ III.

De las cuatro operaciones de la aritmética sobre los números positivos y negativos.

Cuando se quiere sumar números positivos y negativos, es preciso generalizar el sentido fijado

hasta el presente á la definicion de la adicion; por los signos $+$ y $-$, colocados delante de los números, indican realmente adiciones y sustracciones parciales. Consideraremos pues la adicion de muchos números positivos y negativos, como teniendo por fin, hallar un solo número positivo ó negativo que esprese el resultado de las adiciones y de las sustracciones parciales, indicadas por los signos $+$ y $-$ que afectan los números sobre los cuales se opera. Este resultado es lo que se llama la suma de los números propuestos. Segun esta nueva definicion de la adicion, para obtener la suma de muchos números positivos ó negativos, se ponen los números los unos seguidos de los otros con sus signos; así para añadir $+2$ á menos 3, se escribe $+2-3=1$.

La sustraccion debe considerarse como una operacion cuyo fin es, conociendo la suma de dos números y uno de estos números, determinar el otro número que es la diferencia.

Dedúcese de esta definicion que, para obtener el resto de una sustraccion, basta escribir despues del número de que se sustrae, el número que se intenta sustraer ó sustraendo, tomado con un signo contrario á aquel de que está afectado; el resultado reducido á su mas simple espresion es el resto que se busca.

La multiplicacion tiene por fin de calcular un número producto, que esté compuesto con un número conocido, llamado multiplicando, de la manera que un número dado, llamado multiplicador, está compuesto con la unidad.

El signo del producto debiendo depender necesariamentede los signos de los factores, y de ninguna manera de sus valores numéricos, basta determinar el signo del producto en el caso en que el multiplicador sea un número entero. Partiendo de este principio, cuando el multiplicador tiene el signo $+$ el producto tiene el signo del multiplicando; pues el multiplicador, componiéndose de la adicion de muchas unidades, el producto debe componerse de la adicion de muchos números iguales al multiplicando, y se ha visto que la suma de muchos números del mismo signo está afectada del signo de estos número. Así:

$$(+2)\times(+3)=+6.(+2)\times(-3)=-6.$$

Cuando el multiplicador tiene el signo —, el producto tiene un signo contrario al del multiplicando; pues el multiplicador entero negativo, componiéndose de la sustraccion de muchas unidades, se formará el producto sustrayendo muchas veces el multiplicando; lo que equivale, como se ha visto, á hacer la suma de muchos números iguales al multiplicando, y afectados de un signo contrario al del multiplicando, y por consiguiente esta suma, que espresa el producto que se busca, estará afectada de un signo contrario al del multiplicando.

Por ejemplo, el producto de $(-3)(-2)=+6$.

La division tiene por fin, conociendo el producto de dos números llamado dividendo, y uno de estos números llamado divisor, hallar el otro llamado cuociente. De la definicion de la regla de los signos en la multiplicacion resulta que el cuociente de dos

números de los mismos signos tiene el signo $+$, y que el cuociente de dos números de signo diferente tiene el signo —. Por ejemplo

$$\frac{+6}{+2}=3,+\frac{-6}{-2}=+3,\frac{+6}{-2}=-3,\frac{-6}{+2},=-3.$$

§ IV.

De los logaritmos negativos.

Facil es ahora hacer ver que las dos progresiones descendente y ascendente, mas acá de cero y mas allá de cero y de uno, tienen las mismas propiedades en un caso que en otro, esto es, que el producto ó el cuociente de los dos términos de la progresion geométrica es siempre uno de los dos términos de esta progresion; pues, si ponemos la progresion bajo esta forma :

$$\frac{1}{10^4}:\frac{1}{10^3}:\frac{1}{10^2}:\frac{1}{10}:1:10:10^2:10^3:10^4-,$$

se halla que, por ejemplo, $\frac{1}{10^3}\times10^4=10$ que es uno de los términos, de la misma manera que 10^3, dividido por $\frac{1}{10}$, puesto que el cuociente iguala á 10^4.

Se ve de la misma manera, en la progresion aritmética, que la suma ó diferencia de dos términos cualquiera es siempre un término de la progresion; pues en la progresion

$$\cdot -5 \cdot -4 \cdot -3 \cdot -2 \cdot -1 \cdot 0 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot$$

la suma $-3+2=-1$, la diferencia $(-3)-(+2)=-5$ que tambien es un término.

Facil es de ver á la sola inspeccion que, en el sistema de los logaritmos determinado por estas dos progresiones, los números mayores que la unidad tienen logaritmos positivos que son tanto mayores cuanto mayores son estos números; mientras que los números positivos menores que la unidad, tienen logaritmos negativos que son tanto mayores cuanto mas pequeños son estos números.

Tambien es consecuencia que los números negativos no pueden tener logaritmos.

Esto es cuanto pienso oportuno decirte acerca de los logaritmos y de la aritmética en general; en mi próxima carta empezaré á tratar del algebra; pero como existe entre esta última ciencia grande analogía con la aritmética, te aconsejo que repases y recapacites maduramente las teorías y procederes espuestos.

ALGEBRA.

$$\cdot -5 \cdot -4 \cdot -3 \cdot -2 \cdot -1 \cdot 0 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot$$

la suma $-3+2=-1$, la diferencia $(-3)-(+2)=$ -5 que tambien es un término.

Facil es de ver á la sola inspeccion que, en el sistema de los logaritmos determinado por estas dos progresiones, los números mayores que la unidad tienen logaritmos positivos que son tanto mayores cuanto mayores son estos números; mientras que los números positivos menores que la unidad, tienen logaritmos negativos que son tanto mayores cuanto mas pequeños son estos números.

Tambien es consecuencia que los números negativos no pueden tener logaritmos.

Esto es cuanto pienso oportuno decirte acerca de los logaritmos y de la aritmética en general; en mi próxima carta empezaré á tratar del algebra; pero como existe entre esta última ciencia grande analogía con la aritmética, te aconsejo que repases y recapacites maduramente las teorías y procederes espuestos.

ALGEBRA.

CARTA DÉCIMA.

NOCIONES PRELIMINARES.

Amigo Eugenio, ahora vamos á emprender el estudio de una nueva ciencia matemática que trata de la cantidad de un modo mucho mas general que la aritmética. El algebra, cuyo estudio debe ocuparnos, es aquella parte de las matemáticas en que se emplea signos propios para generalizar y abreviar los razonamientos que consigo trae la resolucion de las cuestiones relativas á los números. Los principales elementos de que en esta ciencia se hace uso son :

1°. Las letras del alfabeto, que sirven á designar los números sobre los cuales se debe razonar, siendo su uso muy util ya sea para abreviar el razonamiento, ya sea para generalizarlo.

2°. El signo $+$ que se usa para señalar la adicion de dos ó mas números, y que se enuncia *mas*. Asi $a+b$ se enuncia a mas b.

3º. El signo —, que se enuncia *menos*, y que se emplea para señalar la sustraccion ó resta de dos números uno de otro. Así $a-b$ se enuncia a menos b.

4º. El signo de la multiplicacion, que es $\times$ ó un punto que se coloca entre las dos cantidades. Así $a\times b$ se enuncia a multiplicado por b; tambien puede escribirse $a.b$.

5º. El signo de la division que consiste en dos puntos :, que se colocan entre el dividendo y el divisor, ó bien aun en una raya ó línea — encima y debajo de la cual se coloca respectivamente el dividendo y el divisor. Asi $a:b$ ó $\frac{a}{b}$ se enuncia a dividido por b, ó el cuociente de a por b.

6º. El *coeficiente*, signo que se emplea para señalar la adicion de muchos números iguales; así en lugar de escribir $a+a+a+a$, que representa la adicion de cuatro números iguales á a, se escribe $4a$, 4 es el coeficiente; de modo que el coeficiente es un número particular escrito á la izquierda de otro número espresado por una ó muchas letras, y que señala cuantas veces se debe tomar la letra, ó el producto que representan las letras.

7º. El *esponente*, signo que se emplea cuando un número designado por otro debe entrar muchas veces como factor en un producto. Así en lugar de escribir $a\times a\times a\times a\times a$, se escribe a^5 que se pronuncia a cinco, ó a quinta potencia.

Llámase *potencia* el resultado de la multiplicacion de muchos números iguales y grado de

la potencia la cuotidad de números iguales multiplicados entre sí. El esponente es el signo de este grado; escríbese á derecha y un poco encima de una letra, y marca cuantas veces la cantidad espresada por esta letra debe tomarse como factor en un producto. Para dar á entender la importancia del esponente y del coeficiente, supongamos que se quiera espresar un producto compuesto de cinco factores iguales á a, de tres factores iguales á b, y de dos factores iguales á c; se escribirá $a^5\ b^3\ c^2$ en lugar de $aaaaa\ bbb\ cc$. Si despues se quiere espresar que este último resultado se ha de multiplicar por 8, ó se ha de repetir 8 veces, se escribe $8a^5\ b^3\ c^2$.

8º. El signo $\sqrt{\ }$ que precede á un número, cuando se quiere dar á entender que de este número se ha de estraer una raiz de un cierto grado. Así $\sqrt[4]{a}$ se enuncia cuarta raiz de a, $\sqrt[3]{a}$ se enuncia raiz cúbica de a.

Llámase raiz primera, segunda, etc., de un número, un segundo número que elevado á la primera, segunda, etc., potencia reproduce el primer número.

9º. El signo $=$ que espresa que dos cantidades son iguales. Así para espresar que el esceso de a sobre b es igual á c, escríbese $a-b=c$.

10º. El signo de desigualdad $>$, empleado para espresar que una cantidad es mayor que otra; así $a>b$ da á entender que a es mayor que b; $a<b$ quiere decir que a es menor que b.

Por medio de estos signos que acabo de esplicar se consigue encadenar las ideas en los razonamientos que deben hacerse en el algebra.

Llámase cantidad algebráica ó espresion algebráica, toda cantidad escrita en lenguage algebráico. Así $5a$ es la espresion algebráica del quintuplo del número a; $4a^2$ es la espresion algebráica del cuadruplo del cuadrado de a; $3a-5b$ es la espresion algebráica de la diferencia entre el triple de a y el quintuplo de b. Una espresion puede tener uno ó muchos términos. Llámase *monomio*, ó cantidad de un solo término, una cantidad algebráica que no se reune á otra por el signo de adicion ni sustraccion, y *polinomio*, una espresion compuesta de muchos términos separados los unos de los otros por los signos $+$ y $-$. Así $3a$, $5a^2$, $8a^4b^3c^2$ son monomios; $3a-5b$, $2a^2-3ab+b^2$ son polinomios. La primera de estas espresiones se llama un *binomio*, y la segunda *trinomio*, porque contienen la una dos términos y la otra tres.

El valor numérico de una espresion algebráica es el número que resultaría, si, dando valores particulares á las letras que la componen, se efectuase todas las operaciones aritméticas que comporta esta espresion. Este valor numérico depende evidentemente de los valores particulares atribuidos á las letras, y debe variar generalmente con estos valores; así $2a^3$ tiene por valor numérico 54, cuando se hace $a=3$. Digo generalmente; pues, en algunos casos, el valor numérico de una espresion algebráica no se altera, aunque se alteren las letras que la componen. Así en la espresion $a-b$, en tanto que se dará á a y á b valores ascendentes iguales la espresion no cambia. Sea por ejemplo $a=7$, $b=4$; resulta $a-b=3$. Sea si se quiere $a=12$, $b=9$, resulta tambien $a-b=3$.

El valor numérico de un polinomio cualquiera no se altera, aunque se invierta el orden de sus términos, con tal que se tenga cuidado de conservar á todos estos términos sus signos respectivos. Así $4a^3-3a^2b+5ac^2$ y $5ac^2-3a^2b+4a^3$ tienen el mismo valor numérico.

En general no se pone término delante del primer término de un polinomio que se supone precedido del signo $+$.

Llámase *dimension de un término* cada uno de los factores literales que componen este término, y *grado* el número de los factores ó dimensiones. El coeficiente no se cuenta por una dimension; así $3a$ se llama un término de una dimension, ó del primer grado ó lineario, $5ab$ es un término de dos dimensiones ó del segundo grado, y $8a^3b^2c$ es un término de 6 dimensiones ó de sesto grado. En general el grado de las dimensiones de un término, se estima por la suma de los esponentes de las letras que entran en este término.

Una letra que no tiene esponente se le supone tener 1 por esponente. Un polinomio es homogéneo cuando todos sus términos son del mismo grado $3a-5b+4c$, $8a^3b-4a^2b^2+6a^4$ son polinomios homogéneos.

Llámanse términos semejantes los términos que se componen de las mismas letras afectadas de los mismos esponentes. Así $8ab$, $3ab$, $7ab$ son términos semejantes, como $9a^2b^3c$, $13a^2b^3c$, $4a^2b^3c$. Cuando un polinomio contiene muchos términos semejantes, es susceptible de reduccion. Por ejemplo el polinomio $4a^2b-3a^2c+9ac^2-2a^2b+7a^2c-6b^3$ puede escribirse así: $4a^2b-2a^2b+7a^2c-3a^2c+9ac^2-6b^3$; y como $4a^2b-2a^2b$ se reduce á $2a^2b$ y $7a^2c-3a^2c$ se reduce á $4a^2c$, resulta que el polinomio se reduce á $2a^2b+4a^2c+9ac^2-6b^3$.

Para operar la reduccion de términos semejantes, fórmase un solo término aditivo de todos los términos semejantes precedidos del signo $+$; la que se efectua añadiendo los coeficientes de estos términos, y dando su suma por coeficiente á la parte literal comun; por el mismo medio se forma un solo término sustrativo de todos los términos precedidos del signo $-$; y se coloca la cantidad negativa inmediatamente despues de la cantidad positiva.

CARTA UNDÉCIMA.

DE LAS CUATRO OPERACIONES FUNDAMENTALES DEL ALGEBRA.

§ I.

De la adicion.

La adicion algebráica tiene por fin, dados dos polinomios ó monomios, hallar un polinomio único llamado suma, que presente el conjunto de las adiciones y sustracciones parciales indicadas por los signos $+$ y $-$, que afectan los términos de las cantidades propuestas.

Dedúcese de esta definicion que para sumar muchas cantidades, monomios y polinomios, basta colocar los términos de estas cantidades unos despues de otros con sus signos.

Por ejemplo para añadir $b-c$ á a, basta escribir $a+b-c$; pues la suma de las cantidades a y b, nomio $4a^2b-3a^2c+9ac^2-2a^2b+7a^2c-6b^3$ puede escribirse así: $4a^2b-2a^2b+7a^2c-3a^2c+9ac^2-6b^3$; y como $4a^2b-2a^2b$ se reduce á $2a^2b$ y $7a^2c-3a^2c$ se reduce á $4a^2c$, resulta que el polinomio se reduce á $2a^2b+4a^2c+9ac^2-6b^3$.

Para operar la reduccion de términos semejantes, fórmase un solo término aditivo de todos los términos semejantes precedidos del signo $+$; la que se efectua añadiendo los coeficientes de estos términos, y dando su suma por coeficiente á la parte literal comun; por el mismo medio se forma un solo término sustrativo de todos los términos precedidos del signo $-$; y se coloca la cantidad negativa inmediatamente despues de la cantidad positiva.

CARTA UNDÉCIMA.

DE LAS CUATRO OPERACIONES FUNDAMENTALES DEL ALGEBRA.

§ I.

De la adicion.

La adicion algebráica tiene por fin, dados dos polinomios ó monomios, hallar un polinomio único llamado suma, que presente el conjunto de las adiciones y sustracciones parciales indicadas por los signos $+$ y $-$, que afectan los términos de las cantidades propuestas.

Dedúcese de esta definicion que para sumar muchas cantidades, monomios y polinomios, basta colocar los términos de estas cantidades unos despues de otros con sus signos.

Por ejemplo para añadir $b-c$ á a, basta escribir $a+b-c$; pues la suma de las cantidades a y b, siendo $a+b$, si b disminuye de c, la suma $a+b$ debe disminuir de c, luego la suma de las cantidades a, $b-c$ es $a+b-c$.

Cuando las cantidades que se intenta adicionar encierran términos semejantes, se facilita las reducciones de que la suma es susceptible, escribiendo los términos semejantes unos debajo de otros con sus signos, y reduciendo cada grupo de términos semejantes. Por ejemplo para adicionar los tres polinomios $5a-7ab^2-8a^3+9-$, $4+9a^3+10ab^2$, $-7a-18ab^2$, ejecútase el cálculo de la manera siguiente :

$$\begin{array}{rl} & 5a-7ab^2-8a^3+9 \\ & +10ab^2+9a^3-4 \\ & -7a-18ab^2 \\ \hline \text{Suma.} & 2a-15ab^2+a^5+5; \end{array}$$

en la espresion reducida á la suma que se pide, el coeficiente de a es $5-7$ ó -2, el coeficiente de ab^2 es $-7+10-18-15$, el coeficiente de a^5 es $-8+9$ ó 1 ; y la parte enteramente numérica es $9-4$ ó $+5$.

Cuando se tiene un poco de costumbre, no hay necesidad de escribir los términos unos debajo de otros ; y se hace de seguida la reduccion.

§ II.

De la sustraccion.

Supongamos que se haya de sustraer $4b$ de $5a$, el resultado algebráico es $5a-4b$; de la misma manera, la diferencia entre $7a^2b^3$, y $4abc$ es $7a^2b^3-4abc$; y la de $8a4b$ y $5a4b-5a4b=5a4b$. Ahora supongamos que queremos restar $4b-5c$ de $4a$; puédese presentar el resultado de esta manera ; $4a-(4b-5c)$, poniendo la cantidad que debe sustraerse ó sustraendo entre dos paréntesis, y escribiéndolo despues de la primera cantidad con el signo $-$; pero muchas veces es preciso formar un solo polinomio de esta espresion, á cuyo fin, se observa que si a, b, c fueran números, se efectuaria la division indicada por $4b-5c$, y despues se sustraeria el resultado de $4a$; como esta resta no puede tener lugar en el estado actual de las cantidades, se empieza por restar $4b$ de $4a$, lo que da $4a-4b$; pero restando $4b$ unidades, se ha restado un número demasiado fuerte de $5c$ unidades; es preciso rectificar el resultado añadiendo $5c$; así se tiene $4a-4b+5c$ para el resultado de la sustraccion propuesta. Supongamos que tenemos el ejemplo siguiente : $5a^2-4ab+5bc-b^2$ que queremos restar de $8a^2-2ab$; esta operacion puede indicarse así : $8a^2-2ab-(5a^2-4ab+5bc-b^2)$; pero para reducir esta espresion á un solo polinomio, observemos que sustraer $5a^2 4ab+5bc-b^2$ equivale á sustraer la diferencia entre la suma $5a^2+5bc$ de los términos aditivos, y la suma $4ab+b^2$ de los términos sustractivos. Puédese empezar por restar $5a^2+5bc$, lo que da $8a^2-2ab-5a^2-5bc$, y como este resultado es necesariamente demasiado debil de $4ab+b^2$, es preciso añadir esta última cantidad, resultando $8a^2-2ab-5a^2-5bc+4ab+b^2$, mediante reduccion $5a^2+2ab-5bc+4b^2$; de lo que resulta esta regla general : para restar un polinomio de otro, se escribe el polinomio sustraendo del polinomio minuendo, cambiando los signos de aquel; se opera la reduccion del polinomio que queda si hay lugar para ello de lo cual resulta que

$$\left.\begin{array}{r} 5a^3-4a^2b+3b^2c \\ -(3a^2b-3a^3 \quad 8b^2c) \end{array}\right\}=8a^3-7a^2b+11b^2c.$$

§ III.

De la multiplicacion.

Demuéstrase en aritmética que el producto de dos ó mas números no se altera, sea cual sea el orden con que se multipliquen. Así $5\times4\times3=4\times5\times3$. Lo mismo sucede en las cantidades literales; $a\times b\times c=a\times c\times b$.

Establecido esto, la multiplicacion es muy sencilla. En efecto, trátese, por ejemplo, de multiplicar el monomio $4a^3b^2$ por $5a^2bc$; la espresion de este producto puede escribirse así: $4a^3b^2\times5a^2bc$; pero observarémos que $4a^3b^2=4aaabb$ y $5a^2bc=5aabc$; luego se tiene $4a^3b^2\times5a^2bc=4aaabb\times5aabc$; mas como, segun he demostrado, se puede invertir el orden de los factores, equivale á $4\times5aaaaabbbc$; y como los coeficientes son números particulares, nada impide formar uno solo multiplicándolos entre sí, lo que da 20 por coeficiente del producto. En cuanto á letras, el producto $aaaaa$ equivale á a^5, y el producto bbb á b^3; de modo que el resultado final es

$20a^5b^3c$. Resulta que puede establecerse la regla siguiente; para multiplicar dos monomios uno por otro, se deberá 1° multiplicar los dos coeficientes entre sí; 2° escribir despues de este producto todas las letras que entran á la vez en el multiplicando y el multiplicador, afectando cada letra de un esponente igual á la suma de los dos esponentes de que está afectada esta misma letra en ambos factores; 3° si una letra entra solamente en uno de los factores, escribirla en el producto con el esponente de que está afectada en este factor.

Dedúcese de esta regla que $7a^3b^4c\times9a^5b^2c^3d=63a^8b^6c^4d$. $15a^2b^3c^2d\times4a^3bcd^3g=60a^5b^4c^3d^4g$.

Pasemos ahora á la multiplicacion de los polinomios. Supongamos que tenemos dos polinomios $a+b+c$ y $d+f$, compuestos de términos aditivos; puédese presentar el producto bajo la forma de $(a+b+c)\ (d+f)$; pero se trata de desarrollar este producto. Es evidente que multiplicar la suma $a+b+c$ por $d+f$ equivale á tomar ó repetir $a+b+c$ tantas veces cuantas unidades hay en d, y despues tantas veces cuantas unidades hay en f, y añadir los dos productos; pero multiplicar $a+b+c$ por d es tomar d veces cada una de las partes del multiplicando, y reunir los productos parciales, lo que da $ad+cd$; de la misma manera multiplicar $a+b+c$ por f equivale á tomar f veces cada una de las partes del multiplicando, y reunir los productos parciales, lo que da $af+bf+cf$, que deben ser añadidos á $ad+bd+cd$; el producto será por consiguiente $af+bf+cf+ad+bd+cd$. Así, para multiplicar dos polimonios compuestos de muchos términos todos aditivos, es preciso multiplicar separadamente cada uno de los términos del multiplicando por cada uno de los términos del multiplicador y añadir los productos.

Si estos términos estan afectados de coeficientes y de esponentes se sigue las mismas reglas prescritas para la multiplicacion del monomio. Por ejemplo, $(5a^2+4ab+b^2)(2a+5b)$ dan por producto $6a^3+8a^2b+2ab^2+15a^2b+20ab^2+5b^3$, mediante reduccion de $6a^3+23a^2b+22ab^2+5b^3$. Para comprender el caso mas general, os haré presente que si el multiplicando contiene términos aditivos y términos sustrativos, este factor espresa una diferencia entre el número de las unidades marcada por la suma de los términos sustractivos; y que con respecto al multiplicador hay que hacer el mismo razonamiento, de lo que resulta que la multiplicacion de dos polinomios cualesquiera, se reduce á la multiplicacion de dos binomios tales como $a-b$, $c-d$; a designando la suma de los términos aditivos y $-b$, la suma de los términos sustractivos del multiplicando; lo mismo hay que decir de c y de $-d$, relativamente al multiplicador, luego hay que multiplicar $a-b$, $c-d$. Multiplicar $a-b$ por $c-d$ equivale á tomar ó repetir $a-b$ tantas veces cuantas unidades hay en c, menos tantas veces cuantas unidades hay en d; ó bien á multiplicar $a-b$ por c, y á sustraer del producto el de $a-b$ por d. Multiplicando $a-b$ por c, se logra $ac-bc$. En efecto el producto de a por c siendo ac, si el multiplicando disminuye de b, el producto disminuirá de c veces b ó de bc; el producto de $a-c$ por c es pues $ac-bc$. De la misma manera, el producto $a-b$ por d es $ad-bd$; y como este último producto debe ser restado del precedente $ac-bc$, es preciso cambiar los signos de $ad-bd$, y escribirlo despues de $ac-bc$, lo que da $(a-b)(c-d)=ac-bc-ad+bd$.

Para poner mas orden en la formacion del producto, y para facilitar las reducciones de que puede ser susceptible este producto, se acostumbra á ordenar los factores con relacion á una sola letra.

Por ejemplo, supongamos que tenemos que multiplicar

$$
\begin{array}{l}
a^5-ba^2+b^2a-b^5 \text{ por} \\
5a^2 \quad 5ba-4b^2 \\
\hline
5a^5-5ba4+5b^2a^5-5b^3a^2.\ 1^{er} \text{ producto.} \\
\quad -5ba4+5b^2a^5-5b^5a^2+5b4a.\ 2^{o} \text{ producto.} \\
\qquad -4b^2a^3+4b^5a^2-4b4a+4b^5.\ 5^{er} \text{ producto.} \\
\hline
\text{Prod}^{o}.\ 5a^5-6ba4+2b^2a^3-2b^5a^2-b4a+4b^5.
\end{array}
$$

La multiplicacion del multiplicando por el primer término $5a^2$ del multiplicador ha dado el primer producto parcial; multiplicando el multiplicando por el segundo término $-5a$ del multiplicador, se ha logrado el segundo producto parcial, y se ha cerrado el tercer producto parcial multiplicando todo el multiplicando por el término $4b^2$ del multiplicador; se ha colocado los términos semejantes unos debajo de otros y la suma de los productos parciales reducida á su última espresion, ha dado el producto total.

La regla de los signos puede enunciarse así: todas las veces que los dos términos del multiplicando y el multiplicador estén afectados del mismo signo, el producto correspondiente está afectado del signo $+$, y cuando los dos términos están afectados de los signos contrarios, el producto está afectado del signo $-$. Dícese aun, en lenguage algebráico, que $+$ multiplicado por $+$, ó $-$ multiplicado por $-$ da $+$, y que $+$ multiplicado por $-$ da menos.

De todo lo espuesto puede deducirse la siguiente regla : para multiplicar dos polinomios uno por otro, se deberá multiplicar sucesivamente cada término del multiplicando por cada término del multiplicador, dando el signo $+$ al producto de dos términos del mismo signo, y el signo $-$ al producto de dos términos afectados de signos contrarios.

Mas sobre este asunto pienso hacerte dos observaciones.

1ª Si los polinomios que se quieren multiplicar son homogéneos, el producto de estos dos polinomios es tambien homogéneo, consecuencia evidente de las reglas relativas á las letras y á los esponentes en la multiplicacion de las cantidades monomias. Ademas, el grado de cada término del producto debe ser igual á la suma de los grados de dos términos cualesquiera del multiplicando y multiplicador.

2ª Cuando en la multiplicacion de dos polinomios el producto no ofrece reduccion de términos semejantes, el número total de los términos del producto es igual al producto del número de los términos del multiplicando, multiplicado por el número de términos del multiplicador. Así, si se tiene 7 términos

en el multiplicando y 3 en el multiplicador, habrá 7×3 ó 21 en el producto. Cuando hay términos semejantes, el número de los términos del producto simplificado puede ser menor; pero se observará que entre los diferentes términos del producto los hay que no pueden reducirse con ningun otro; y son 1° el término procedente de la multiplicacion del término del multiplicando, afectado del mas alto esponente de cualquiera de las letras, por el término del multiplicador afectado del mas alto esponente de la misma letra; 2° el término procedente de la multiplicacion de dos términos afectados del mas debil esponente de la misma letra.

Muchas veces sucede que se necesita conocer el cuadrado de un binomio de la forma $a+b$. Formar el cuadrado de un binomio, es multiplicarlo por sí mismo, y resulta $(a+b)^2=(a+b)\ (a+b)=a^2+ab+^2$ b^2, es decir que el cuadrado de la suma de dos cantidades se compone del cuadrado de la primera, mas del cuadrado de la segunda, mas del doble del producto de la primera por la segunda.

De la misma manera $(a-b)^2=(a-b)\ (a-b)=a^2-2ab+b^2$, espresion que solo difiere de la precedente por el signo de $2ab$.

§ IV.

De la division.

La division tiene por objeto, conocido un producto y uno de sus factores hallar el otro factor.

Examinemos esta operacion en los monomios. Supongamos que tenemos que dividir $28a7$ por

$4a^3$, lo que se escribe $\frac{28a7}{4a^3}$; es preciso encontrar un tercer monomio que multiplicado por $4a^3$, reproduzca $28a7$; es preciso pues que el coeficiente del monomio que se busca sea tal, que multiplicado por 4, dé 28, y que el esponente de a en el cuociente añadido al esponente 3 de a en el divisor dé 7; y como solo el número 7 multiplicado por 4 da 28, y no hay mas que 4, que añadido á 3, pueda dar 7, síguese que el coeficiente de a en el cuociente es 7 y su esponente es 4, de modo que se tiene $\frac{28a7}{4a^3}=7a4$; y en efecto, se tiene $7a^4+4a^3=28a7$. Se tiene tambien, segun las mismas observaciones $\frac{15a^4b^3c}{3ab^2}=5a^3bc$. De lo que resulta, que para dividir los monomios uno por otro, es preciso: 1° dividir los dos coeficientes uno por otro; 2° escribir cada una de las letras comunes al dividendo y al divisor al lado del coeficiente, dándole un esponente igual á la diferencia del esponente del dividendo y el divisor; 3° escribir despues y con sus esponentes respectivos, las letras que entran en el dividendo sin entrar en el divisor.

Puede suceder que los esponentes de ciertas letras sean las mismas en el dividendo y en el divisor; si, por ejemplo se tuviese que dividir $25a^4b^2$ por $5a^3b^2$, como la letra b tiene el mismo esponente, el cuociente no debe contenerlo, y resulta $\frac{25a^4b^2}{5a^3b^2}$ $=5a$.

Pero el cuociente $5a$ puede ponerse bajo una forma que pueda conservar la traza de la letra b; en efecto segun la regla establecida, $\frac{b^2}{b^2}=b^0$. Este nuevo símbolo b^0 indica que la letra b entra 0 veces como factor en el cuociente, pero tambien indica que entraba en el dividendo y en el divisor, y que ha desaparecido por efecto de la operacion, siendo por otra parte facil de ver que $b^0=1$, pues $b^0=\frac{b^2}{b^2}$ y toda cantidad dividida por sí misma da 1. Resulta pues $b^0=1$; asi toda cantidad afectada de un esponente cero es igual á uno. Hay casos en que es imposible efectuar la division de dos monomios: 1° cuando los coeficientes no son divisibles uno por otro; 2° cuando en ciertos esponentes el divisor supera al dividendo; y en fin cuando el divisor contiene una ó muchas letras que no entran en el dividendo, en cuyo caso el monomio queda bajo la forma fraccionaria que muchas veces puede simplificarse.

Sea, por ejemplo: $12a^4b^3cd$ que debe dividirse por $8a^2b^2cf$, el cuociente se presenta bajo la forma $\frac{12a^4b^3cd}{8a^2b^2cf}$: esta espresion puede simplificarse. Si se observa que los factores 4, a^2, b^2 y c, siendo comunes á los dos términos de esta fraccion, nada impide suprimirlos; y se tiene por resultado $\frac{3a^2bd}{2cf}$.

Para simplificar un número fraccionario, se suprime el mayor factor comun á los dos coeficientes, se quita el menor esponente de una misma letra, del mayor, y se escribe la letra, afectada de esta diferencia de esponentes, en el término de la fraccion cuyo esponente sea mayor, y por último se escribe las letras no comunes, con sus esponentes respectivos en el término de la fraccion en que entraban estas letras.

§ V.

Division de los polinomios.

La division de los polinomios tiene por fin buscar un tercer polinomio que multiplicado con el segundo, reproduzca el primero; de manera que si A designa un polinomio dividendo, B el polinomio divisor, y ♀ el cuociente, se tiene: B×♀=A. De lo dicho resulta, y de la regla de la multiplicacion de los polinomios, que el dividendo A es el conjunto, por adicion y despues de reduccion, de los productos parciales de cada uno de los términos del divisor B, multiplicados por cada uno de los términos del cuociente ♀ que se busca. Si se pudiese descubrir en el dividendo A un término que proviniese sin reduccion, de la multiplicacion, de uno de los términos del divisor B por uno de los términos del cuociente ♀, entonces, dividiendo uno por otro estos dos términos del dividendo y el divisor, se estaria cierto de lograr un término del cuociente.

Segun la segunda observacion que he hecho sobre la multiplicacion, el término afectado del mas

alto esponente de una cierta letra en el producto, jamas se reduce con los otros; de manera, que si se divide este término por el del divisor que tiene el mas fuerte esponente de la primera letra, se estará cierto de tener un término del cuociente. Para mayor claridad, sea, por ejemplo, $15a^4$ el término de A, en el cual la letra a tiene el mas fuerte esponente, y sea $-5a^2$, el del divisor B, en el cual es mayor el esponente es el de a; el término $15a^4$ proviene sin reduccion de la multiplicacion de los dos términos del divisor ó del cuociente del mas fuerte esponente de la misma letra a; luego dividiendo $15a^4$ por $-5a^2$, se tendrá un término del cuociente que se busca; pero es preciso determinar el signo de que debe estar afectado el cuociente.

Este signo no puede ser otro que —; pues es preciso, que multiplicado por —, dé +; y solo hay — que, multiplicado por —, dé +. Luego $-5a^2$ es un término del cuociente buscado. Despues de haberlo puesto debajo del divisor B, se multiplica cada uno de los términos del divisor por $-5a$, despues se sustrae el producto del dividendo A, lo que se hace escribiendo este producto con signos contrarios debajo del dividendo, y operando su reduccion; de esta manera se logra un primer resto B, que se considera como un nuevo dividendo con el cual se opera como con el polinomio A propuesto, y así sucesivamente, siendo cada vez mas facil la operacion, si son ordenados los polinomios A y B, con relacion á una misma letra.

Un ejemplo hará claro este proceder, pero es preciso antes establecer generalmente la regla de los signos de la division. Como en la multiplicacion, el producto de dos términos de mismo un signo está afectado del signo $+$, y que el producto afectado del signo contrario es $-$, puede decirse: 1º que si el término del dividendo tiene el signo $+$, y el del divisor el signo $+$, el término del cuociente debe tener el signo $+$; 2º que si el término del dividendo tiene el signo $+$, y el término del divisor el signo $-$, ó el término del dividendo el signo $-$ y el del divisor el signo $+$, el término del cuociente debe tener el signo $-$; enfin si el dividendo tiene el signo $-$ y el divisor el signo $-$, el cuociente debe tener el signo $+$; lo que equivale á decir, que si los dos términos del dividendo y del divisor son del mismo signo, el cuociente debe ser afectado del signo $+$; y si son de signo contrario, el cuociente debe ser afectado del signo $-$.

Examinemos los dos polinomios.

$$
\begin{array}{l|l}
\qquad\qquad \text{A} & \qquad \text{B} \\
\quad a^5-5ba^4+5b^2a^3+3b^3a^2 & a^3-3ba^2 \\ \cline{2-2}
-a^5+3ba^4 & a^2-2ba-b^2 \\ \hline
\text{R.}-2ba^4+5b^2a^3+3b^3a^2 & \\
\qquad 2ba^4-6b^2a^3 & \\ \cline{1-1}
\text{R}'.-b^2a^3+3b^3a^2 & \\
\qquad b^2a^3-3b^3a^2 & \\ \cline{1-1}
\qquad\quad 0 &
\end{array}
$$

Los dos polinomios están ordenados con relacion á la letra a; es decir que el esponente de la letra ha ido menguando en el dividendo y divisor; se ha dividido a^5 por a^3, lo que ha dado el término a^2 del

cuociente y despues se ha efectuado el producto de (a^3-3ba^2) por a^2, y se ha quitado del polinomio dividendo, lo que ha dado el resto R, cuyo resto se ha considerado como un nuevo dividendo ordenado con relacion á la misma letra a. Se ha dividido su primer término $-2ba^4$ por a^3, lo que ha dado el término $-2ba$ del cuociente; se ha hecho el producto del divisor por este nuevo término del cuociente, y se ha restado de R, lo que ha dado el resto R′, que se considera tambien como un nuevo dividendo ordenado con relacion á la letra a: dividiendo su primer término $-b^2a^3$ por a^3, se logra el término $-b^2$ del cuociente; haciendo el producto del divisor por $-b^2$, y restando este producto de R′, resulta, 0 lo que prueba que $a^2-2ba-b^2$ es el cuociente exacto de la division de los dos polinomios propuestos. Haciendo el producto del cuociente por el divisor, resulta el polinomio dividendo.

De lo dicho resulta la regla de la division que puede enunciarse así: se ordena el dividendo y el divisor con relacion á una misma letra, se divide el primer término del dividendo por el primer término del divisor, el resultado será el primer término del cuociente. Se resta del dividendo el producto del divisor por el primer término del cuociente, y se obtiene un primer residuo; se divide el primer término de este primer residuo por el primer término del divisor, el resultado será el segundo término del cuociente, y así sucesivamente.

Sobre este punto, te haré como relativamente á la multiplicacion algunas observaciones.

1º Hemos dicho que es preciso arreglar el dividendo y el divisor con relacion á una misma letra; pero puede suceder que uno de los polinomios propuestos ó ambos contengan muchos términos afectados de una misma potencia de la letra con relacion á la cual se quiere arreglar; esto complica un poco la division, pero la regla establecida es siempre la misma.

Sea $Ma^4+Na^3+Pa^2+Ra+V$ el dividendo, y $M'a^2+N'a+P'$ el divisor.

Cada uno de los coeficientes M, N, P, Q, M', N', P', designa el conjunto de muchos términos. Así Ma^4 representa toda la parte del dividendo afectada de a^4, y así de los otros. Establecido esto, puesto que el mayor esponente de a es 4 en el dividendo, y 2 en el divisor, debe tambien ser igual á 2 en el cuociente que afecta entonces la forma Aa^2+Ba+C. Para determinar la parte de este cuociente afectada de la mas alta potencia, se repara que el producto de las dos partes Aa^2 y $M'a^2$ no puede esperimentar ninguna reduccion con los otros productos del divisor por el cuociente, y, por consiguiente, debe ser igual á la parte Ma^4 del dividendo afectada de la mas alta potencia.

Luego recíprocamente si se divide Ma^4 por $M'a^2$, se deberá tener la parte Aa^2 del cuociente; lo que equivale á dividir A por A', puesto que a^4, dividido por a^2, da a^2; lograda la parte Aa^2, se multiplica cada una de las partes del divisor por Aa^2 y se resta á proporcion los productos parciales que se obtiene; lo que da un primer resto con el cual se opera como con el polinomio propuesto.

2° Para dividir un polinomio por una cantidad

independiente de la letra con relacion á la cual se ha ordenado este polinomio, basta efectuar la division en cada uno de los coeficientes de esta letra.

Trátese, por ejemplo, de dividir $(b^2-c^2)a^3+(b^4-c^4)a^2+5(b+c)\,a$ por $b+c$. Divídese cada uno de los coeficientes $b^2-c^2, b^4-c^4,,$ por $b+c$; los cuocientes siendo $b-c$, $b^3-cb^2+c^2b-c^3$, $5a$; el cuociente total es:

$$(b-c)a^3+(b^3-cb^2+c^2b-c^3)a^2+5a.$$

dendo y el divisor con relacion á una misma letra; pero puede suceder que uno de los polinomios propuestos ó ambos contengan muchos términos afectados de una misma potencia de la letra con relacion á la cual se quiere arreglar; esto complica un poco la division, pero la regla establecida es siempre la misma.

Sea $Ma^4+Na^3+Pa^2+Ra+V$ el dividendo, y $M'a^2+N'a+P'$ el divisor.

Cada uno de los coeficientes M, N, P, Q, M', N', P', designa el conjunto de muchos términos. Así Ma^4 representa toda la parte del dividendo afectada de a^4, y así de los otros. Establecido esto, puesto que el mayor esponente de a es 4 en el dividendo, y 2 en el divisor, debe tambien ser igual á 2 en el cuociente que afecta entonces la forma Aa^2+Ba+C. Para determinar la parte de este cuociente afectada de la mas alta potencia, se repara que el producto de las dos partes Aa^2 y $M'a^2$ no puede esperimentar ninguna reduccion con los otros productos del divisor por el cuociente, y, por consiguiente, debe ser igual á la parte Ma^4 del dividendo afectada de la mas alta potencia.

Luego recíprocamente si se divide Ma^4 por $M'a^2$, se deberá tener la parte Aa^2 del cuociente; lo que equivale á dividir A por A', puesto que a^4, dividido por a^2, da a^2; lograda la parte Aa^2, se multiplica cada una de las partes del divisor por Aa^2 y se resta á proporcion los productos parciales que se obtiene; lo que da un primer resto con el cual se opera como con el polinomio propuesto.

2° Para dividir un polinomio por una cantidad

independiente de la letra con relacion á la cual se ha ordenado este polinomio, basta efectuar la division en cada uno de los coeficientes de esta letra.

Trátese, por ejemplo, de dividir $(b^2-c^2)a^3+(b^4-c^4)a^2+3(b+c)\,a$ por $b+c$. Divídese cada uno de los coeficientes b^2-c^2, b^4-c^4,, por $b+c$; los cuocientes siendo $b-c$, $b^3-cb^2+c^2b-c^3$, $3a$; el cuociente total es:

$$(b-c)a^3+(b^3-cb^2+c^2b-c^3)a^2+3a.$$

CARTA DUODÉCIMA.

FRACCIONES LITERALES O ALGEBRAICAS.

Amigo Eugenio, en la presente me estenderé mucho menos que en la anterior, siendo mi objeto tratar sucintamente la cuestion que nos ocupa.

Ejecútase en las fracciones algebráicas las mismas operaciones que en las fracciones aritméticas. Así, una fraccion cualquiera no cambia de valor cuando ambos sus términos se multiplican ó dividen por una misma cantidad.

Sea, por ejemplo, la fraccion $\frac{a}{b}$, cuyo cuociente podemos representar por q, de manera que resulta $\frac{a}{b}=q$; pero el dividendo a siendo igual al producto del divisor por el cuociente, se tiene : $a=bq$: de lo que se deduce $a\times m=bq\times m=b\times m\times q$, de lo que resulta $q=\frac{a\times m}{b\times m}$; pero q es ya igual á $\frac{a}{b}$, luego $\frac{a}{b}=\frac{a\times m}{b\times m}$, lo que demuestra el principio enunciado.

Este principio se emplea para reducir diversas fracciones á un comun denominador; á este objeto basta multiplicar los dos términos de cada una de ellas por el producto de los denominadores de las otras.

Por ejemplo las fracciones $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f}, \frac{p}{q}$, reducidas á un comun denominador, se vuelven

$$\frac{adfq}{bdfq},\ \frac{cbfq}{bdfq},\ \frac{ebdq}{bdfq},\ \frac{pbdf}{bdfq}.$$

Cuando se halla un denominador multíplice de todos los otros, la operacion puede simplificarse; sean, por ejemplo, las fracciones

$$\frac{5x}{12},\ \frac{4}{5},\ \frac{7x}{9}.$$

Para reducirlas á un mismo denominador, obsérvase que 36 es multíplice de 12, 3 y 9. Se dividirá, pues, 36 por cada uno de los denominadores, y se multiplicará los numeradores por los diferentes cuocientes obtenidos. Entonces las fracciones reducidas serán

$$\frac{15x}{36},\ \frac{48}{36},\ \frac{28x}{36}.$$

Para sumar las fracciones, es preciso reducirlas á un mismo denominador si no lo están; en cuyo caso no queda mas que añadir los nuevos numeradores y dar á la suma el denominador comun.

Así $\frac{ab}{4}+\frac{3}{c}+\frac{5d}{7}$ equivale á $\frac{7abc+84+20cd}{28c}$

y que $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}+\frac{\varepsilon}{f}=\frac{adf+cbf+\varepsilon bd}{bdf}$.

La sustraccion de dos fracciones del mismo denominador se efectua tomando la diferencia entre los numeradores, y afectándola del denominador comun.

$$\text{Así } \frac{a}{b}-\frac{c}{b}=\frac{a-c}{b}.$$

Cuando las fracciones no tienen el mismo denominador, será preciso reducirlas á un comun denominador.

En la multiplicacion de muchas fracciones, el producto se espresa por una fraccion, cuyo numerador es el producto de los numeradores de las fracciones propuestas, y cuyo denominador es el producto de los denominadores de las mismas fracciones.

Sea por ejemplo $\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}\times\frac{\varepsilon}{f}$. Poniendo $\frac{a}{b}=m$, $\frac{c}{d}=n$, $\frac{\varepsilon}{f}=p$, se tendrá $a=bm$, $c=dn$, $\varepsilon=pf$, de lo que resulta $a\times c\times\varepsilon=bmdn\times pf=mnh\times bdf$; por consiguiente $mnp=\frac{a\times c\times\varepsilon}{bdf}$. Lo que demuestra el principio enunciado.

En efecto supongamos que tenemos que dividir

$\frac{a}{b}$ por $\frac{c}{d}$; redúcese estas fracciones á un comun denominador, resultando la division $\frac{ad}{bd}$ por $\frac{bc}{bd}$, lo que equivale á dividir ad por bc, pues el cuociente no se altera cuando se multiplica el dividendo y el divisor por bd; luego el cuociente que se pide es $\frac{ad}{bc}$ ó $\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}$. Lo que demuestra el principio enunciado.

Cuando se quiere dividir una fraccion por un número entero, basta multiplicar el denominador de la fraccion por el número entero.

$$\text{Así } \frac{a}{b}:c=\frac{a}{bc}.$$

Para reducir un número entero en una fraccion que tenga un denominador dado, basta multiplicar el entero por el denominador dado.

Así $a=\frac{a\times b}{b}$; esto sirve á convertir en una sola espresion fraccionaria uno ó muchos monomios juntos á una fraccion.

Así $a\times\frac{b}{c}=\frac{ac+ba}{c}$, $\frac{a}{b}+c+d=\frac{a+cb+bd}{b}$,

de la misma manera

$$a^2-a+1+\frac{2}{a+1}=\frac{2+(a+1)(a^2-a+1)}{a+1}=\frac{a^3+3}{a+1}.$$

Terminaré esta carta observándote, que segun que los dos términos de una fraccion son los mismos ó contrarios, esta fraccion es positiva ó negativa; por consiguiente, una fraccion conserva su valor y su signo, cuando se cambia los signos de sus dos términos, y cambia de signo, sin cambiar de valor absoluto, cuando solo se cambia el signo del numerador ó del denominador.

CARTA DÉCIMATERCIA.

DE LAS ECUACIONES DEL PRIMER GRADO.

Amigo Eugenio, el asunto que actualmente debe ocuparnos es el analisis algebráico ó teoría de las ecuaciones.

Las igualdades que solo tienen lugar en ciertos valores particulares de las letras que contienen son ecuaciones; las igualdades que subsisten, sea cual sea el valor de las letras que contienen, son identidades. Así la igualdad $5+a=9$ es una ecuacion; pues solo tiene lugar cuando se supone $a=4$, y la igualdad $4a+1=4a+1$ es una identidad; pues tiene lugar sea el que sea el valor de a. Las dos cantidades separadas por el signo $=$ son los dos miembros de la ecuacion; la cantidad colocada á izquierda es el primer miembro, y la colocada á la derecha es el segundo miembro. Los términos separados por el signo $+$ y $-$ son los términos de la ecuacion.

Se dice que una ecuacion es *numérica* cuando las incógnitas solo están combinadas con números dados, y se llama *literal* cuando las cantidades conocidas son representadas por letras. Así, la ecuacion $4x-5y=5$ es numérica, y la ecuacion $ax+b=c$ es literal. Cuando cantidades numéricas ó literales, puestas en lugar de las incógnitas, hacen una ecuacion idéntica, estas cantidades forman lo que se llama un sistema de valores de las incógnitas, ó una solucion de ecuacion. Así, la ecuacion $4x=12$ volviéndose idéntica si en lugar de x se pone 3, se dice que $x=3$ satisface la ecuacion. Una ecuacion es del *primer grado* cuando la incógnita se halla en el primer grado.

Tratemos por ahora de las ecuaciones de primer grado de una sola incógnita.

Las trasformaciones que se imprimen á las ecuaciones se fundan en las dos propiedades siguientes :

1° Cuando á dos cantidades iguales se añade la misma cantidad, las sumas son iguales.

2° Cuando de dos cantidades iguales se resta una misma cantidad, los restos son iguales.

3° Multiplicando dos cantidades iguales por una cantidad los productos son iguales.

4° Si se divide dos cantidades iguales por una misma cantidad, los cuocientes son iguales.

De estos principios, aplicados á los números de una ecuacion, resulta un medio de deducir otras ecuaciones que todas se satisfacen, por el mismo valor de la incógnita, y que conducen al valor de esta incógnita.

Sea, por ejemplo, la ecuacion $x+a=b$.

Si de dos cantidades iguales á $x+a,b$, se quita a, los restos $x,b-a$ serán iguales ; luego $x=b-a$. Resulta que para hacer pasar un término de un miembro de una ecuacion á otra, basta borrar este término en el miembro en que se halla, y escribirlo en el otro miembro con un signo contrario ; es decir con el signo — si tenia el signo +, y con el signo + si tenia el signo —.

A veces la incógnita se halla combinada por multiplicacion ó division. Sea por ejemplo, la ecuacion $ax=b$. Divídese sus dos miembros por a, lo que da $x=\frac{b}{a}$; por consiguiente, cuando el primer miembro de una ecuacion, no conteniendo sino la incógnita afectada de un cierto coeficiente, el segundo término solo contiene cantidades conocidas, el valor de la incógnita se obtiene dividiendo el segundo miembro por el coeficiente de la incógnita. Así de la ecuacion $3x=a+b$, se saca $x=\frac{a+b}{3}$.

Supongamos ahora que tenemos la ecuacion $\frac{x}{a}=b$; la multiplicacion de estos dos miembros por a da $x=a+b$. Por consiguiente, cuando el primer miembro de una ecuacion no contiene mas que la incógnita dividida por una cantidad conocida, y el segundo término es una cantidad conocida, se logra el valor de la incógnita multiplicando el segundo miembro por la cantidad que servia de divisor á esta incógnita.

Así de la ecuacion $\frac{x}{5}=3$, se saca $x=3+5=15$.

Supongamos que tenemos que resolver la ecuacion $\frac{ax}{b}-c=\frac{dx}{e}-\frac{p}{q}$.

Lo primero que se hace es hacer desaparecer el denominador segun el proceder conocido, y la ecuacion resulta.

$$\frac{aeqx-cbeq}{beq}=\frac{dbqx-bpe}{beq}.$$

Despues multiplicando los dos miembros por beq, resulta $aeqx-cbeq=dbqx-bpe$.

Despues haciendo pasar en un mismo miembro los términos afectados de la incógnita x, y los otros en el otro miembro, y haciendo los cambios de signos ya indicados, la ecuacion propuesta se cambia en $aeqx-dbqx=cbeq-bpe$ y poniendo x como único factor, $x(aeq-dbq)=cbeq-bpe$.

Esta última ecuacion es facil de resolver, pues puede reducirse á la forma $ax=b$; da por resultado $x=\frac{cebq-bpe}{aeq-dbq}$.

Ahora bien, supongamos que tenemos la ecuacion $\frac{4x}{3}-\frac{5}{9}x+4=\frac{x}{5}$; efectuando la reduccion al comun denominador se tiene la ecuacion

$$\frac{4\times9\times5\times x-5\times5\times3x+4\times3\times9\times5}{3\times9\times5}=\frac{3\times9\times x}{3\times9\times5}.$$

Efectuando las operaciones indicadas, multiplicando los dos miembros por $3\times9\times5$, se cambia en

$$180x-75x+540=27x.$$

Pasando el término $27x$ en el primer miembro, y la cantidad numérica 540 en el otro, se tiene :

$180x-75x-27x=-540$, de lo que resulta $x(180-75-27)=-540$.

Las cantidades entre paréntesis se reducen á 78; luego se tiene $78x=-540$, de lo que resulta $x=\frac{540}{78}$.

Algunas veces puédese hacer desaparecer los denominadores de una manera mas sencilla, como ya observé hablando de las fracciones, y á esta operacion es preciso tener recurso cuando es posible. Por ejemplo, supongamos que tenemos la ecuacion.

$$\frac{2x}{3}-\frac{3}{4}=11+\frac{x}{5}.$$

Se observa que 60 es multíplice mas pequeño de los denominadores 3, 4, 5, por lo cual se podrá tomar 60 por denominador comun, y dividiendo este denominador comun por cada uno de los denominadores, y multiplicando por 11, la ecuacion se cambiará en

$$\frac{40x}{60}-\frac{45}{66}=\frac{11\times60}{60}+\frac{12x}{60}.$$

Multiplicando todos los términos por 60, y poniendo á un lado los términos que contienen x y á otro las cantidades que no contienen x, resulta

$$40x-12x=660+45, \text{ y por consiguiente,}$$
$$28x=705$$
$$x=\frac{705}{28}$$

Operando de la misma manera, se halla que el valor de x sacado de la ecuacion $\frac{5x}{6}-\frac{2}{15}=\frac{7x}{9}+\frac{8}{15}$ es igual á 12, y que el valor de x sacado de la ecuacion $\frac{5x}{12}-\frac{4x}{5}-15=\frac{7}{8}-\frac{15x}{6}$ es igual á $\frac{111}{10}$.

En general, para resolver una ecuacion de primer grado de una sola incógnita, se hace pasar todos los términos que encierra la incógnita en el primer miembro, y los términos conocidos en el segundo; redúcese cada miembro á su mas simple espresion, y se quita los denominadores; de lo que resulta una ecuacion cuyo primer término solo contendrá la incógnita afectada de un cierto coeficiente, y cuyo segundo término será una cantidad conocida; el valor de la incógnita se logrará dividiendo el segundo miembro de la nueva ecuacion por el coeficiente de la incógnita.

Toda ecuacion algebráica puede considerarse como la espresion de las condiciones de un problema.

Para enunciar este problema del modo mas sencillo, basta traducir la ecuacion propuesta en lenguage ordinario. Así la ecuacion $4x-5=7$ es la traduccion algebráica de este problema.

Hallar un número cuyo cuadruplo disminuido de 5 sea igual á 7.

Pasemos ahora á las ecuaciones de primer grado de muchas incógnitas. Una ecuacion de dos incógnitas admite una infinidad de valores, pues por cada valor dada arbitrariamente á una de las incógnitas, la ecuacion determina el valor correspondiente de la otra incógnita. Así, en la ecuacion $x=y+4$, cada valor arbitraria dada á la letra y aumentada de 4, suministra el valor correspondiente de x. Siendo así dependiente del valor de y el valor de x, se dice que x es funcion de y. Para resolver dos ecuaciones de dos incógnitas, procúrase primero combinar estas ecuaciones de manera que se deduzca una ecuacion, que solo contenga una de las incógnitas, lo que equivale á eliminar la otra desconocida.

Muchos procederes hay de eliminacion. Por ejemplo, supongamos que tenemos dos ecuaciones

$$2x+3y=13 \quad (1)$$
$$5x+4y=22 \quad (2).$$

Para eliminar x, es preciso hacer los coeficientes de x iguales en las dos ecuaciones, lo que se consigue multiplicando (1) por 5 y (2) por 2 : operando así se tiene las

$$\text{Ecuaciones}\begin{cases}10x+15\,y=65 & (3)\\ 10x+\ 8\,y=44 & (4)\end{cases}$$

que pueden reemplazar las ecuaciones propuestas; ahora si las resta una de otra, los términos x desaparecerán, y resultará la ecuacion única $15y-8y=65-44$ que da $y=3$. Segun el mismo proceder, para hallar x se volverá iguales los coeficientes de y en las ecuaciones (1) y (2). Multiplicaráse (1) por 4 y (2) por 3, de lo que resulta

$$8x+12y=52 \quad (5)$$
$$15x+12y=66 \quad (6).$$

Estas dos últimas ecuaciones reemplazan (1) y (2): restándolas unas de otras, los términos en y desaparecen, y resulta

$$7x=14, \text{ y por consiguiente } x=2.$$

Así $x=2$, é $y=3$, son los valores que satisfacen á la vez á las dos ecuaciones propuestas.

Para hacer desaparecer x é y de las ecuaciones (3, 4, 5 y 6), hemos restado las ecuaciones una de otra; pero si los coeficientes de x ó de y en estas ecuaciones fuesen signos contrarios, en lugar de restarlas para hacer desaparecer x ó y, seria preciso añadirlas. Si, por ejemplo, se tuviese las dos

$$\text{Ecuaciones}\begin{cases}3x+4y=7\\5x+4y=9\end{cases}$$

para que y desapareciera, seria preciso añadir las ecuaciones, y entonces $+4$ y -4, y se destruirian.

El método de eliminacion que acabamos de emplear, lleva el nombre de método por adicion ó sustraccion; hay otro que se emplea muchas veces con ventaja, que es el método de sustitucion; para operar segun este método, se saca una de las incógnitas de una de las ecuaciones, se sustituye su va-

lor en la otra ecuacion, y de este modo se logra una ecuacion de una sola incógnita, no habiendo mas entonces que sacar de esta ecuacion el valor de la incógnita que en ella se halla, y sustituirla en las ecuaciones propuestas las que darán el valor de la otra incógnita. Para aclararte mas esto, volveré á tomar el mismo ejemplo ya citado.

$$2x+3y=13$$
$$5x+4y=22$$

Sácase el valor de x de la primera ecuacion, como si y fuese una cantidad conocida, de esta manera se tiene $x=\frac{13-3y}{2}$; sustitúyese este valor de x en la segunda, y resulta $5\frac{(13-3y)}{2}+4y=22$, ecuacion que ya no contiene x; sácase el valor de $y=3$, y sustitúyese este valor de $y=3$ en una de las ecuaciones propuestas, en la primera, por ejemplo, resultando $2x+9=13$ que resulta de $x=2$.

Bastan estos dos métodos para resolver dos ecuaciones de dos incógnitas.

Para resolver tres ecuaciones del primer grado entre tres incógnitas, elimínase una de las incógnitas por cualquiera de los métodos precedentes, lo que conduce á dos ecuaciones que no contienen mas que dos incógnitas: estas dos ecuaciones tratadas dan el valor de dos de las incógnitas, y la sustitucion de estos valores en cualquiera de las ecuaciones que contienen las tres desconocidas de una ecuacion que determina la tercera incógnita. Por ejemplo

$$5x-6y+4z=15$$
$$7x+4y-3z=19$$
$$2x+y+6z=46.$$

Para eliminar z en las dos primeras ecuaciones, se multiplica la primera por 3, y la segunda por 4, despues se añaden los dos resultados (puesto que los coeficientes de z tienen signos contrarios), lo que da, por nueva ecuacion, $43x-2y=121$; para poner iguales los coeficientes de z en la segunda y tercera, es preciso multiplicar en la segunda z por uno de los factores del coeficiente 2 en la tercera, y añadiendo se tiene $16x+9y=84$; la cuestion en este caso se reduce á hallar los valores de x y de y propios á satisfacer estas nuevas ecuaciones. Dan $x=3$, $y=4$, y entonces no queda mas que sustituir estos valores de x y de y en cualquiera de las ecuaciones propuestas para tener el valor de z ; poniéndolos en la primera, resulta $15-24+4z=15$; por consiguiente $z=6$. Así

$$x=3$$
$$y=6$$
$$z=6$$

satisfacen á las tres ecuaciones propuestas.

Para resolver cuatro ecuaciones entre cuatro incógnitas, se reduce este caso al precedente, eliminando una de las incógnitas, lo que da tres ecuaciones entre tres incógnitas que dan el valor de las tres incógnitas, y sustituyendo estos valores en cualquiera de las ecuaciones que contienen la otra incógnita, se deduce el valor de esta otra incógnita,

cuyo proceder se aplica para resolver cinco ecuaciones entre cinco incógnitas, etc.

Muchas observaciones podria hacerte sobre las formas que pueden tomar los valores de las incógnitas en la resolucion de las ecuaciones del primer grado.

Haciendo desaparecer los denominadores, y juntando lo que multiplica la incógnita, la ecuacion del primer grado de una sola incógnita puede ponerse bajo la forma $ax=b$, representando a y b, cantidades enteras positivas ó negativas ; resolviendo esta ecuacion, resulta $x=\frac{a}{b}$.

Cuando el numerador b, designando un número positivo dado, el denominador a disminuye, y se acerca indefinidamente de 0, el valor de $\frac{b}{a}$ queda positivo y aumenta indefinidamente ; y en fin cuando a se reduce á cero, el valor de $\frac{b}{0}$ de $\frac{b}{a}$ se vuelve mas grande que toda cantidad asignable; este límite del incremento de las cantidades positivas es lo que se llama el infinitamente grande positivo ó el infinito : se representa por el signo ∞. Por ejemplo, si al denominador a se da el valor de diez en diez veces mas pequeño, $\frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}$, etc., la fraccion $\frac{a}{b}$ adquirirá valores de diez en diez veces mayor b, $10b$, $100b$, $1000b$, etc., de manera que siempre se podrá tomar a bastante pequeño para que

$\frac{b}{a}$ se vuelva mayor que toda cantidad dada.

Guando a y b se reducen simultáneamente á cero la fraccion $\frac{b}{a}$ se vuelve $\frac{0}{0}$, y como se puede tomar un número cualquiera por el cuociente de la division de cero por cero, se dice por este motivo que la fraccion $\frac{0}{0}$ es indeterminada.

Puede suceder sin embargo que una fraccion literal se presente bajo la forma de $\frac{0}{0}$, en virtud de cierta hipótesis, y que sin embargo tenga un valor determinado.

Si, por ejemplo, la ecuacion que espresa todas las condiciones de un problema, hubiera dado por resultado $x=a+b$, por otras trasformaciones se llega á la ecuacion $x(a-b)=(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ que contiene el factor estrangero $a-b$; el verdadero valor $a+b$ de x se presentará bajo la forma $x=\frac{a^2-b^2}{a-b}$. Mientras que á a se dé diferentes valores de b, cada una de las espresiones $a+b$, $\frac{a^2-b^2}{a-b}$, conducirá al mismo valor determinado de x; pero si se busca el valor de x correspondiente á la hipótesis $a=b$, la segunda espresion de x se presentará bajo la forma de $\frac{0}{0}$, aunque el valor de x sea $2a$.

Cuando vuelva á escribirte, es mi intencion tratar de las ecuaciones del segundo grado.

CARTA DÉCIMACUARTA.

ECUACIONES DEL SEGUNDO GRADO.

§ I.

Resolucion de estas ecuaciones.

Amigo Eugenio, conforme te lo prometí en mi última, es mi intencion tratar en la presente de las ecuaciones del segundo grado en que entro sin mas preámbulos.

Supongamos que tenemos que resolver la ecuacion $ax^2+px+q=0$, en la cual a, p, q, son cantidades numéricas; dividiendo todos los términos por el coeficiente a se tiene,

$$x^2+\frac{p}{a}x+\frac{q}{a}=0.$$

Añadamos y restemos á la vez la cantidad $\frac{p^2}{4a^2}$, resultará $x^2+\frac{p}{a}x+\frac{p^2}{4a^2}+\frac{q}{a}-\frac{p^2}{4a^2}=0.$

$\frac{b}{a}$ se vuelva mayor que toda cantidad dada.

Guando a y b se reducen simultáneamente á cero la fraccion $\frac{b}{a}$ se vuelve $\frac{0}{0}$, y como se puede tomar un número cualquiera por el cuociente de la division de cero por cero, se dice por este motivo que la fraccion $\frac{0}{0}$ es indeterminada.

Puede suceder sin embargo que una fraccion literal se presente bajo la forma de $\frac{0}{0}$, en virtud de cierta hipótesis, y que sin embargo tenga un valor determinado.

Si, por ejemplo, la ecuacion que espresa todas las condiciones de un problema, hubiera dado por resultado $x=a+b$, por otras trasformaciones se llega á la ecuacion $x(a-b)=(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ que contiene el factor estrangero $a-b$; el verdadero valor $a+b$ de x se presentará bajo la forma $x=\frac{a^2-b^2}{a-b}$. Mientras que á a se dé diferentes valores de b, cada una de las espresiones $a+b$, $\frac{a^2-b^2}{a-b}$, conducirá al mismo valor determinado de x; pero si se busca el valor de x correspondiente á la hipótesis $a=b$, la segunda espresion de x se presentará bajo la forma de $\frac{0}{0}$, aunque el valor de x sea $2a$.

Cuando vuelva á escribirte, es mi intencion tratar de las ecuaciones del segundo grado.

CARTA DÉCIMACUARTA.

ECUACIONES DEL SEGUNDO GRADO.

§ I.

Resolucion de estas ecuaciones.

Amigo Eugenio, conforme te lo prometí en mi última, es mi intencion tratar en la presente de las ecuaciones del segundo grado en que entro sin mas preámbulos.

Supongamos que tenemos que resolver la ecuacion $ax^2+px+q=0$, en la cual a, p, q, son cantidades numéricas; dividiendo todos los términos por el coeficiente a se tiene,

$$x^2+\frac{p}{a}x+\frac{q}{a}=0.$$

Añadamos y restemos á la vez la cantidad $\frac{p^2}{4a^2}$, resultará $x^2+\frac{p}{a}x+\frac{p^2}{4a^2}+\frac{q}{a}-\frac{p^2}{4a^2}=0.$

Pero $x^2+\frac{p}{a}x+\frac{p^2}{4a^2}=\left(x+\frac{p}{2a}\right)\left(x+\frac{p}{2a}\right)=\left(x+\frac{p}{2a}\right)^2$.

Luego la ecuacion propuesta puede ponerse bajo la forma

$$\left(x+\frac{p}{2a}\right)^2=\left(\frac{p^2}{4a^2}-\frac{q}{a}\right).$$

Sacando la raiz cuadrada de dos números, resulta

$$\left(x+\frac{p}{2a}\right)=\pm\sqrt{\frac{p^2}{4a^2}-\frac{q}{a}}.$$

Pónese el doble signo mas ó menos, pues en estos dos casos el cuadrado siempre está afectado del signo mas.

Por fin se saca

$$x=\frac{p}{2a}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4a^2}-\frac{q}{a}}.$$

Tales son los dos valores, que puesto en lugar de x en la ecuacion la reducen á una identidad.

Puede observarse que el primer término del valor de x, es igual á la mitad del coeficiente de x tomado en signo contrario, y dividido por el coeficiente de x^2 en la ecuacion propuesta; y este término $\frac{p}{2a}$ es igual á la suma de los dos valores de x.

El producto de los dos valores de x que es

$$\left(-\frac{p}{a^2}+\sqrt{\frac{p^2}{4a^2}-\frac{q}{a}}\right)\left(-\frac{p}{2a}-\sqrt{\frac{p^2}{4a}-\frac{q}{a}}\right)=$$

$$\frac{p^2}{4a^2}-\frac{p^2}{4a^2}+\frac{q}{a}=+\frac{q}{a},$$

es por consiguiente igual al término independiente de x, dividido por el coeficiente de x^2.

§ II.

Fórmula del binomio.

Cuando se hace el producto de $(x+a)$ por $(x+b)$ por $(x+b)$, etc., es facil hallar su forma, partiendo del producto de dos binomios; en efecto

$$(x+a)(x+b)=x^2\begin{array}{l|}+a\\+b\end{array}\,x+ab.$$

Multipliquemos ahora por $x+c$; resulta

$$x^3\begin{array}{l|}+a\\+b\\+c\end{array}\,x^2\begin{array}{l|}+ab\\+bc\\+ac\end{array}\,x+abc$$

Observaremos, que continuando en multiplicar por $x+d$, logramos siempre una serie de términos en x cuyas potencias disminuyen. Vemos tambien que el primer coeficiente es la unidad; el segundo es igual á la suma de los segundos términos; el tercero iguala la suma de los productos diferentes que puede hacerse dos á dos con los segundos términos.

Para mostrar que esta ley es general, es preciso establecer, que si es verdadera en un producto de m factores, tambien será verdadera en un producto de $m+1$ factores. De esta hipótesis resulta una serie de términos de esta forma:

$$x^{M}+Ax^{M-1}+Bx^{M-2}+Cx^{M-3}+\ldots..$$

Multipliquemos por $x+\lambda$, resultará

$$x^{M+1}\begin{array}{l|}+A\\+\lambda\end{array}x^{M}\begin{array}{l|}+B\\+\lambda A\end{array}x^{M-1}\begin{array}{l|}+C\\+\lambda B\end{array}x^{M^2}\begin{array}{l}+\ldots..\\+\ldots..\end{array}$$

Estos nuevos coeficientes están formados segun la misma ley. Para demostrarlo es preciso buscar como con m letras, se puede formar productos diferentes de n letras.

Considerando dos letras a y b, se ve que se puede formar dos productos diferentes de una letra y un solo de dos letras, al paso que si se considera todas las permutaciones posibles, se verá que hay dos para dos letras, a y b. Estas permutaciones son ab y ba.

Considerando tres, a, b, c, hállase seis; pues la letra c puede ocupar tres lugares diferentes en cada permutacion de dos letras; cab, acb, abc, cba, bca, bac. Generalizando esta proposicion, se ve que el nombre de permutaciones de m letras es igual al producto $1\times2\times3\ldots.m$.

Hasta aquí hemos hecho entrar en las permutaciones todas las letras dadas. Si hubiese que buscar cuantas permutaciones se puede efectuar con n letras, suponiendo que se dé m letras, estas permutaciones tomarán el nombre particular de combinaciones. Este número de combinaciones es facil de hallar; pues m letras dan evidentemente m combinaciones una á una. Para encontrar las combinaciones de dos letras, se debe colocar despues de cada una de las combinaciones de una letra cada una de las $m-1$ letras restantes; lo que da $m\ (m-1)$ para el número de combinaciones de m letras de dos en dos, y en seguida $m\ (m-1\ldots[m-(n-1)]$ en el número de las combinaciones de m letras, n á n.

Si llamamos productos diferentes las combinaciones del mismo número de letras, que difieren á lo menos por una letra, podremos llegar por lo que precede á determinar el número de productos diferentes de m letras tomadas n á n; pues el número de las combinaciones de m letras tomadas n á n, es igual al número de los productos diferentes de m letras tomadas n á n, multiplicadas por el número de las permutaciones de m letras. Luego, dividiendo el número de las combinaciones de m letras tomadas n á n por el número de permutaciones de n letras, el cuociente indicará el número de productos diferentes. Luego este número es igual á

$$\frac{m(m-1)(\ldots..[m-(n-1)]}{1\ \ 2\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots n}.$$

Volvamos ahora al producto de $(x+a)$ por $x+b$; su planteo

$$x^2\begin{array}{l|}+a\\+b\end{array}x+ab$$

nos hace ver que el coeficiente de x es igual á la suma de los productos diferentes que se puede efectuar con las dos letras tomándolas una á una.

El término ab nos indica el número de productos diferentes que se puede formar con dos letras repitiéndolas ó tomándolas dos á dos.

Supongamos que los coeficientes sucesivos de desarrollo general espresan el segundo, la suma de los productos diferentes de m letras una á una, y el término n la suma de los productos diferentes de m letras $n-1$ á $n-1$; esta ley tendrá tambien lugar por la adicion de un nuevo factor $x+\lambda$. En efecto, el desarrollo

$$x^{M-1}\begin{array}{l}+\mathrm{A}\\+\lambda\end{array}\Bigg|\,x^{M}\begin{array}{l}+\mathrm{B}\\+\mathrm{A}\lambda\end{array}\Bigg|\,x^{M-1}\begin{array}{l}+\mathrm{C}\\+\mathrm{B}\lambda\end{array}\Bigg|\,x-m-2+$$

verifica muy bien nuestra hipótesis; pues $\mathrm{A}+\lambda$ es la suma de los productos diferentes de $m+1$ letras 2 á 2, etc.

Ahora podemos suponer por consiguiente que todos los segundos términos $abcd$, etc., de los factores $x+a$, $x+b$, $x+c$, etc., iguales á a; y en este caso particular podremos ver lo que sucede con el desarrollo

$$x^{M}+\mathrm{A}x^{M-1}+\mathrm{B}x^{M-2}+\ldots.\mathrm{K}-x^{M-N}.$$

En efecto,

$$\mathrm{A}=ma,\ \mathrm{B}=\frac{mm-1}{1\ \ 2}a^{2}\ldots.\mathrm{K}=\frac{m(m-1)}{1\ \ 2}\,\frac{[m-(n-1)a^{N}}{\ldots.(m-n)}$$

Así podemos escribir.

$$(x+a)^{M}=x^{M}+max^{M-1}+\frac{mm-1}{1\ 2}a^{2}x^{M-2}+\ldots.$$

$$\frac{m(m-1)\ldots..[m-(n-1)]}{1\quad 2\qquad\qquad m-n},\ \text{etc.}$$

§ III.

Estraccion de raices de cualquier grado.

La cantidad, que elevada al cuadrado, reproduce una cantidad dada, se llama la raiz cuadrada de esta cantidad. Llámase raiz cuarta de una cantidad A, una cantidad B, que elevada á la potencia 4, ó que multiplicada 4 veces por ella misma, reproduce esta cantidad.

Para multiplicar la raiz n de A, se acostumbra escribir $\sqrt[n]{\mathrm{A}}$, de suerte que se tenga $\mathrm{B}=\sqrt[n]{\mathrm{A}}$.

Para elevar un monomio á una potencia n, es preciso multiplicar por n los esponentes de los diferentes factores que lo componen.

Así $(pqr\ldots..)^{N}=p^{N}q^{N}r^{N}$.

Así para estraer la raiz n de un monomio, es preciso dividir cada uno de los esponentes por n.

Para estraer la raiz n de un polinomio, es preciso tener recurso al planteo del binomio. El método que debe seguirse en el caso general, siendo análogo al que se emplea para determinar la raiz cuadrada de un polinomio, lo espondré brevemente, porque es mas sencillo.

Sea por ejemplo un polinomio

$$a+b+c+d$$

en el cual a, b, c, d, representan cantidades cualesquiera. Si elevamos al cuadrado este polinomio tendremos

$$\begin{aligned}(a+b+c+d)^2=a^2&+2ab+b^2\\&+2(a+b)c+c^2\\&+2(a+b+c)d+d^2,\end{aligned}$$

de lo que se concluye que el cuadrado de un polinomio, cualquiera que sea el número de sus términos, contiene el cuadrado del primer término, mas el doble del primero por el segundo, etc.

Propongámonos ahora estraer la raiz cuadrada de un polinomio A+B+C, ordenado segun las potencias decrecentes de x, y representemos este polinomio por P.

Designemos por $a+b+c$ la raiz ordenada de la misma manera, su cuadrado deberá reproducir su polinomio P. Pero, segun la regla establecida, entre los términos que componen el cuadrado de esta raiz, el término en que x tiene el mas alto esponente es evidentemente a^2; luego A es el cuadrado de a. Luego el primer término de la raiz se obtiene sacando la raiz cuadrada del primer término del polinomio propuesto. Restemos de P el cuadrado de este término, el resto que llamaré R, será

$$R=B+C+\ldots$$

debiendo contener el doble del producto del primertérmino de la raiz por el segundo, mas el cuadrado del segundo, etc.; y como es facil ver que el doble producto del primer término por el segundo debe contener x con un esponente mas alto que las otras partes de R, resulta que B es este doble producto; luego el segundo término de la raiz se halla dividiendo el primer término del resto por el doble del primer término de la raiz.

El mismo razonamiento hace ver que para hallar el tercer término se debe restar del polinomio dado el cuadrado de $a+b$, y dividir el primer término del resto por el doble de $(a+b)$, ó por el doble de a.

Aplicando estos razonamientos á la estraccion de la raiz n, el planteo del binomio hará ver la ley de su composicion, y los razonamientos que he seguido para la estraccion de la raiz cuadrada demostrará que el primer término de la raiz se logra, despues de haber ordenado el polinomio segun las potencias decrescentes de x, y sacando la raiz n del primer término, y el segundo dividiendo el primer término del resto por n veces la $(n-1)$, potencia del primer término de la raiz, etc.

§ IV.

Resolucion de las ecuaciones numéricas de cualquier grado.

Toda ecuacion del grado m de una sola incógnita puede reducirse á la forma

$$y^{M}+\frac{pq^{M-1}}{p'}+\frac{q^{M-2}}{q'}{}^{2}+\ldots..\frac{rx}{r'}+\frac{s}{s'}=0,$$

y poniendo

$$y=\frac{x}{p'q'\ldots.r's'},$$

se reduce á la forma

$$x^{M}+Px^{M-1}+Qx^{M-2}+Tx+V=0.$$

en la cual PQ... son números enteros positivos ó negativos.

Toda cantidad positiva ó negativa, entera ó inconmensurable, real ó imaginaria, que, puesta en lugar de x en la ecuacion, la reduce á una identidad, se llama raiz de esta ecuacion.

Mirase como evidente que toda ecuacion tiene cuando menos una raiz.

Llamando a esta raiz, digo que el primer miembro de la ecuacion propuesta es divisible por $x-a$; en efecto, si se efectua la division de este primer miembro, se halla por resta

$$a^{M}+P^{M-1}+\ldots..+a+V\,;$$

pero si, por hipótesis, a es raiz, este resto es nulo, luego la division es posible exactamente.

Llamando X el primer término de la ecuacion propuesta, tendremos

$X=(x-a)X'$, si designamos por X' el cuociente de la division de X por $x-a$.

Continuando de esta manera, llegaremos á la relacion

$$X=(x-a)(x-b)\ldots$$

que indica que una ecuacion del grado m tiene m raices. Buscando el producto de $(x-a)$ por $(x-b)$, etc., hállase una fórmula que debe ser idéntica á X, luego $P=-(a+b+\ldots)Q=(ab+bc+ca+)$, etc.

Cuando dos números α, α', puestos en lugar de X en x, dan dos resultados de signos contrarios, hay cuando menos una raiz real comprendida entre estos dos miembros; pues, cambiando en X, x en $x+\delta$, resulta

$$X+\delta(N+\delta P+\delta^{2}Q+\ldots..)\,;$$

ahora bien, como es visible que tomando δ bastantemente pequeño, se podrá volver el término $\delta(N+\delta P+\ldots.)$ tan pequeño como se quiera; luego se puede aumentar x desde α hasta α', de manera que el resultado de esta sustitucion varie por grados insensibles; por consiguiente este resultado no podrá cambiar de signo sin pasar por cero.

Este resultado pudiendo por otra parte pasar por cero un número impar de veces, resulta que puede haber entre α y α' un número impar de raices reales.

Si α y α' diesen resultados del mismo signo, ó bien no habria ninguna raiz real comprendida, ó habria un número par.

Llámase límite superior de las raices positivas de una ecuacion todo número mayor que la mayor raiz positiva de esta ecuacion. Llamando M el mayor de los coeficientes negativos de la ecuacion, y n el número de términos que le preceden, el primer término negativo $1+\sqrt[N]{M}$ será un límite superior de las raices positivas; pues la suma de los términos negativos es menor que

$$M(x^{M-N}+x^{M-N-1}\ldots\ldots x+1), \text{ ó que}$$

$M\dfrac{(x^{M-N+1})}{x-1}$; pero si se hace $\sqrt[N]{M}=p$, de donde $M=p^N$, y que despues se haga $x=p+1$, la espresion superior se cambia en la siguiente:

$$p^{N-1}[(p+1)^{M-(N-1)}-1], \text{ ó bien}$$

$$\left(\frac{p}{p+1}\right)^{N+1}\times(p+1)^M-p^N-1$$

cantidad mas pequeña que $p+1$.

Así el valor $\sqrt[N]{M+1}$, puesto en lugar de x vuelve el primer término positivo.

Lógrase el límite superior de las raices negativas, cambiando x en $-x$, y buscando el límite de las nuevas raices positivas.

El límite inferior se logra buscando el límite superior en la nueva ecuacion que resulta cambiando x en $\dfrac{1}{x}$.

Esplicado esto, paso ahora á resolver el siguiente problema: Toda ecuacion que tiene una raiz imaginaria de la forma $\alpha+\beta\sqrt{-1}$ tiene otra de la forma $\alpha-\beta\sqrt{-1}$.

En efecto, puesto que $\alpha+\beta\sqrt{-1}$ es por hipótesis raiz, deberá, colocada en lugar de x, volver $X=0$ idéntica. Pero el resultado de esta sustitucion, que es de la forma $M+N\sqrt{-1}$, debe ser igual á cero; luego se debe tener $M=0$ y $N=0$. Ahora bien, sustituyendo en lugar de x en $X=0$ el valor $\alpha-\beta\sqrt{-1}$, el resultado de esta sustitucion será evidentemente igual $M-N\sqrt{-1}$, y por consiguiente igual á cero, puesto que M y N son nulos.

§ V.

Teorema de Descartes.

Cuando de un término se pasa al siguiente, dícese que hay variacion ó permanencia, segun que el signo cambia ó queda el mismo. Establecido esto, voy á demostrar que cualquiera ecuacion, completa ó incompleta, no puede tener mas raices positivas que variaciones.

Consideremos una ecuacion cualquiera, completa ó incompleta, conteniendo los signos que se quiera; la presentaré de esta manera.

$$x^M\ldots-P\ldots+Q\ldots-+R\ldots\pm T\ldots\pm V=0.$$

Aquí P, Q, R, serán términos ordenados como de ordinario, y contendrán una potencia de x con su coeficiente; los puntos indican las lagunas de que está llena cada una por términos del mismo signo que el que precede; es decir que en x^{M} empieza una serie de signos $+$, $a-P$, una serie de signos $-$, y así sucesivamente.

Para introducir en la ecuacion una nueva raiz positiva $+a$, es preciso multiplicarla por $x-a$, y la operacion puede disponerse como superiormente.

$$\begin{array}{l}
\quad x^{M}\ldots-P\ldots+Q\ldots-R\ldots\pm T'\ldots\pm V\\
\quad x-a\\
\hline
x^{M-1}\ldots-P'\ldots+Q'\ldots-R'\ldots\pm T'\ldots\pm V'\\
\qquad\quad -P''\ldots+Q''\ldots-R''\ldots\pm T''\ldots.\mp Va\\
\hline
x^{M-1}\ldots-P'''\ldots+Q'''\ldots-R'''\ldots\pm T'''\ldots.\mp Va
\end{array}$$

P', Q', designan los productos Px, Qx, etc., ninguno es igual á cero.

P'', Q'', etc., designan los productos que provienen de la multiplicacion por a, en que contienen x en el mismo grado que P', Q', etc.

P''', Q''', etc., designan términos del mismo grado en x que P', Q', y ninguno de ellos debe ser nulo; en fin observaráse que en la segunda línea de los productos semejantes, las lagunas deben mirarse como llenas por términos de signos contrarios á los que se encuentran encima de ellos en la primera línea de los productos, de manera que los signos que afectan en el producto total los términos correspondientes á estas lagunas deben quedar indeterminados, en tanto que no se asigna los valores particulares á los coeficientes de la ecuacion propuesta.

Ahora bien, sean cuales fueren estos signos, es evidente que hay en el producto total á lo menos

una variacion de $x^{M}+1$ á $-P'''$, mientras que el multiplicando contiene solamente una sola de x^{M} á $-P$. De la misma manera hay á lo menos una de $-P'''$ á $+Q'''$, y una sola de $-Pa+Q$, y continuando así, se reconoce que al fin el producto tiene á lo menos una variacion de $\pm T'''$ á $\mp Va$, mientras que el multiplicando no tiene ninguna despues del término $\pm T$, luego el producto tiene á lo menos una variacion de mas que el multiplicando; de lo que se concluye que cada raiz positiva, para ser introducida en una ecuacion, debe á lo menos traer una variacion.

§ VI.

De las raices iguales.

Si en una ecuacion $X=0$ se reemplaza x por $x+\delta$, se hallará ordenando relativamente á las potencias ascendentes de δ.

$$\begin{array}{ll|l|l}
x^{M} & +mx^{M-1} & \delta+\dfrac{m(m-1)}{2}x^{M-2} & ^{2}\ldots+\delta m=0.\\
+Px^{M-1} & +(m-1)Px^{M-2} & +\dfrac{(m-1)(m-2)}{2}Px^{M-3} & \\
+\cdots & +\cdots & \ldots\ldots & \\
\ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \\
+Rx^{2} & +2Rx & R & \\
+Tx & +T & & \\
+V & & &
\end{array}$$

Resultado que puede escribirse

$$X+X'\delta+X''\delta^{2}\ldots..\delta^{M}=0.$$

El polinomio X' se llama polinomio derivado de X.

Si, en la ecuacion $X=0$ se hace $x=x'+\delta$, x' siendo una de las raices de la ecuacion, se tendrá

$X_{,}+X'\delta+X''\delta^2+\ldots+\delta^M=0$; y puesto que x' es raiz $X_{,}=0$, suprimiendo pues X, y dividiendo por δ resulta

$$X'+X''\delta+\ldots+\delta^{M-1}=0\,;$$

δ espresa la diferencia entre la raiz x' y las demas.

Luego la ecuacion dada tiene dos raices iguales x'; la ecuacion en δ debe ser verificada por $\delta=0$, es preciso que para esto se tenga $X'=0$.

Las dos ecuaciones $X=0$ y $X'=0$ siendo verificadas por un mismo valor de x, tienen un factor comun.

Resulta pues que, para desembarazar una ecuacion de sus raices iguales, se debe buscar el mayor comun divisor entre el primer número de esta ecuacion y su polinomio derivado, y dividir este primer número por el mayor comun divisor.

§ VII.

Teorema de Sturm.

Sea $X=0$ una ecuacion cuyas raices sean diferentes, sea X' su polinomio derivado; busquemos el mayor comun divisor.

Llamemos q, q', q'', etc,, los cuocientes sucesivos. Cambiemos haciendo el cálculo el signo de cada resto, sean R, R', R'', estos restos, tendremos

$$\begin{aligned}
X &= q\,X'-R \\
X' &= q\,R-R' \\
R &= q'R'-R'' \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
R^{N-2} &= q^{N+1}R^{N}-R^{N+1}
\end{aligned}$$

Supongamos que diésemos á ax dos valores α y β, y hagamos crecer x desde α hasta β aumentándola sucesivamente de cantidades iguales á δ; ninguno de estos valores podrá anular á la vez dos términos consecutivos de la serie $XX'R\ldots$; pues si R^2 R^3 resultasen nulos por las ecuaciones superiores R', R, X' y X resultarian nulos, lo que es imposible, puesto que la ecuacion propuesta no tiene raices iguales.

Si la suposicion $x=a$, anula algunos de estos términos, por ejemplo, el término R sin anular X, el número de las variaciones y permanencias formadas por estos términos no será cambiado, pues la relacion

$$R^{N-2}=q^{N+1}R^{N}-R^{N+1}$$

muestra que si en $x=a$, R^N es nulo, R^{N-2} y R^{N+1} son necesariamente signos contrarios, y relativamente los signos, estas tres cantidades formarán una de las series $+0-$, ó $-0+$, que dan siempre una variacion y una permanencia, sea que se tome 0 con el signo $+$, sea con el signo $-$.

Si la suposicion $x=a$ anula X, habrá una variacion cambiada en permanencia, pues si se hace $x=a+\delta$, llamemos A y A', lo que se volverán x y x', y designemos por B B' B'' y por $B_{,}$ $B'_{,}$ $B''_{,}$, lo que se volverán los derivados de X y X', por la suposicion de $x=a+\delta$, atendido á que α anula X, y que $B'=B$, pues estas dos cantidades representan los valores particulares que toman dos derivados iguales $x=\alpha+\delta$, el resultado final será :

$$A=B'\delta+B''\delta^2+\ldots\ldots A_,=B_,+B'\delta+\ldots\ldots$$

Pero siempre se puede tomar δ bastante pequeña para que A y A' sean del mismo signo para el primer término, luego X y X', son del mismo signo en $x=a+\delta$ y del signo contrario en $x=a-\delta$; luego, en el paso de la segunda á la primera, habrá una variacion cambiada en permanencia.

Pero si x continua creciendo cada vez que será igual á una de las raices reales de la propuesta, habrá una variacion cambiada en permanencia; luego, si se cuentan los números de las variaciones correspondiendo á las suposiciones $x=\alpha$ y $x=\beta$, la diferencia de estos dos números de variaciones espresará el número de raices comprendidas entre α y β.

Concluyo aquí esta carta, como tambien todo cuanto pienso oportuno tratar sobre el algebra; estas nociones no te enseñarán esta ciencia, pero tal vez te pongan en estado de leer con fruto tratados mas serios, los cuales, juntamente con la viva voz y demostracion práctica del maestro, acabarán de enseñarte una ciencia de lo que solo he anhelado establecer los cimientos.

En mi próxima carta pienso empezar la geometría.

GEOMETRIA.

se volverán los derivados de X y X′, por la suposicion de $x=a+\delta$, atendido á que α anula X, y que B′=B, pues estas dos cantidades representan los valores particulares que toman dos derivados iguales $x=\alpha+\delta$, el resultado final será:

$$A=B'\delta+B''\delta^2+\ldots\ldots A_,=B_,+B'\delta+\ldots\ldots$$

Pero siempre se puede tomar δ bastante pequeña para que A y A′ sean del mismo signo para el primer término, luego X y X′, son del mismo signo en $x=a+\delta$ y del signo contrario en $x=a-\delta$; luego, en el paso de la segunda á la primera, habrá una variacion cambiada en permanencia.

Pero si x continua creciendo cada vez que será igual á una de las raices reales de la propuesta, habrá una variacion cambiada en permanencia; luego, si se cuentan los números de las variaciones correspondiendo á las suposiciones $x=\alpha$ y $x=\beta$, la diferencia de estos dos números de variaciones espresará el número de raices comprendidas entre α y β.

Concluyo aquí esta carta, como tambien todo cuanto pienso oportuno tratar sobre el algebra; estas nociones no te enseñarán esta ciencia, pero tal vez te pongan en estado de leer con fruto tratados mas serios, los cuales, juntamente con la viva voz y demostracion práctica del maestro, acabarán de enseñarte una ciencia de lo que solo he anhelado establecer los cimientos.

En mi próxima carta pienso empezar la geometría.

GEOMETRIA.

CARTA DÉCIMAQUINTA.

SOBRE LAS LINEAS Y LOS ANGULOS.

§ I.

De la formacion de las lineas recta y curva.

Eugenio, imagínate que un punto se mueve : de cualquiera modo que se mueva siempre ha de seguir algun camino : este camino que lleva el punto es el que llamamos *línea*, como AB (Fig. 1). Ahora

A .... B

Fig. 1.

bien, si el punto se mueve en busca de otro punto determinado la *línea* es *recta*, como sucede al punto A, el cual se supone que va buscando siempre en su movimiento al punto B.

Mas si el punto que se mueve á cada paso fuere mudando de direccion (Fig. 2), la *línea* que describe se llamará *curva*, como sucede en el punto E de la *línea* EI.

Fig. 2.

Esplico esto mas. Si juntásemos muchas rectas inclinadas mútuamente, claro está que el punto O, siguiendo estas *líneas*, ya buscaria el punto A, ya el B, ya C, y ya últimamente D: esto no lo dudas: lo mismo, pues, hace en la curva el punto movible E, porque á cada movimiento infinitamente pequeño va mudando de direccion.

Por eso cuando el punto movible caminase por una línea recta, llegará á su término mas presto que si antes de llegar á él fuese describiendo una curva. De aquí saco una consecuencia, que tú irás escribiendo á parte en un cuaderno para conservarlas mejor en la memoria.

Número 1. Luego la línea recta es menor que la curva si ambas salen de un punto, y ambas terminan en otro.

§ II.

De la línea circular.

Si la recta AB (Fig. 5), amigo Eugenio, se fuere moviendo alrededor, afirmándose sobre la estremi-

dad A, la otra estremidad B irá describiendo una

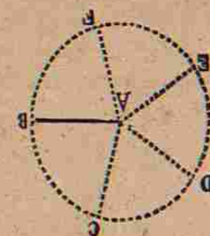


Fig. 3.

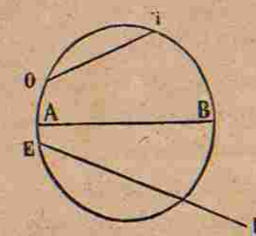


Fig. 4.

curva, la que vendrá á concluir en su principio, cuando la recta vuelva por último á su lugar antiguo.

Esta línea recta que se mueve se llama radio, como AB: el punto A ó la estremidad fija se llama centro.

La curva formada por la estremidad movible se llama circunferencia ó periferia, como B, C, D, E, F.

Cualquiera porcion de esta circunferencia se llama arco, como DC ó DE, etc.

El espacio comprendido dentro de la circunferencia se llama círculo.

La recta, que de un punto de la circunferencia llega hasta el otro, atravesando por el centro, se llama diámetro (Fig. 4).

La recta que no pasare por el centro, y termina por ambos estremos en la circunferencia, se llama cuerda, como OI.

La recta que saliere fuera del círculo se llama secante, como EF.

Ahora, amigo, de la formacion del círculo salen varias consecuencias.

I.

Los diferentes radios de un círculo (Fig. 5) no son otra cosa sino la misma línea AB, que se movió, haciendo el círculo, y puesta en diversas situaciones hace diversos radios.

Núm. 2. Luego todos los radios de un círculo son iguales entre sí.

II.

Los radios de un círculo son la medida de las distancias entre el centro y los puntos de la circunferencia; y como los rayos son iguales se sigue:

Núm. 3. Luego todos los puntos de la circunferencia están igualmente distantes del centro.

III.

Doblado un círculo por el centro (Fig. 5) si algun

Fig. 5.

Fig. 6.

punto de alguna mitad saliere mas hácia fuera, ó entrase mas hácia dentro que los de la otra mitad,

distaria este punto del centro mas ó menos que los otros, lo que es imposible.

Núm. 4. Luego doblado cualquier círculo por el centro se ajustarán perfectamente las dos medias circunferencias ó semicírculos.

IV.

Si dos arcos en un círculo fueren iguales (Fig. 6), se podrá doblar el círculo por el centro de tal modo, que no solo se ajusten las dos medias circunferencias, sino tambien los dos arcos iguales, que son partes de ellas. Entonces poniendo las estremidades de un arco sobre las estremidades del otro se ajustará perfectamente la distancia entre estas estremidades ó las cuerdas que las miden.

Núm. 5. Luego en el mismo círculo los arcos iguales tienen cuerdas iguales.

Del mismo modo si en el mismo círculo son las cuerdas iguales, las estremidades de los arcos que estas atan estarán igualmente distantes, y por ser igual su curvatura, pues se forman con igual movimiento del mismo radio, se podrán ajustar y coincidir.

Núm. 6. Luego en el mismo círculo cuerdas iguales piden arcos iguales.

§ III.

De los ángulos en comun.

Amigo Eugenio, antes de hablar de los ángulos conviene esplicarte algunos términos que podrán ser estraños á los principiantes.

Cuando dos líneas van conservando siempre entre sí igual distancia se llaman *paralelas* : de estas trataremos adelante.

Cuando la distancia va siendo mayor al paso que van adelantando estas líneas, se llaman *divergentes*, v. g. (Fig. 6) las líneas MI y NE, que segun van bajando van distando mas entre sí.

Cuando las líneas van distando entre sí cada vez menos se llaman *convergentes*, v. g. las mismas líneas si se toman de abajo hácia arriba. Esto supuesto, sabrás que

Núm. 7. Angulo es la divergencia de dos rayos ó de dos líneas que se consideren como tales (Fig. 7).

Fig. 7.

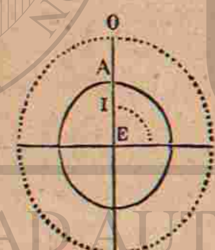


Fig. 8.

El punto A en que se unen se llama *vértice* : las dos líneas se llaman *lados* [1].

[1] Confieso que dos líneas unidas en un punto pueden hacer ángulo, aunque sea fuera del círculo : no obsta, como para medir la grandeza de este ángulo siempre se considera una punta del compas puesta en el vértice, y se describe un círculo que corte sus dos lados en igual distancia, para conocer el valor del arco que comprende, en este particular se consideran como radios. Tambien advierto que algunas veces se nota ó señala el ángulo con tres letras : en este caso siempre se ha de poner en medio de las otras dos la letra que está en el vértice.

De este conocimiento se siguen las consecuencias siguientes :

I.

Núm. 8. El ángulo mayor ó menor es la mayor ó menor divergencia de las líneas. Y así la longitud de las líneas no tiene conexion alguna con la grandeza del ángulo. Por esto (Fig. 8) el ángulo E no mudará de cantidad, bien sea que sus líneas se corten en I, ó paren en A, ó continuen hasta O.

II.

Núm. 9. La medida del ángulo es la medida de la divergencia, esto es, el arco comprendido entre los dos rayos que se forman y describen desde el vértice como de centro.

La circunferencia de cualquier círculo grande ó pequeño se divide en 360 partes iguales, las que se llaman *grados* : los círculos grandes tienen grados grandes, y los pequeños los tienen pequeños. Cada grado se puede dividir en 60 partes iguales, que se llaman minutos, y cada minuto en 60 partes iguales, que se llaman segundos, etc.

Núm. 10. Cuando el arco comprendido entre los lados de un ángulo es la cuarta parte de un círculo comprende 90 grados, y se llama ángulo recto, como A (Fig. 9).

Fig. 9.

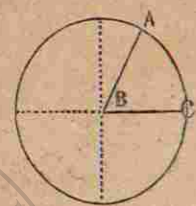


Fig. 10.

Cuando el arco es menos que la cuarta parte se llama *agudo*, como B (Fig. 10).

Cuando el arco comprende mas de la cuarta parte de un círculo se llama *obtuso*, como D (Fig. 11).

Fig. 11.

Fig. 12.

De estas tres definiciones se sacan varias consecuencias.

I.

Núm. 11. Luego solamente los ángulos rectos tienen medida constante y número sabido de grados, y todos son iguales entre sí.

II.

Núm. 12. Luego el semicírculo ó media circunferencia es la medida de dos ángulos rectos, ó de dos ángulos que tengan el valor de estos (Fig. 12), porque es igual á dos cuartas partes del círculo ó á 180 grados.

III.

Núm. 13. Luego la circunferencia total es medida de cuatro (Fig. 8) ángulos rectos, ó de los ángulos que tengan el valor de ellos (Fig. 13), porque tiene por medida cuatro cuartas partes del círculo.

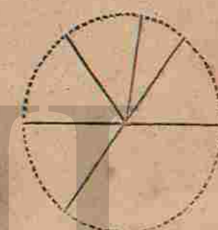


Fig. 13.

IV.

Núm. 14. Luego todos los ángulos que se pudieren formar sobre una línea recta y en un punto (Fig. 12) tienen el valor de dos rectos, porque todos juntos se pueden medir por la media circunferencia, ó tienen el mismo valor que un semicírculo.

V.

Núm. 15. Luego todos los ángulos que se pueden formar alrededor de un punto (Fig. 13) son iguales á cuatro rectos, porque se pueden medir por una circunferencia entera.

Se llama *suplemento* de un ángulo lo que falta á este para completar la media circunferencia ó semicírculo (Fig. 14), y así el ángulo A tiene por su-

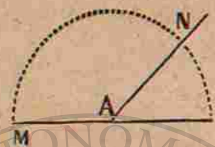


Fig. 14.

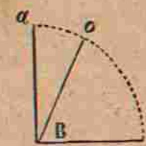


Fig. 15.

plemento la porcion de semicírculo MN. Se llama *complemento* de un ángulo lo que falta en este para la cuarta parte de un círculo, como B (Fig. 15), por lo cual el ángulo B tiene por complemento el arco *ao*.

De esta definicion se sacan las consecuencias siguientes.

I.

Núm. 16. Luego cuando dos ángulos tuvieren el mismo complemento ó el mismo suplemento serán iguales entre sí, porque si á ambos les falta el mismo número de grados para 90 ó para 180, ambos tendrán igual número de grados.

Cuando dos rectas se cruzan (Fig. 16) tenemos

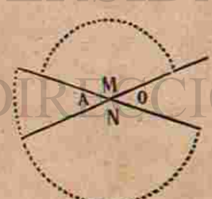


Fig. 16.

Fig. 17.

cuatro ángulos A, M, O, N. Aquellos ángulos que no

tienen un lado comun á los dos, v. g. AO, como MN, se llaman opuestos por el vértice, ó como algunos dicen opuestos verticalmente : adviértase bien que, como he dicho, han de ser formados por dos rectas que se crucen.

Si tomamos juntamente el ángulo M con el A, ambos se miden por un semicírculo, y por consiguiente A es el suplemento de M. Asimismo si tomamos juntos el ángulo N con el A tienen por su medida un semicírculo, y por consiguiente A es suplemento de N. Luego M y N tendrán el mismo suplemento A ; y esto se puede probar con los ángulos A y O.

II.

Núm. 17. Luego los ángulos opuestos por el vértice son iguales.

§ IV.

De la línea perpendicular y de la oblicua.

Se llama línea perpendicular la recta, que cayendo sobre otra no se inclina mas hácia un lado que hácia otro (Fig. 17).

De esta definicion se sacan varias consecuencias.

I.

Núm. 18. Luego cuando la perpendicular hace dos ángulos con la otra línea sobre que cae, estos serán entre sí iguales; pues á no serlo se inclinaria mas hácia un lado que á otro (Fig. 17) y no seria perpendicular.

II.

Núm. 19. Luego los ángulos que hace la perpendicular son rectos, porque valen ambos dos rectos; y pues son iguales entre sí, cada uno será un recto; por consiguiente.

La línea que con otra hiciere dos ángulos rectos será perpendicular á esta otra supuesto que no se inclina mas á un lado que á otro.

III.

Núm, 20. Si dos líneas hicieren un ángulo recto (Fig. 18) podemos por el vértice ó prolongar una de

Fig. 18.

Fig. 19.

ellas, y aparecerá un nuevo ángulo, que tambien será recto (núm. 14): por consiguiente una línea será perpendicular á otra; y si prolongásemos las dos líneas que concurren en el ángulo O, tendremos por la misma razon cuatro ángulos rectos, y todas las líneas serian mutuamente perpendiculares.

Núm. 21. Luego siempre que una recta hace ángulo recto con otra la será perpendicular.

IV.

Cuando una recta es perpendicular sobre otra (Fig. 19), hace con ella un ángulo recto, y entonces tambien la segunda le hace con la primera, y por el núm 21 precedente la será perpendicular.

Núm. 22. Luego cuando una línea fuere perpendicular á otra, tambien esta otra lo será respecto de la primera.

V.

Puesta una recta *mn* (Fig. 20), y levantada una

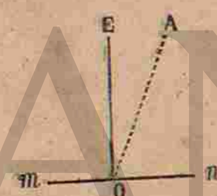


Fig. 20.

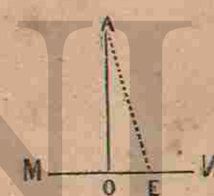


Fig. 21.

perpendicular AO, si desde el mismo punto queremos levantar otra, ó bien ha de pasar sobre la primera, y entonces no es línea distinta, ó ha de caer hácia alguno de los lados, y entonces no será perpendicular porque se inclina mas á un lado que á otro.

Núm. 23. Luego del mismo punto de una línea no se pueden levantar dos perpendiculares.

VI.

Del mismo modo (Fig. 21) si la perpendicular AO, no se inclina á un lado ni á otro, cualquiera otra línea que saliere de A, ó ha de venir á parar á O, y entonces no es línea diversa, ó ha de caer hácia uno de los lados, y se inclinará mas á un lado que á otro, y entonces no será perpendicular.

Núm. 24. Luego de un punto no se podrán tirar dos perpendiculares sobre la misma línea.

§ V.

De otras propiedades de las líneas perpendiculares.

Supuesto que la perpendicular no se inclina mas á un lado que á otro, saldrán las consecuencias siguientes.

I.

Núm. 25. Si del medio de una línea MN (Fig. 22 se levanta una perpendicular, su estremidad superior O distará igualmente de los dos estremos de la línea MN; pues de lo contrario, teniendo la perpendicular la estremidad inferior A igualmente distante de los estremos MN, y la de arriba O mas cerca del uno que del otro, toda la línea se inclinaria hácia esta parte, y ya no seria perpendicular.

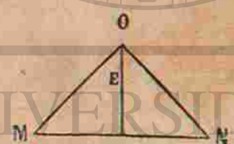


Fig. 22.

II.

Podemos partir esta perpendicular OE por cualquier punto que se quiera, y en este caso este punto, v. g. E, seria la estremidad superior, y por consiguiente igualmente distantes de los estremos MN.

Núm. 26. Luego si del medio de una línea se levantare una perpendicular todos los puntos de ella distarán igualmente de los estremos de la otra línea MN.

III.

Dijimos en el núm 25 que si del medio de la línea MN se levantase una perpendicular, iria á buscar el punto O igualmente distante de las estremidades MN; luego la linea que saliere de O y viniere á parar en A, será perpendicular; y como del punto O no se pueden tirar dos perpendiculares sobre la misma línea (núm. 24) se sigue que la línea que saliere de O igualmente distantes de las estremidades, si fuere perpendicular ha de venir á buscar el punto A tambien igualmente distante de ellas.

Núm. 27. Luego si la estremidad superior de la perpendicular dista igualmente de los estremos de la otra línea, tambien la estremidad inferior distará igualmente de ellos.

IV.

Ahora bien, pudiéndose cortar la perpendicular por el punto que se quiera v. g. por E (Fig. 22), y hacer que este sea la estremidad superior, se sigue:

Núm. 28. Luego dado en una perpendicular cualquier punto E, que diste igualmente de los estremos de la línea MN, la perpendicular vendrá á dar en el medio de ella (por el núm. 27).

V.

Núm. 29. Luego, generalmente hablando, dando en la línea perpendicular cualquier punto igualmente distante de los estremos MN, sea ínfimo ó superior ó cualquiera otro, ó por el medio, todos los otros puntos de la perpendicular tendrán igual distancia del uno y el otro estremo de la otra línea (núms. 26, 27 y 28).

VI.

Tambien podemos cortar la línea MO por donde nos parezca, y de cualesquiera puntos de ella haremos estremidades; y de este modo lo que hemos dicho de la perpendicular que dista igualmente de las estremidades de la otra línea, lo podremos decir de la perpendicular que distará igualmente de cualesquiera puntos notados en la otra línea.

Núm. 30. Luego la perpendicular que tuviere un punto (Fig. 23), cualquiera que sea, igualmente distantes de los dos notados MN en la línea sobre que cae, tendrá todos sus puntos igualmente distantes de ambos á dos.

Ahora bien, si todos los puntos de la perpendicular A, E, I, O (Fig. 23), se suponen igualmente distantes de MN (Núm. 30), todos los otros puntos que quedaron á los lados de esa perpendicular, ó han de quedar mas cerca de M ó de N; y así no es posible que punto alguno que quede fuera de la perpendicular diste igualmente de los dos puntos notados en la línea sobre que cae.

Núm. 31. Luego si un punto de la perpendicular

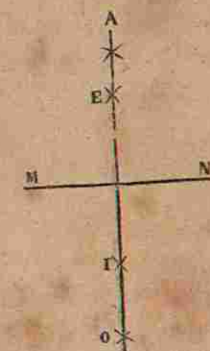


Fig. 23.

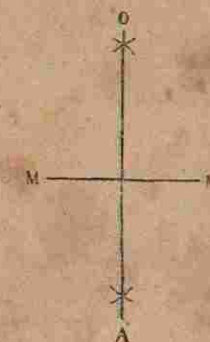


Fig. 24.

dista igualmente de los dos notados en la línea sobre que cae, la perpendicular pasará por todos los puntos que distaren igualmente de ellos.

§ VI.

Señales para conocer las perpendiculares y modo de formarlas.

Hasta aquí, amigo Eugenio, del conocimiento de la perpendicular te enseñé á sacar sus propiedades; ahora por las propiedades te enseñaré á conocer la perpendicular.

I.

Núm. 32. Si una línea (Fig. 24) tuviere dos puntos igualmente distantes de otros dos señalados en

V.

Núm. 29. Luego, generalmente hablando, dando en la línea perpendicular cualquier punto igualmente distante de los estremos MN, sea ínfimo ó superior ó cualquiera otro, ó por el medio, todos los otros puntos de la perpendicular tendrán igual distancia del uno y el otro estremo de la otra línea (núms. 26, 27 y 28).

VI.

Tambien podemos cortar la línea MO por donde nos parezca, y de cualesquiera puntos de ella haremos estremidades; y de este modo lo que hemos dicho de la perpendicular que dista igualmente de las estremidades de la otra línea, lo podremos decir de la perpendicular que distará igualmente de cualesquiera puntos notados en la otra línea.

Núm. 30. Luego la perpendicular que tuviere un punto (Fig. 23), cualquiera que sea, igualmente distantes de los dos notados MN en la línea sobre que cae, tendrá todos sus puntos igualmente distantes de ambos á dos.

Ahora bien, si todos los puntos de la perpendicular A, E, I, O (Fig. 23), se suponen igualmente distantes de MN (Núm. 30), todos los otros puntos que quedaron á los lados de esa perpendicular, ó han de quedar mas cerca de M ó de N; y así no es posible que punto alguno que quede fuera de la perpendicular diste igualmente de los dos puntos notados en la línea sobre que cae.

Núm. 31. Luego si un punto de la perpendicular

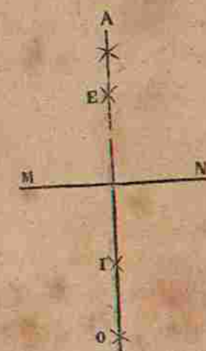


Fig. 23.

Fig. 24.

dista igualmente de los dos notados en la línea sobre que cae, la perpendicular pasará por todos los puntos que distaren igualmente de ellos.

§ VI.

Señales para conocer las perpendiculares y modo de formarlas.

Hasta aquí, amigo Eugenio, del conocimiento de la perpendicular te enseñé á sacar sus propiedades; ahora por las propiedades te enseñaré á conocer la perpendicular.

I.

Núm. 32. Si una línea (Fig. 24) tuviere dos puntos igualmente distantes de otros dos señalados en otra, basta esto para ser perpendicular; v. g. si AO tuviese A igualmente distante de MN, y tambien O igualmente distante de estos mismos, esto basta para ser perpendicular á MN.

Porque la perpendicular que pasase por el punto O, igualmente distante de MN, iria á tocar al punto A, tambien igualmente distante de los puntos MN (por el núm. 51). Luego si esta línea de que se trata llega de O hasta A pasa por donde pasaria la perpendicular; y por consiguiente lo será.

Núm. 53. Luego para levantar una perpendicular (Fig. 25) sobre un punto dado O, bastaria lo prime-

Fig. 25.

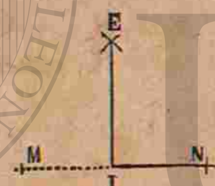


Fig. 26.

ro señalar en esa línea dos puntos MN igualmente distantes de O, y describir desde ellos como de centros dos arcos con igual abertura del compas, de modo que se crucen en A, y tirar la línea desde A hasta O; pues de este modo tenemos que O y A distan igualmente de M y N; y así por estos dos puntos podremos tirar la perpendicular que se desea segun el número precedente.

II.

Núm. 54. Si el punto dado para levantar la per-

pendicular (Fig. 26) fuere I, estremidad de la línea, podremos continuarla; y notando como hicimos arriba los dos puntos MN, si desde estos describimos los dos arcos hallaremos que el punto E es en donde se corta, y desde allí sacaremos la perpendicular hasta I.

III.

Si de las dos estremidades de una línea MN (Fig. 27) describiésemos dos arcos iguales para hallar un punto A igualmente distante de ellas, y repitiésemos la operacion con la misma ú otra abertura de compas para hallar otro punto donde cruce, igualmente distante de ellas, la línea tirada por los dos puntos en donde se cortan los arcos será perpendicular á la primera (núm. 52), y pasará por todos los puntos que tuvieren igual distancia de las estremidades (núm. 55), y así tambien pasará por el medio de la línea I.

Fig. 27.

Núm. 55. Luego para cortar una línea por el medio (Fig. 27) bastará describir desde sus estremidades dos arcos iguales que se crucen ó corten en un punto A, y otros dos que se corten en otro, y tirar una línea por los dos puntos en que se cruzan los arcos.

IV.

Si de un punto A (Fig. 28) describiésemos un arco que corte una línea en dos puntos MN, y de estos

Fig. 28.

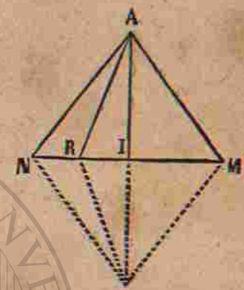


Fig. 29.

como de centro describiésemos dos arcos iguales que se corten en O, la línea AO tendrá los puntos igualmente distantes de MN, y por consiguiente le será perpendicular (núm. 52).

Núm. 56. Luego de este modo de un punto se puede bajar una perpendicular sobre otra línea.

§ VII.

De la línea oblicua.

La línea que se inclina sobre otra mas á un lado que á otro se llama *oblicua*.

Tres consecuencias se sacan de esta nocion.

I.

Que de un punto dado A (Fig. 29) podemos tirar

sobre una misma línea muchas oblicuas, dando mas ó menos inclinacion, aunque sola una perpendicular se puede tirar desde un solo punto.

Si habiendo tirado de A una perpendicular y muchas oblicuas sobre MN (Fig. 29), repitiendo la operacion bácia abajo tirásemos otras líneas iguales, y del mismo modo que las superiores, la línea AIO será recta y perpendicular, pues por la construccion hace los cuatro ángulos rectos (núm. 20), y pasa por donde pasaria la perpendicular AI continuada. Las otras líneas AMO, ARO, ANO, formadas de dos oblicuas inclinadas, serán mayores que la recta. Porque así como si el punto A llegase á O, no por una recta sino por una curva, llegaria mas tarde y andaria mas camino, lo mismo le sucederia si primero fuese á R ó N para ir desde allí á O. Luego la mitad de esas líneas compuestas ARO, ANO, serian mayores que la mitad de la recta AIO.

II.

Núm. 57. Luego la perpendicular es la mas corta de todas las líneas que se pueden tirar desde un punto á otra línea.

III.

Núm. 58. Luego la línea menor que se puede tirar desde un punto á otra línea será perpendicular á esta, supuesto que la menor de todas es una y única, y la perpendicular es esa menor de todas (por el núm. 57).

§ VIII.

De las paralelas.

Núm. 39. Si puesta una línea sobre otra fuésemos apartando igualmente las estremidades de una de los lugares en donde estaban (Fig. 30), estas líneas

Fig. 30.

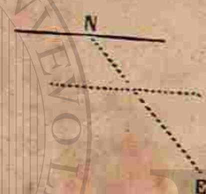


Fig. 31.

conservarian entre sí igual distancia, pues el movimiento fué igual; y esto se entiende, ó bien se haga el movimiento por una línea perpendicular, como MO (Fig. 30), ó bien por una linea oblicua como NE (Fig. 31).

Núm. 40. Estas líneas que conservan entre sí distancia igual por todas partes se llaman, como hemos dicho, *paralelas*.

De esta simple nocion de las paralelas se sacan las consecuencias siguientes:

I.

Si ajustásemos dos ángulos iguales (Fig. 32) EAM, ION, y despues hiciésemos mover la línea OM por encima de la línea AM, daremos igual movimiento

á todos los puntos de la línea OI; por consiguiente

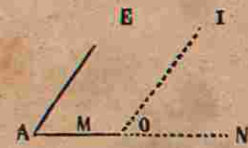


Fig. 32.

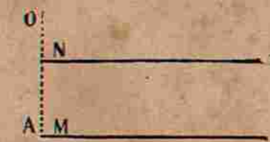


Fig. 33.

quedarán sus puntos igualmente distantes de los puntos correspondientes en la línea AE, y así las dos líneas serán paralelas.

Todas las veces pues que dos ángulos sean iguales, podemos ajustar muy bien uno con otro, y despues separarlos, como acabamos de hacer ahora.

Núm. 41. Luego siempre que dos líneas caen sobre otra, y hacen á la misma parte ángulos iguales, son paralelas.

Núm. 42. Luego siempre que dos líneas caen sobre otra, y son perpendiculares por hacer á la misma parte ángulos rectos, serán entre sí paralelas.

Luego para tirar una línea paralela á otra por un punto dado N (Fig. 33), bastará levantar una perpendicular AO que pase por el punto dado N, y despues levantar desde este punto otra que no sea perpendicular á la primera que se levantó.

Si dos líneas pues cayendo una sobre otra, v. g. si AEOI cayendo sobre AN son paralelas (Fig. 32), los puntos de una distarán igualmente de los que les corresponden en la otra; y así haciendo mover ON sobre AM, se ajustarán las dos líneas paralelas, y los dos ángulos tambien quedarán ajustados el uno con el otro, lo que no podria ser si no fuesen iguales.

Núm. 43. Luego cuando dos líneas son paralelas (Fig. 52) harán á la misma parte los ángulos iguales.

Considerando yo (Fig. 54), veo que si las dos pa-

Fig. 54.

Fig. 55.

ralelas caen sobre otra tercera AO, tambien la línea AO va á encontrar las dos paralelas.

Núm. 44. Luego cuando una recta cae sobre dos paralelas hace por la misma parte ángulos iguales, y cuando una recta hiciere con dos líneas ángulos iguales por la misma parte, las dos son paralelas.

Supongamos ahora (Fig. 55) que formamos dos ángulos, cuyos lados sean respectivamente paralelos, y que prolongamos una de las líneas AO hasta encontrar un lado del otro ángulo E. En este caso el ángulo A será igual á O, pues una línea corta dos paralelas (núm. 54); y ademas de esto O será igualá E, porque dos paralelas caen sobre una línea (núm. 43). Luego A es igual á E.

Núm. 45. Luego todos los ángulos hechos por paralelas son iguales.

Cuando una recta corta dos paralelas (Fig. 56), los ángulos contrapuestos AO como tambien OM se

llaman *alternos*, por razon de estar el uno bajo la una paralela, y el otro encima de la opuesta; y si el uno está á la izquierda de la línea que corta, el otro está á la derecha; por la misma razon son alternos EN, y tambien IR.

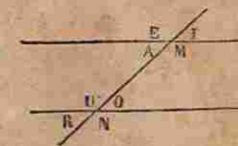


Fig. 56.

Ahora bien ya hemos dicho que A es igual á I opuesto en el vértice (núm. 15); tambien dijimos que el ángulo I era igual á O por las paralelas (núm. 43); y así A es igual á O por ser su alterno.

Núm. 46. Luego todos los ángulos alternos son iguales entre sí.

Luego cuando una recta cortando dos rectas hiciere los ángulos alternos iguales, las dos líneas son paralelas. Porque si O es igual á A, como A es igual á I, verticalmente opuesto, viene á ser O igual á I, y entonces por el número 44 serán las dos líneas paralelas.

Cuando una recta corta dos paralelas (Fig. 56) decimos que M junto con I valen dos rectos (núm. 11), y que I es igual á O por las paralelas; luego M junto con O valen dos rectos.

Núm. 47. Luego cuando una recta cortase dos paralelas, los dos ángulos internos hácia la misma parte valen dos rectos. La misma demostracion se aplica á los ángulos esternos de la misma parte.

Luego cuando una recta corta dos paralelas los ángulos esternos hácia la misma parte valen dos rectos. Y así I mas N son iguales á dos rectos, como tambien E mas R.

§ IX.

De las tangentes de los círculos.

Núm. 48. Cuando una recta toca un círculo sin poderle cortar, aunque se la prolongue por ambas partes, se llama *tangente*.

Ahora, pues, la recta nunca puede coincidir con la curva, ni la tangente con la circunferencia. Luego la recta que toca en la circunferencia, si la prolongan entrará en la circunferencia, ó saldrá fuera de ella; si entra, será *secante*, si sale será *tangente*.

Núm. 49. Luego la tangente solo toca en el círculo por un punto O (Fig. 37).

Fig. 37.

Fig. 38.

Núm. 50. Si del centro de un círculo A tirásemos una línea (Fig. 38) al punto del contacto O, y ademas de esto otras muchas hasta tocar en la tangente, sola la del contacto quedará sin salir del círculo, pues todos los demas puntos de la tangente están fuera de él.

Núm. 51. Luego el radio, que es la única línea que llega al punto del contacto, es la menor línea que se puede tirar desde el centro á la tangente.

Núm. 52. Luego el radio del contacto es perpendicular sobre la tangente, y la tangente lo es sobre el radio (núm. 38 y 22).

Núm. 53. Luego no se pueden tirar muchas tangentes á un mismo punto del círculo (Fig. 39), por-

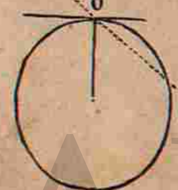


Fig. 39.

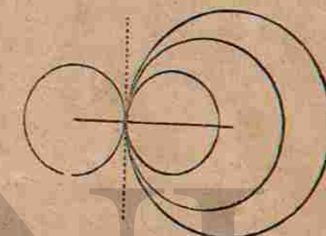


Fig. 40.

que entonces habria muchas perpendiculares sobre el mismo punto del radio O, lo que es imposible (núm. 23).

Núm. 54. Luego si muchos círculos (Fig. 40) se tocan en un punto comun, todos tendrán la misma tangente en este punto; pues no puede haber muchas en un mismo punto (núm. 53).

Ahora bien, cuando muchos círculos se tocan en un punto comun, todos los radios que vienen á parar al punto del contacto son perpendiculares á la tangente en este punto (núm. 52); y no pudiendo haber muchas perpendiculares sobre un solo punto (núm. 23), es preciso que estos radios hagan una sola línea.

Núm. 55. Luego cuando muchos círculos se tocan en un solo punto, los radios hacen una sola línea.

Los centros, pues, de estos círculos son las estremidades de los radios, los cuales todos están en una línea recta.

Núm. 56. Luego cuando muchos círculos se tocan en un solo punto, todos sus centros están en la misma línea recta.

Núm. 57. Luego si nos dieren un círculo M (Fig. 41), y nos pidieren el centro de cualesquiera otros

Fig. 41.

Fig. 42.

que le toquen en un punto determinado A, para hallarle bastará tirar desde el centro I una línea por el punto del contacto y prolongarla.

Por cuanto en esta línea prolongada se hallarán los centros de todos los círculos imaginables que pueden tocar el círculo M en el punto dado A (núm. 56).

§ X.

De las perpendiculares en los círculos.

Tirada una cuerda en el círculo (Fig. 42), y sobre

ella levantada una perpendicular, observamos que si la perpendicular pasa por el centro ya tiene un punto igualmente distante de las estremidades de la cuerda, porque estan en la circunferencia; y así (núm. 50) la perpendicular ha de pasar por todos los puntos que distan igualmente de ellas : uno, pues, de estos puntos es el medio de la cuerda.

Núm. 58. Luego la perpendicular sobre la cuerda si pasa por el centro la corta por el medio.

Núm. 59. Luego si la perpendicular pasa por el medio de la cuerda, pasa tambien por el centro (Fig. 42), porque aquí vale la misma razon del núm. 50.

Del mismo modo debemos discurrir acerca del arco, porque el medio del arco dista igualmente de las estremidades de la cuerda, pues esas mitades del arco son arcos iguales que tienen cuerdas iguales, y estas cuerdas son las distancias de las estremidades; y así la perpendicular que debe pasar todos los puntos que distan igualmente de las estremidades de la cuerda pasará tambien por el medio del arco (Fig. 42).

Núm. 60. Luego si la perpendicular pasa por el centro ó por el medio de la cuerda, pasará tambien por el medio del arco, como tambien si pasare por medio del arco, tambien pasará por el medio de la cuerda y del centro si la prolongan, por la misma razon del núm. 50.

Si en un círculo hubiese dos cuerdas (Fig. 43) paralelas entre sí y á una tangente, la perpendicular que pasare por el centro dividirá los arcos por el medio de este modo : *ea*, *eo*, serán iguales, como

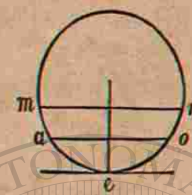


Fig. 43.

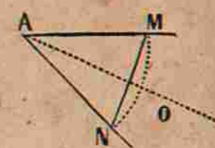


Fig. 44.

tambien *em*, *en*; por consiguiente, quitando de cada arco grande ó pequeño que en él se incluye, los restos *ma*, *no*, serán iguales.

Núm. 61. Luego los arcos de un círculo comprendidos entre paralelas son iguales.

Dijimos que la perpendicular que pasa por el medio de la cuerda corta al arco por el medio (núm. 60), y que los arcos son la medida de los ángulos núm. 8).

Luego si nos dieren un ángulo A (Fig. 44), para dividirle por el medio bastará describir desde su vértice como de centro un arco MN, y tirarle su cuerda, dividiendo esta por el medio con la perpendicular AO, supuesto que dividida la cuerda por el medio se divide por consiguiente el arco, el cual es la medida del ángulo.

Dijimos que la perpendicular sobre el medio de la cuerda pasa por el centro del círculo que hubiere de pasar por las estremidades de ella (núm. 59).

Núm. 62. Luego si nos dieren tres puntos (Fig. 45) M, N, O, que no esten en línea recta, y pidieren

un círculo que pase por todos ellos, resolveremos el problema del modo siguiente :

1. Ataremos los tres puntos por medio de dos líneas ON, OM.

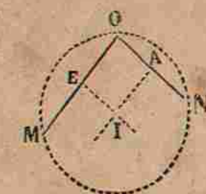


Fig 45.

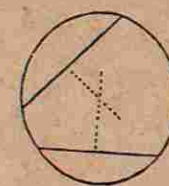


Fig. 46.

2. Levantaré del medio de cada una de ellas las perpendiculares, y estas se cortarán en I, y en donde se cortan ó cruzan me darán el centro del círculo deseado.

Porque la perpendicular AI demuestra que el centro del círculo que pasa por NO debe estar en ella : la perpendicular EI manifiesta que el centro del circulo que pasare por MO debe estar en ella. Luego ambas juntas demuestran que el círculo que hubiere de pasar por los tres puntos MNO debe tener el centro en el punto I, comun á entrambas.

Núm. 63. Luego para hallar el centro de un círculo (Fig. 46) bastará tirar dos cuerdas, y sobre el medio de cada una de ellas levantar su perpendicular, y entonces el punto en que se crucen será el centro deseado, por la razon del número precedente.

§ XI.

Problemas sobre los círculos que tocan á otros en puntos dados en la periferia, y pasan por puntos dados fuera de ella.

I.

Si te dieren, Eugenio, un círculo A (Fig. 47), y

Fig. 47.

Fig. 48.

en él un punto M, para el contacto de un nuevo círculo que debe pasar por B, se hará lo siguiente :

1. Por el núm. 52 : todo círculo que hubiere de tocar en M ha de tener el centro en una línea que pase por ese punto y por el centro del círculo A; consiguiente estará el centro del nuevo círculo en la línea indefinita AMO.

2. Ademas de esto el circulo pedido no solo ha de pasar por M, sino tambien por B : para esto, pues, tirada la línea BM se levantará en el medio de ella la perpendicular EI, la cual (núm 57) debe pasar por el centro de cualquier círculo, cuya circunferencia haya de pasar por los puntos BM.

Núm. 64. Luego el centro del nuevo círculo que

toque en M y pase por B debe estar en el punto R, en el cual se cruzan las dos líneas.

II.

Núm. 65. Si el punto B dado fuera del círculo (Fig. 48) quedase dentro de la tangente que se retirase por el punto de contacto M, se debe hacer la misma operacion, y se hallará que el centro R cae en el punto en que se cruzan las dos líneas; y en este caso el nuevo círculo incluye al antiguo.

Núm. 66. Si el punto dado B (Fig. 49) por donde

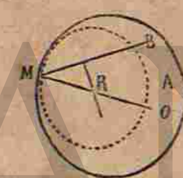


Fig. 49.

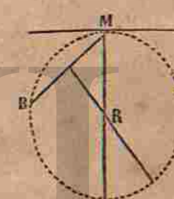


Fig. 50.

ha de pasar el nuevo círculo cayere dentro del círculo antiguo, siempre se hallará el centro por la misma operacion en el punto R, y el nuevo círculo quedará incluido dentro del primero.

Núm. 67. Si te diesen una línea recta (Fig. 50), y en ella un punto M, para que en él toque un círculo, el cual haya de pasar por el punto dado B, harás como se sigue : levántese una perpendicular M, porque en ella ha de estar el centro del círculo que se pide (núm. 53) : tírese despues la línea BM, y del medio de ella levántese una perpendicular, la cual pasará por el centro del nuevo círculo, y la circunferencia de este irá por B y M; y, como queda dicho (núm. 59), el punto en donde se cortan ó cruzan R será el centro.

Esta carta, amigo, se ha dilatado mucho mas de lo que yo habia pensado, bien que la deduccion de las verdades que iban espontáneamente naciendo de las que ya estaban dichas no me permitia cortar el hilo: perdóname, aunque no te prometo la enmienda.

CARTA DÉCIMASESTA.

DE LA MEDIDA DE LOS ANGULOS.

§ I.

De la medida de los ángulos que tienen el vértice en la circunferencia.

Amigo Eugenio, supuesto que hayas entendido todo lo que te dije en la carta antecedente, y el grande gusto que me insinuas en que yo continue esta instruccion, prosigo; y te advierto que aunque el ángulo, segun la definicion que dimos, es formado por dos radios ó por dos cualesquiera líneas que se consideren como tales, y se debe medir poniendo el compas en su vértice, y describiendo un arco que corte los dos lados á igual distancia para conocer el valor del ángulo, no obstante, muchas veces no se necesita de esta diligencia para saber su valor, como sucede en los ángulos que tuvieren el vértice en la circunferencia, porque fácilmente se conoce cual sea su medida.

circunferencia de este irá por B y M; y, como queda dicho (núm. 59), el punto en donde se cortan ó cruzan R será el centro.

Esta carta, amigo, se ha dilatado mucho mas de lo que yo habia pensado, bien que la deduccion de las verdades que iban espontáneamente naciendo de las que ya estaban dichas no me permitia cortar el hilo: perdóname, aunque no te prometo la enmienda.

CARTA DÉCIMASESTA.

DE LA MEDIDA DE LOS ANGULOS.

§ I.

De la medida de los ángulos que tienen el vértice en la circunferencia.

Amigo Eugenio, supuesto que hayas entendido todo lo que te dije en la carta antecedente, y el grande gusto que me insinuas en que yo continue esta instruccion, prosigo; y te advierto que aunque el ángulo, segun la definicion que dimos, es formado por dos radios ó por dos cualesquiera líneas que se consideren como tales, y se debe medir poniendo el compas en su vértice, y describiendo un arco que corte los dos lados á igual distancia para conocer el valor del ángulo, no obstante, muchas veces no se necesita de esta diligencia para saber su valor, como sucede en los ángulos que tuvieren el vértice en la circunferencia, porque fácilmente se conoce cual sea su medida.

Pero de tres modos puede ser el ángulo que tiene el vértice en la circunferencia,

1. Si uno de los lados pasare por el centro (Fig. 51).

Fig. 51.

Fig. 52.

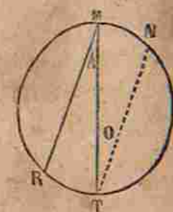


Fig. 53.

2. Si el centro quedase entre los lados (Fig. 52.

3. Si el centro estuviese fuera del ángulo (Fig. 53).

En el primer caso (Fig. 51), si por el centro se tirase una paralela al lado AR, quedará el ángulo central I igual al de la circunferencia O por causa de las paralelas (núm. 45). Luego el arco MN será medida de I y tambien de O.

Veamos ahora si el arco MN es la mitad del arco total AN, comprendido por el ángulo O. Los ángulos Ei verticalmente opuestos son iguales (núm. 47). Luego MN es igual á RT. Ahora, pues, RT tambien es igual á AM, por ser arcos comprendidos entre paralelas (núm. 61). Luego MN es igual á MA; y por consiguiente MN, medida del ángulo O, es la mitad del arco AN comprendido por él.

Núm. 68. Luego en el primer caso el ángulo de la circunferencia tiene por medida la mitad de su arco.

En el segundo caso (Fig. 52), en que el centro queda comprendido dentro del ángulo, tírese desde el vértice A un diámetro, que divida el ángulo total en *mn*, y cada uno de ellos quedará en los términos del caso antecedente, y por eso tendrá por medida la mitad de su arco parcial.

Núm. 69. Luego en este segundo caso el ángulo de la circunferencia A tiene por medida la mitad de su arco total.

En el tercer caso (Fig. 53), en que el centro queda fuera del ángulo A, hágase lo siguiente.

Núm. 70. Tírese del punto T una línea TN paralela al primer lado RM : en este caso los ángulos OA son alternos é iguales, y tendrán la misma medida (núm. 46); pero el ángulo O por el caso precedente tiene por medida la mitad del arco MN, ó de su igual RT (núm 61). Luego A subalterno tendrá por medida la mitad de su arco RT.

Núm. 71. Si el nuevo ángulo O todavía no comprendiere el centro como se ve en (Fig. 54), se irán tirando sucesivamente paralelas al primer lado A, y despues al segundo, y de aquí al tercero, etc., hasta que un ángulo comprenda el centro ó pase por él, y entonces se discurre como arriba; pues todos los ángulos siendo alternos serán iguales, y todos los arcos estando entre paralelas tambien lo serán (núm. 61).

Fig. 54.

Núm. 72. Luego en todos los casos posibles el ángulo que tiene el vértice en la circunferencia tiene por medida la mitad de su arco.

De este conocimiento se siguen las consecuencias siguientes :

I.

Núm. 73. Luego (Fig. 55) todos los ángulos que

Fig. 55.

Fig. 56.

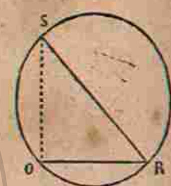


Fig. 57.

tienen el vértice en la circunferencia, y se apoyan sobre el mismo arco, son iguales, pues tienen la misma medida; y así los ángulos A, B, C, son iguales.

II.

Núm. 74. Luego el ángulo en la circunferencia (Fig. 56) apoyado sobre todo el diámetro es, recto, pues tiene por medida la mitad del semicírculo.

III.

Dada la recta OR (Fig. 57), la cual no se pueda alargar, si quisieren levantar de su estremidad O una perpendicular se hará lo siguiente.

Póngase el compas en un punto arbitrario, ábrase hasta que llegue al punto dado O, y descríbase un círculo, el cual cortará la recta dada en R : de aquí

tírese una línea por el centro, la que irá á terminar en S, y de este punto bájese una línea hasta O.

Esta línea hará con la dada un ángulo O que tiene el vértice en la circunferencia, y está apoyado sobre todo el diámetro RS : por consiguiente es recto; y así una línea es perpendicular á la otra.

Núm. 75. Luego por el ángulo en la circunferencia podemos levantar una perpendicular en la estremidad de una línea dada.

Si dado un círculo A (Fig. 58) se quisiere hallar el punto en que una tangente tirada desde el punto B toque al círculo dado, se hallará por el método siguiente.

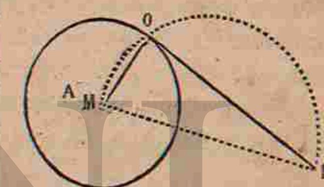


Fig. 58.

Tírese de M, centro del círculo A, una línea hasta B : descríbase sobre esta línea un círculo : el punto en que este cortare al antiguo ángulo A será el punto del contacto de la tangente.

Porque tirando la línea OM, ya tenemos el ángulo O, cuyo vértice está en la circunferencia, y está apoyado sobre el diámetro MB : por consiguiente es recto, y por ser OM un rayo : OB será tangente (núm. 52).

Núm. 76. Luego por el ángulo en la circunferencia podemos hallar el punto de contacto de una tangente tirada desde un punto dado, y sobre un círculo dado.

§ II.

De la medida de los ángulos formados en el círculo.

= Amigo, los ángulos en la circunferencia siempre son formados por dos cuerdas, ó un diámetro con una cuerda; pero como en el círculo hay varias líneas que no son cuerdas ni diámetros, ya se advierte que hay varios ángulos diferentes de los que hemos examinado, y es preciso tratar de todos con separacion.

El ángulo formado por la tangente y por una cuerda nacida del punto de contacto (Fig. 59), ó ha de

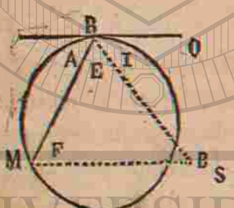


Fig. 59.

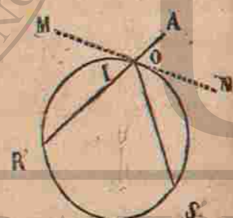


Fig. 60.

ser agudo ú obtuso: ambos los hemos de medir, y así empezaremos por el agudo A.

Pues sabemos medir los ángulos en la circunferencia, reduciré el ángulo de la cuestion A á otro igual en la circunferencia F, y esto ha de ser por medio de una línea MS paralela á la tangente: como F y A son alternos, la medida del uno será medida

del otro (núm. 46); pero el ángulo F tiene por medida la mitad del arco RS (núm 72), ó la mitad de MR su igual, por ser comprendidos entre paralelas (núm. 61). Luego tambien el ángulo A tiene por medida la mitad de ese mismo arco MR comprendido en él.

En cuanto al ángulo obtuso M, R, O, divídase en dos por medio de una cuerda, sea la que fuese RB, y en este caso el ángulo de la cincunferencia tiene por medida la mitad de su arco MB (núm. 72): el ángulo de la tangente en I tiene por medida la mitad de su arco BR, por lo que se acaba de decir, por consiguiente el ángulo total M, R, O, tiene por medida la mitad del arco total M, R, B.

Núm. 77. Luego todo el ángulo formado por cuerda y tangente tiene por medida la mitad del arco que comprende. Estos ángulos tambien se llaman ángulos en el segmento.

Ademas de estos ángulos se puede formar otro por una cuerda, y la continuacion de otra, v. g. el ángulo S, O, A (Fig. 60).

Para medir este ángulo divídase el ángulo total con una tangente MN: esto hecho, el ángulo inferior S, O, N tendrá por medida la mitad del arco SO que en sí comprende (núm. 77), y el ángulo superior N, O, A como es igual á I, por serle opuesto en el vértice, tendrá la misma medida de él, la que es la mitad del arco RI, por la misma razon del número preferente.

Núm. 78. Luego el ángulo total S, O, A hecho por una cuerda y la continuacion de otra, tiene por medida la mitad del arco comprendido, y mas la mitad del arco opuesto.

Tambien se puede formar un ángulo (Fig. 61)

Fig. 61.

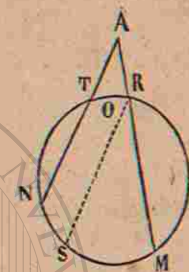


Fig. 62.

dentro del círculo, cuyo vértice se quede entre el círculo y la circunferencia.

Para medir este ángulo A prodúzcanse ó contiņúense ambos lados hasta la circunferencia, y del punto O tírese una línea paralela á AN : esto hecho, el ángulo O es igual A (núm. 45), y tendrá por medida la mitad del arco M, N, R (núm. 72), ó la mitad de MN y la mitad de NR ; pero el arco NR es igual á ST comprendidos entre paralelas; y por consiguiente en lugar de la mitad de NR podemos sustituir ST. Luego esta misma será la medida del ángulo A su igual.

Núm. 79. Luego todo ángulo, cuyo vértice está entre el centro y la circunferencia, tiene por medida lo mitad del arco cóncavo sobre que estriba, y la mitad del convexo comprendido entre sus lados, si estos se prolongaran.

Ultimamente se puede formar un ángulo por dos

secantes que se junten fuera del círculo, y por consiguiente tendrá su vértice fuera de la circunferencia (Fig. 62).

Para medir este ángulo A, redúzcasele á otro igual ó hecho en la circunferencia por medio de una paralela RS : es así que este ángulo O tiene por medida la mitad de su arco SM ; y por consiguiente si yo le diera por medida la mitad del arco total NM, debiera descontar lo que le dí de mas, que es la mitad de NS, ó la mitad de TR su igual (por el núm 61) ; y así tomando la mitad del arco cóncavo NM, menos la mitad del convexo TR, tendremos la medida verdadera de O, ó de A su igual.

Núm. 80. Luego el ángulo, cuyo vértice queda fuera de la circunferencia, tiene por medida la mitad del arco cóncavo, menos la mitad del convexo.

§ III.

De la medida de los ángulos en los triángulos.

Desembarazados ya, amigo Eugenio, de la medida de los ángulos que pertenecen al círculo, vamos á medir los ángulos en los triángulos.

Llamamos *triángulo* una figura formada por tres líneas rectas, las que por consiguiente forman tres ángulos. Cualquiera de estos ángulos se puede llamar *vértice* del triángulo, y entonces las líneas que forman el ángulo del vértice se llaman *lados*, y la otra línea opuesta al vértice se llama *base*.

Esto supuesto, si consideramos los lados del triángulo hallamos tres especies de triángulos, porque ó los tres lados son iguales, y se llamará *equilátero* (Fig. 63), ó solo tiene dos lados iguales, y se


Fig. 63.


Fig. 64.


Fig. 65.

llamará el triángulo *isósceles* (Fig. 64), ó ninguno de los lados es igual á otro, y entonces se llama el triángulo *escaleno* (Fig. 65).

Considerando los ángulos de los triángulos hallamos otras tres especies, porque si tiene un ángulo recto, se llama *rectángulo* (Fig. 66). Si tiene un án-


Fig. 66.


Fig. 67.

gulo obtuso, se llama *obtusángulo* (Fig. 67). Si tiene todos los ángulos agudos, se llama *acutángulo* (Fig. 63 y 64).

Para saber el valor de los ángulos de cualquiera triángulo podremos tirar por el vértice (Fig. 68) una paralela á la base.

Fig. 68.

Esto hecho, se ve que M es

igual á su alterno O, así como N es igual al suyo E (núm. 46), pero M, A, N tienen el valor de dos rectos (núm. 11): luego O, A, E tienen ese mismo valor. En cualquier triángulo, pues, que sea rectilíneo podemos hacer esta misma demostracion.

Núm. 81. Luego todo triángulo rectilíneo tiene en sus tres ángulos el valor de dos rectos. De este conocimiento se siguen las consecuencias siguientes :

I.

Núm. 82. Luego en un triángulo no puede haber dos ángulos rectos, porque entonces estos dos con el tercer ángulo tendrian el valor de mas de dos rectos.

II.

Núm. 83. Luego en un triángulo no puede haber dos ángulos obtusos, por la misma razon.

III.

Núm. 84. Luego sabiéndose el valor de un ángulo se sabrá el valor de la suma de los otros dos, porque este será lo que falta para el valor de dos rectos.

IV.

Núm. 85. Luego sabiéndose el valor de dos ángulos se sabrá el valor del tercero, porque este será lo que faltare á la suma de los dos para llegar á 180 grados, valor de dos rectos.

V.

Núm. 86. Luego si un triángulo tiene dos ángulos iguales á dos de otro triángulo, el tercer ángulo será tambien igual al tercero del otro.

Núm. 87. Si se prolongase un lado de cualquier triángulo (Fig. 69), este ángulo que se continuase

Fig. 69.


Fig. 70.

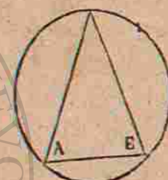


Fig. 71.

haria un nuevo ángulo con el lado AM, y se llama ángulo esterno.

Este ángulo A, que junto con E vale dos rectos (núm. 41), tambien junto con NM vale dos rectos, por lo que se acaba de decir; y así tanto vale el ángulo E solo como el M y el N juntos.

Núm. 88. Luego el ángulo esterno de cualquiera triángulo es igual á los dos internos opuestos.

Esta misma verdad de que los tres ángulos de cualquiera triángulo rectilíneo son iguales á dos rectos, se conoce tirando por los tres ángulos un círculo (Fig. 70); porque entonces por estar los tres ángulos en la circunferencia, cada uno tiene por medida la mitad de su arco, y por consiguiente entre todos tres la mitad del círculo, la que es la medida de dos rectos. De aquí se sacan otras consecuencias.

I.

En el triángulo equilátero los tres lados (Fig. 70) son tres cuerdas iguales que sostienen arcos iguales (núm. 6); por consiguiente siendo las mitades de estos iguales, dan á los tres ángulos opuestos medidas iguales.

Núm. 89. Luego todo triángulo equilátero es equiángulo.

II.

Por la misma razon, si los tres ángulos de un triángulo son iguales tendrán medidas iguales, y los arcos opuestos serán iguales, lo cual pide cuerdas ó lados iguales (núm. 5).

Núm. 90. Luego todo triángulo equiángulo es equilátero.

III.

Haciéndose la misma operacion en el triángulo isósceles (Fig. 71), se ve que los dos lados iguales piden dos arcos iguales, los cuales dan iguales medidas á los ángulos opuestos.

Y del mismo modo si dos ángulos AE son iguales, deben tener medida igual en los arcos opuestos; y estos por ser iguales piden cuerpos ó lados iguales (núm. 5).

Núm. 91. Luego todo triángulo isósceles tiene dos ángulos iguales.

Núm. 92. Luego todo triángulo que tiene dos ángulos iguales será isósceles.

10.

IV.

Al triángulo escaleno (Fig. 72) por tener todos los

Fig. 72.

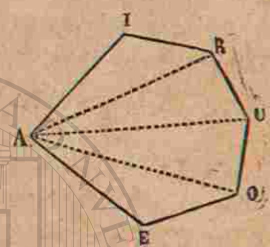


Fig. 73.

lados desiguales, y por ser los lados cuerdas, forzosamente han de corresponder arcos desiguales; y por consiguiente la medida de los ángulos opuestos ha de ser desigual.

Núm. 93. Luego el triángulo escaleno tiene todos los ángulos desiguales, y todo triángulo que tenga los tres ángulos desiguales será escaleno.

V.

Núm. 94. Luego en el triángulo escaleno (por la misma razon) el mayor ángulo debe estar opuesto al mayor lado, y el ángulo menor al menor lado.

§ IV.

De la medida de los ángulos en los polígonos.

Llamamos polígono toda figura terminada por mas

de cuatro líneas rectas; pero como ya sabemos valuar los ángulos de los triángulos, bastará dividir los polígonos en triángulos (Fig. 73), tirando varias líneas de un ángulo hácia los otros; y de este modo medidos los ángulos de los triángulos quedarán medidos los del polígono.

En esta division sucede necesariamente que las líneas tiradas de A á los dos ángulos próximos coinciden con los dos lados inmediatos del polígono; por consiguiente hay dos líneas inútiles que no dividen el polígono en triángulos.

Considerando, pues, todos los triángulos con los vértices en el punto A, de donde salieron las líneas de division vemos, que todos los lados del polígono son bases de triángulos, escepto los dos lados AE, AI, que son los lados inmediatos.

Núm. 95. Luego en el polígono dividido habrá tantos triángulos cuantos fueren los lados, suprimiendo primero dos lados que no entran en cuenta.

Núm. 96. Luego en los polígonos habrá el valor de tantos rectos cuanto es el duplo de sus lados, habiendo suprimido dos de estos lados; ó de otro modo: en el polígono hay el valor de tantos rectos cuanto es el duplo de los lados menos cuatro rectos.

Luego en el pentágono, que es el polígono de cinco lados, se hallará el valor de seis rectos; porque quitando dos lados de los cinco quedan tres, y el duplo de estos es seis. En el exágono ó de seis lados habrá el valor de ocho rectos; en el eptágono ó de siete lados habrá el valor de diez; el octógono ó de ocho lados tendrá el valor de doce; el decágono de diez lados el de diez y seis; el dodecágono de doce lados tendrá valor de veinte rectos, etc.

Sabido el valor de la suma de los ángulos internos, de los polígonos, esto es, los ángulos que se forman dentro de ellos, conviene saber valuar la suma de los ángulos esternos, ó de los ángulos que habria si se continuasen todos los lados hácia fuera y hácia la misma parte como en la (Fig. 74).

Fig. 74.

Fig. 75.

Para esto tómese cualquiera de los ángulos, v. g. A, y en su vértice por medio de las paralelas á los demas lados formemos ángulos iguales á todos los ángulos esternos; de suerte que *b* quedará igual á B, porque la línea *b*2 será paralela á B2, y por la misma razon el ángulo *c* es igual á C, y así de los demas, por razon de estar todos hechos por paralelas (núm. 45). Pero sabemos por el núm. 42 que los ángulos formados alrededor de un punto tienen el valor de cuatro rectos.

Núm. 97. Luego todos los ángulos esternos de un polígono, sea el que fuere, valen cuatro rectos.

Núm. 98. En los polígonos regulares, esto es (Fig. 75), en los que tienen todos los lados iguales y los ángulos iguales es muy facil valuar, no solamente la suma de todos los ángulos internos, como lo hemos hecho (núm. 96), sino tambien valuar á cada uno de ellos, solo con repartir la suma por el número de los ocho ángulos. De este modo se ve que el exágono tiene ángulos de 120 grados cada uno, porque la suma de ocho rectos ó 720 grados se reparte entre los seis ángulos, en el pentágono tenemos seis ángulos de 108, etc.

Núm. 99. Tomemos ahora un exágono regular, ó que en todos sus ángulos y lados sea igual y semejante: describamos un círculo que pase por los tres ángulos *aei* (Fig. 76) por el método que enseñé (núm. 62), y se hallará por centro el punto T: si se repitiere la operacion respecto de los ángulos *eio*, y de los demas sucesivamente, se hallará el mismo punto T por centro, porque cortando la perpendicular *m*T en T por la perpendicular al lado *ae*, tambien se verá cortada allí mismo por la otra perpendicular al lado *io* por ser igual á *ae*, y tan inclinada como ella *a*, *e*, *i*, si es perfecta la regularidad del polígono. Luego el círculo descrito desde el punto T no solamente pasará por *aei*, sino tambien por *ovs*.

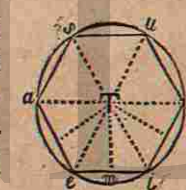


Fig. 76.

Núm. 100. Tiremos ahora desde el centro líneas á todos los ángulos (Fig. 77): los ángulos del centro todos serán de 60 grados para componer juntos el valor de 360 : los ángulos de la circunferencia

Fig. 77.

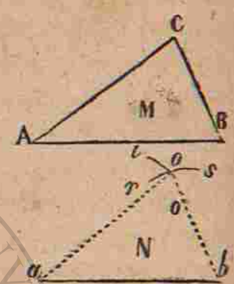


Fig. 78.

antes de ser divididos eran de 120, y ahora quedarán de 60. Luego el triángulo *eMi* es equiángulo. Lo mismo se dice de los otros triángulos, y todos los rayos M*a*, M*e*, M*i*, etc., serán iguales á los lados (núm. 90). Esto supuesto :

Núm. 101. Este círculo será formado de seis arcos, y la circunferencia del polígono es compuesta de seis cuerdas que sostienen esos arcos ; y como cada uno de ellos es mayor que su cuerda, los seis arcos ó la circunferencia del círculo será mayor que los seis lados que hacen el circuito del polígono ; pero estos seis lados son iguales á los seis rayos (núm. 100) ó á tres diámetros.

Núm. 102. Luego la circunferencia del círculo es mayor que tres diámetros de este, esto es, que si el diámetro vale siete la circunferencia ha de valer mas de 21.

Núm. 103. Hasta hoy no se ha hallado geométricamente la proporcion que tiene la circunferencia del círculo con su diámetro ; en esto consiste la

grande dificultad de la cuadratura del círculo, ó de reducirle al espacio de un cuadrado perfectamente igual : no obstante, Arquimedes halló que el diámetro comparado con la circunferencia era como siete á casi 22, bien que algo menos que 22. De esta proporcion se sirven comunmente los geómetras, despreciando como muy leve el yerro que hay en ella ; y aunque haya otros números que se acerquen con mas exactitud á la razon que hay entre el diámetro y la circunferencia, usaremos de estos de Arquimedes por ser mas sencillos.

§ V.

Modo de formar triángulos ó polígonos iguales á los que nos dieren.

Núm. 104. Dado un triángulo A, B, C (Fig. 78), si nos pidieren otro triángulo igual y semejante le podemos hacer por varios modos : los mas comunes son tres :

Núm. 105. 1º Midiendo los tres lados.

2º Midiendo dos lados y el ángulo incluso.

3º Midiendo un lado y los dos ángulos adyacentes.

Primer modo. — Midiendo los tres lados.

Núm. 106. Pondré una base *ab* igual á AB (Fig. 78) : tomaré despues con el compas la distancia AC, y describiré un arco desde el punto *a* como centro ; y últimamente tomando con el compas la otra línea el valor de 360 : los ángulos de la circunferencia

Fig. 77.

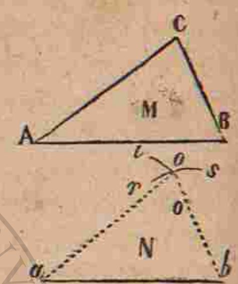


Fig. 78.

antes de ser divididos eran de 120, y ahora quedarán de 60. Luego el triángulo *eMi* es equiángulo. Lo mismo se dice de los otros triángulos, y todos los rayos M*a*, M*e*, M*i*, etc., serán iguales á los lados (núm. 90). Esto supuesto :

Núm. 101. Este círculo será formado de seis arcos, y la circunferencia del polígono es compuesta de seis cuerdas que sostienen esos arcos; y como cada uno de ellos es mayor que su cuerda, los seis arcos ó la circunferencia del círculo será mayor que los seis lados que hacen el circuito del polígono; pero estos seis lados son iguales á los seis rayos (núm. 100) ó á tres diámetros.

Núm. 102. Luego la circunferencia del círculo es mayor que tres diámetros de este, esto es, que si el diámetro vale siete la circunferencia ha de valer mas de 21.

Núm. 103. Hasta hoy no se ha hallado geométricamente la proporcion que tiene la circunferencia del círculo con su diámetro; en esto consiste la

grande dificultad de la cuadratura del círculo, ó de reducirle al espacio de un cuadrado perfectamente igual : no obstante, Arquimedes halló que el diámetro comparado con la circunferencia era como siete á casi 22, bien que algo menos que 22. De esta proporcion se sirven comunmente los geómetras, despreciando como muy leve el yerro que hay en ella ; y aunque haya otros números que se acerquen con mas exactitud á la razon que hay entre el diámetro y la circunferencia, usaremos de estos de Arquimedes por ser mas sencillos.

§ V.

Modo de formar triángulos ó polígonos iguales á los que nos dieren.

Núm. 104. Dado un triángulo A, B, C (Fig. 78), si nos pidieren otro triángulo igual y semejante le podemos hacer por varios modos : los mas comunes son tres :

Núm. 105. 1º Midiendo los tres lados.

2º Midiendo dos lados y el ángulo incluso.

3º Midiendo un lado y los dos ángulos adyacentes.

Primer modo. — Midiendo los tres lados.

Núm. 106. Pondré una base *ab* igual á AB (Fig. 78) : tomaré despues con el compas la distancia AC, y describiré un arco desde el punto *a* como centro; y últimamente tomando con el compas la otra línea

BC describiré otro arco desde el punto *b*, los cuales se cruzan ó cortan en C; y desde este punto tiraré dos líneas hácia *a* y hácia *b*, y tendremos el triángulo *abc*, el que vamos á examinar si es igual ó no al que nos dieron ABC.

Núm. 107. Como AB es igual á *ab* podremos poner el un ángulo sobre el otro, y ajustar las dos bases: hecho esto, necesariamente ha de caer el punto C en el arco *io* que se describió con el rayo AC ó con el *ac*; y siendo este punto C estremidad de la línea BC, ha de caer en el arco *rs*, que se describió con el rayo BC ó *bc*. Luego el punto C necesariamente ha de caer en el punto *c*, en el que los dos arcos se cortan.

Pero si ajustando las dos líneas AB y *ab* el punto C coincide con *c*, la línea tirada de A hasta B coincidirá con *ab*, y BC con *bc*; y quedando los dos triángulos juntos se manifiesta que son iguales.

Segundo modo. — Midiendo dos lados y el ángulo incluso.

Núm. 108. Medida la línea MN en el triángulo A (Fig. 79), haré otra línea igual *mn*: describiré desde el punto M un arco arbitrario *ao*, y con la misma abertura de compas describiré otro arco indefinito *rs*: despues tomaré con el compas el intervalo *ao*; y haciendo centro en *r* cortaré el arco indefinito *rs*, y por el punto *s*, en que los dos arcos se cruzan, tiraré una línea indefinita desde *m*. Ultimamente tomaré con el compas el lado ME, y cortaré con igual porcion en la línea indefinita *me*:

hecho esto, tiraré la línea *en*, y quedará el triángulo B igual á A.

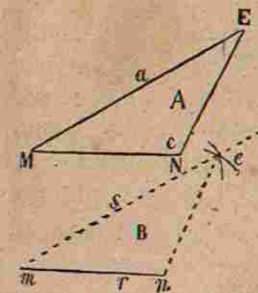


Fig. 79.

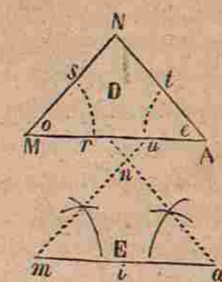


Fig. 80.

Por cuanto sobreponiendo el triángulo B en A, y ajustando MN con *mn*, el lado *me* tambien caerá sobre su correspondiente ME por la igualdad de los ángulos que forman con MN, *mn*; y como *me* es igual á ME, no puede el punto *e* dejar de coincidir con E; y así la línea *en* coincidirá con EN, pues ambas son rectas, y por una y otra parte se terminan en puntos que coinciden.

Tercer modo. — Midiendo un lado con los dos ángulos adyacentes.

Antes de pasar adelante conviene esplicar este término *adyacentes*. Llamo *ángulos adyacentes* á la línea MA (Fig. 80), los que se forman sobre ella con los lados que suben de las estremidades, como son los ángulos *oe* en el triángulo D.

Núm. 109. Si yo mido MA (Fig. 80), y hago otra línea igual *ma*, y despues mido los ángulos *oe*, y hago otros iguales en *m* y en *a* por el método ya arriba dicho (núm. 107), y tiro dos líneas indefinidas, tendré un punto *n*, en el que se cruzan, y este será el vértice del nuevo triángulo E igual á D.

Por cuanto sobreponiendo el triángulo E en D las bases se ajustarian, como tambien los lados, supuesta la igualdad de los ángulos. Luego el punto N, comun á los dos lados del triángulo antiguo D, caerá sobre *n*, punto comun á los dos lados del triángulo nuevo E, y quedarán los dos triángulos ajustados.

Núm. 110. Luego para hacer una figura rectilínea igual á otra dada, cualquiera que sea (Fig. 81), bás-

Fig. 81.

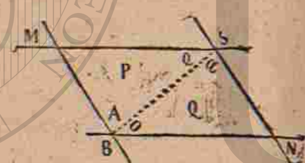


Fig. 82.

tará dividir en triángulos la que nos dieron, y hacer otros triángulos iguales y semejantes, y disponerlos en la nueva con la misma forma.

De aquí se sacan las consecuencias siguientes.

I.

Núm. 111. Luego todo triángulo que tiene los tres lados iguales á los tres de otro ángulo le será igual (núm. 107).

Núm. 112. Luego todo triángulo que tiene dos lados iguales á los dos lados de otro, y el ángulo incluso tambien igual, será igual en todo al otro triángulo (núm. 108).

Núm. 113. Luego todo triángulo que tenga un lado igual á un lado de otro, y los dos ángulos adyacentes iguales á los dos adyacentes en el otro, será en todo igual.

Pongamos ahora dos paralelas, y cortémoslas con otras dos (Fig. 82) : tiremos ademas una línea diagonal, esto es, desde una punta B á la otra opuesta S : tenemos dos triángulos PQ con un lado comun, que es la diagonal : ademas de esto los dos ángulos AO, que la son adyacentes en B, son iguales á sus alternos *ao*, adyacentes á la diagonal en el triángulo Q ; por consiguiente los dos triángulos son perfectamente iguales, y sus lados correspondientes tambien lo son.

Núm. 114. Luego las paralelas cortadas por paralelas son iguales ; y así MB es igual á SN y MS es igual á BN.

Advertencia. — Habiendo ya tratado de las líneas y de los ángulos, para poder esplicar la relacion que dicen entre sí varias líneas conviene tratar de las *razones* y *proporciones* en general.

En lo sucesivo, amigo Eugenio, para facilitarte la espresion y abreviártela, haré lo que todos los modernos acostumbran, usando de las señales ó signos del algebra, pues la esperiencia enseña que lo que hace mas corta la espresion de una verdad, y en una mirada la coloca enfrente de la imaginacion, facilita increiblemente su inteligencia. Pienso que tendrás presentes las nociones algebráicas que contienen mis cartas precedentes; mas, si por mala esposicion de mi parte ú otra causa cualquiera, no te hubieses penetrado de ciertos principios, no vaciles en avisarmelo para que te dé nuevas ilustraciones sobre el punto en cuestion.

CARTA DÉCIMASÉPTIMA.

DE LAS RAZONES Y PROPORCIONES.

§ I.

De la razon en general.

Amigo Eugenio, si bien, tratando de la aritmética, dejé esplicada la teoría de las razones y proporciones, pienso no obstante, á trueque de ser molesto, tratar de nuevo y mas difusamente este asunto, porque, siendo tanta su aplicacion á la geometría, es una llave precisa para entrar en mil gabinetes de verdades lindísimas, Empecemos, pues, que tal vez con el gusto no te parecerá enfadosa, y saltarás de contento al ver en las cartas siguientes las utilidades que esta trae.

Cuando comparamos entre sí dos cantidades del mismo género, v. g. 6 con 4 ó con 3 para saber su respectiva grandeza decimos que estan en esta ó aquella razon.

increiblemente su inteligencia. Pienso que tendrás presentes las nociones algebráicas que contienen mis cartas precedentes; mas, si por mala esposicion de mi parte ú otra causa cualquiera, no te hubieses penetrado de ciertos principios, no vaciles en avisarmelo para que te dé nuevas ilustraciones sobre el punto en cuestion.

CARTA DÉCIMASÉPTIMA.

DE LAS RAZONES Y PROPORCIONES.

§ I.

De la razon en general.

Amigo Eugenio, si bien, tratando de la aritmética, dejé esplicada la teoría de las razones y proporciones, pienso no obstante, á trueque de ser molesto, tratar de nuevo y mas difusamente este asunto, porque, siendo tanta su aplicacion á la geometría, es una llave precisa para entrar en mil gabinetes de verdades lindísimas, Empecemos, pues, que tal vez con el gusto no te parecerá enfadosa, y saltarás de contento al ver en las cartas siguientes las utilidades que esta trae.

Cuando comparamos entre sí dos cantidades del mismo género, v. g. 6 con 4 ó con 3 para saber su respectiva grandeza decimos que estan en esta ó aquella razon.

En esta comparacion la cantidad que se pone en primer lugar se llama *antecedente*, la segunda *consiguiente*; y ambas se llaman términos de la comparacion ó de la razon.

De dos modos se pueden comparar las cantidades; ó bien observando el esceso de una respecto de la otra, y esta diferencia ó esceso se llama *razon aritmética*; de este modo entre 8 y 5 la razon aritmética es 3.

O tambien podemos reparar en el número de veces que una cantidad contiene á la otra, y este número de veces se llama *razon geométrica*; y por eso entre 12 y 4 la razon es 3, porque el antecedente 12 contiene tres veces á su consiguiente 4.

Cuando el antecedente ó el primer término es mayor que el consiguiente, le contiene mas de una vez, como si digo 6:3, cuya razon es 2; ó 6:4, cuya razon es $1\frac{1}{2}$, que quiere decir uno y medio, ó si yo digo 11:3, cuya razon es tres y dos tercios, y se escribe así $3\frac{2}{3}$, porque el antecedente 11 contiene tres veces á tres, que hacen 9, y ademas de esto contiene dos unidades que son dos tercios de 3, que era el consiguiente.

Cuando el antecedente, pues, es igual al consiguiente solo le contiene una vez como 6:6, cuya razon es 1.

Pero cuando el antecedente es menor que el consiguiente, v. g. cuando digo 3:6 la razon es menos que uno, y es un quebrado ó fraccion, esto es, parte de 1; y en este ejemplo de 3:6 la razon es la mitad de uno, y se espresa $\frac{1}{2}$; y en este de 2:8 la razon es $\frac{1}{4}$, porque le contiene la cuarta parte de una vez.

§ II.

De la proporcion en comun.

Cuando habiendo comparado dos cantidades *homogéneas*, esto es, del mismo género, hallamos la razon que hay entre ellas, y despues comparando entre sí otras dos cantidades hallamos entre ellas otra razon; si esta es igual, decimos que estos cuatro términos estan en proporcion; y así generalmente se dice que

Núm. 115. Proporcion es igualdad de razones de un mismo género: v. g., si entre 6 y 3 hay razon dupla, y entre 8 y 4 hay tambien razon dupla, decimos que estos cuatro términos estan en proporcion, y se escribe así: 6:3::8:4, que quiere decir la razon de 6 y 3 es igual á la razon de 8 respecto de 4.

Pero así como toda razon pide dos términos, la proporcion que envuelve dos razones pide cuatro, esto es, dos antecedentes y dos consiguientes.

No obstante, sucede tal vez que el mismo término puede ocupar dos lugares, y ser consiguiente para el primero, y antecedente para el tercero; v. g., si se dijere 12 es á 6 como 6 es á 3, se escribe así ∺12:6:3: y esto se llama proporcion continua; y cuando hay cuatro términos distintos se llama proporcion discreta, como esta 12:6::8:4.

Pero como hay dos especies de *razon* tambien debe haber dos especies de *proporcion* como despues diremos.

§ III.

De la razon aritmética.

Ya hemos dicho que el esceso ó diferencia que hay entre dos cantidades del mismo género se llama *razon aritmética.*

Núm. 116. El modo de conocer esta diferencia es sacar ó quitar una cantidad de otra, y el resto es la razon aritmética que se buscaba; v. g., 6 y 4 la razon es 2, porque si de 6 se quitan 4 quedan 2, lo que se escribe así $6-4=2$, comunmente se espresa esta razon aritmética poniendo un punto entre las dos cantidades de este modo 6.4, y se lee 6 4. Otro ejemplo (Fig. 83). Las líneas B y A son de-

Fig. 83.

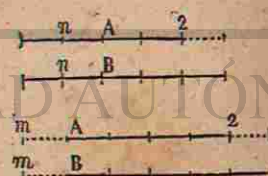


Fig. 84.

siguales, el esceso de una sobre la otra vale v. g. dos palmos; podemos, pues, decir $B-2=A$, y este esceso 2 es la razon aritmética entre B y A.

De esta simple nocion se deducen varias propie-

dades de la razon aritmética, las que esplicaré á mi modo: ten paciencia, Eugenio.

Por ser la razon aritmética, la diferencia que se halla entre dos cantidades, si esta diferencia desaparece, ó porque se añade á la que era mayor, ó porque se quita á la que era menor, las dos cantidades quedarán iguales, v. g. entre 5 y 3 la diferencia es 2, luego si añadimos 2 á 3 quedará igual á 5, y si quitamos 2 á 5 quedará igual á 3.

Ve aquí las varias propiedades:

I.

Núm. 117. Luego la razon aritmética, si se quita de la cantidad mayor la deja igual á la menor, y si se añade á la menor la deja igual á la mayor. V. g. la razon de 5 á 2 es 3. Luego $5-3=2$ y $3+2=5$. Del mismo modo (Fig. 83), $A+2=B$ y $B-2=A$.

Pasemos adelante: si puesta una razon entre dos términos añadimos ó quitamos á los dos la misma cantidad, quedarán ambos con la diferencia y desigualdad que tenian; porque ni en lo que se aumentó ni en lo que se quitó se produce diferencia alguna, v. g. en 8 y 6 la diferencia es 2: supongamos, pues, que se añade á ambos el valor de 3, quedarán 11 y 9, cuya diferencia es el mismo 2: supongamos por el contrario que quitamos de los dos 3, quedarán 5 y 3, y la diferencia será tambien 2. Lo mismo sucede en las líneas (Fig. 84) entre A y B la razon aritmética es 2: luego si de ambas líneas quitamos *n*, quedará la diferencia 2, y si á ambas añadimos *n*, la diferencia siempre será 2.

II.

Núm. 118. Luego si á ambas añadimos ó quitamos porcion igual, conservarán entre sí la misma razon aritmética.

Supuesto lo que queda dicho, esto es, que en la diferencia ó esceso de una cantidad respecto de otra consiste la razon aritmética, digo ahora que esta diferencia consiste en que una cantidad tiene lo que la otra no tiene, y así aumentar en la una ó quitar en la otra hará el mismo efecto para la diferencia entre ambas, v. g. entre 6 y 9 la diferencia es 3; pero si yo aumento 2 á un término, haré el mismo efecto que si quitase 2 del otro: si quito 2 de 6 quedan 4, y para 9 faltan 5; pero tambien si yo aumento 2 al 9 quedarán 11, y la diferencia de 11 á 6 es 5.

III.

Núm. 119. Luego para la razon aritmética tanto importa añadir una cantidad á un término como quitarla del otro.

§ IV.

Proporcion aritmética.

Ya dijimos que la igualdad de razones del mismo género hacian la proporcion de ese mismo género.

Núm. 120. Luego proporcion aritmética es la igualdad de dos razones aritméticas. V. g., entre estos cuatro términos 3 y 5, y 4 y 6; porque en ambas comparaciones la diferencia ó razon es 2.

Esprésase esta proporcion así: 3. 5 : 4. 6, ó poniendo el ejemplo en líneas, comparando A con B (Fig. 85) y C con D, lo que se escribe así: A. B : C. D.

Núm. 121. Cuando tres términos se disponen de modo que el primero escede al segundo tanto cuanto el segundo escede al tercero, se llama proporcion aritmética continua, como queda dicho, y se espresa así: 9. 7 : 7. 5, ó así: ÷ 9. 7. 5. Y se lee 9 á 7, como 7 á 5.

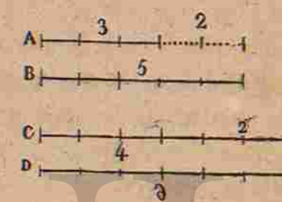


Fig. 85.

De esta nocion se sacan varias propiedades.

I.

La suma de los estremos es igual á la suma de los medios: v. g., si 3. 5 : 4. 6, podemos decir 3+6=5+4, que hacen 9. En líneas A. B : C D podemos decir A+D=B+C (Fig. 85).

Porque hecha la suma de los medios 5+4 tenemos 9; pero si en lugar de 5, que es término medio, ponemos 3, que es su estremo, y en el valor es 2 menos, quedará esta suma con dos de menos, y reducida á 7: pero si tambien trocásemos el otro medio 4, y pusiéremos su estremo 6, que tiene dos de mas, entonces quedará esa suma con 2 de mas, y de 7 pasará á 9, compensándose una diferencia en mas con otra en menos; y así 5+4=9, y tambien 3+6=9.

Núm. 122. Luego en toda proporcion aritmética la suma de los estremos es igual á la de los medios.

II.

Núm. 123. Luego cuando cuatro términos estan dispuestos de modo que la suma de los estremos se halle igual á la de los medios, es señal de que estan en proporcion aritmética: v. g., si 9+2=5+6, podemos decir 9. 6 : 5. 2.

Porque la igualdad de las sumas es señal de que el primer estremo escede tanto á su medio, como el último estremo es escedido por el suyo, pues de lo contrario no se podia compensar el esceso del uno con la falta del otro.

III.

En la proporcion continua, v. g. 9. 7. 5, un término ocupa el lugar de dos, pudiendo decirse 9. 7 : 7. 5, y entonces 9+5=7+7. Luego si el término medio repetido es igual á la suma de los estremos, no repetido será la mitad de esa misma suma.

Núm. 124. Luego en la proporcion continua aritmética la suma de los estremos es dupla del término medio.

IV.

Núm 125. Cuando tres términos estan dispuestos

de modo que la suma de los estremos es dupla del término medio, estan en proporcion continua, v. g., si 12+4 es duplo de 8, puedo decir ÷12. 8. 4, porque en este caso, repitiendo el término medio, quedará igual á la suma de los estremos, lo que es señal, como está dicho, de que estan los términos en proporcion aritmética.

V.

Núm. 126. Dados tres términos de una proporcion aritmética es facil hallar el cuarto; porque haciendo la suma del segundo y tercero, y sacando de ella el primer término, el resto será el cuarto, porque este resto junto con el primero debe ser igual á la suma de los medios, y así quedarán en proporcion por el núm. 223.

Del mismo modo dados cualesquiera tres términos de una proporcion se puede hallar el que falta: v. g., si falta el segundo, hecha la suma de los estremos, y quitando de ella el tercero, tendremos el segundo, etc.

§ V.

De la razon geométrica.

Ya dijimos que el número de veces que una cantidad comprende á otra se llama razon geométrica, v. g., entre 6 y 2 la razon geométrica es 3, y en líneas (Fig. 86) entre B y A la razon geométrica es 3, porque B contiene tres veces A. Debe advertirse que cuando se dice razon absolutamente se entiende la geométrica.

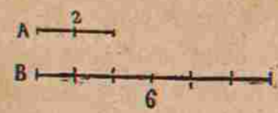


Fig. 86.

Núm. 127. Se conoce la razon que hay entre dos cantidades dividiendo el antecedente por el consiguiente, v. g. 6 por 2: el cociente 3 que sale en la division manifiesta la razon que hay entre los dos términos: este número que sale en el cociente en la division se llama tambien *esponente*.

Esta razon se espresa de varios modos, ó bien poniendo dos puntos entre las dos cantidades, diciendo 6 : 2, ó bien poniendo los números con la señal de division, diciendo $\frac{6}{2}$.

Núm. 128. Siempre el antecedente se ha de dividir por el consiguiente; y si le contiene dos veces la razon es *dupla*, si tres la razon es *triple*, si cuatro *cuadrupla*, etc.; y así $\frac{6}{2}$ igual 3, ó (Fig. 86) $\frac{B}{A} =$ 3, porque el antecedente dividido por el consiguiente 2 da 3 á cada uno, porque le contiene tres veces, porque la línea B contiene la línea A tres veces.

Si por el contrario el antecedente fuere menor que el consiguiente, como si decimos 3 : 6, ó 3 : 9, ó 3 : 12, de tal suerte que el consiguiente contenga al antecedente dos, tres ó cuatro veces, la razon será subdupla, subtriple y subcuadrupla, y se pueden espresar así: $\frac{3}{6}$, $\frac{3}{9}$, $\frac{3}{12}$, y quiere decir que la razon es tres sestas partes, ó tres nonas partes, ó tres duo-

décimas partes; de suerte que siempre ha de ser un quebrado ó fraccion.

En la aritmética se enseña que los quebrados se espresan con dos números, uno sobre la rayita, este se llama *numerador*, otro debajo de ella, este se llama *denominador*; v. g., para decir tres cuartos se escribe así $\frac{3}{4}$: el de encima dice cuantos quebrados son, el de abajo qué especie de quebrados es, á saber: si son tercios, cuartos, quintos, etc.

Núm. 129. Dijimos al número 127 que la razon geométrica se espresaba en dos números puestos con la señal de division, v. g. el 6 y 3 colocados de este modo $\frac{6}{3}$. De aquí se sigue que en todos los casos el antecedente se puede tomar como *numerador*, y el consiguiente como *denominador*; de suerte que en la espresion $\frac{6}{3}$, ó 6 comparados con 3, podemos decir seis tercios; y la razon de 12 respecto de 7 es de 12 sétimos $\frac{12}{7}$, etc. Esto facilita mucho para conocer la razon entre cualesquiera números.

Núm. 130. Cuando la razon entre las cantidades se puede esplicar por números, bien sean enteros ó quebrados, se llama *racional*; pero cuando no se puede esplicar por números algunos, v. g. el lado del cuadrado y su diagonal, ó el número 1, la raiz cuadrada del número 2, entonces esta razon se llama *surda* ó irracional.

Las cantidades que tienen entre sí razon de número á número son conmensurables; las que tienen razon surda son inconmensurables por no haber medida comun que las pueda medir.

Tambien es preciso esplicar estas dos voces, partes *alicuotas* y *alicuantas*: las alicuotas son aquellas que multiplicadas cierto número de veces agotan el todo exactamente, como son palmos respecto de la vara : las alicuantas son las que nunca ajustan con el todo, como el codo respecto de una vara, porque esta no contiene un número de codos exactamente.

§ VI.

Propiedades de la razon geométrica.

Hemos dicho que la razon geométrica se conocia dividiendo una cantidad por otra, y que el cuociente espresaba la razon, v. g. $\frac{6}{3}=2$.

De esta nocion se sacan varias propiedades.

I.

Núm. 151. El consiguiente multiplicado por la razon es igual al antecedente : v. g., si yo digo $\frac{6}{3}=2$, diré luego $2\times3=6$, porque la multiplicacion vuelve á hacer lo que la division deshizo, y pone la cantidad en los términos en que estaba antes de dividida ; y así vemos que por la multiplicacion se prueba si está bien hecha la division. Vaya otro ejemplo para cuando el antecedente fuere menor que el consiguiente : si decimos 3 : 6, ó $\frac{3}{6}$, la razon es $\frac{1}{2}$; pero el consiguiente 6 multiplicado por $\frac{1}{2}$ es igual al antecedente 3, ó seis medios $=3$.

II.

Los dos términos de una razon multiplicada por

una cantidad conservan la misma razon en que estaban : v. g., si 12 y 6 estan en razon dupla, y se multiplican por 3, siempre quedarán en razon dupla : así $12\times3=36$, y $6\times3=18$, que tambien estan en la misma razon dupla. Otro ejemplo (Fig. 87) : si D y B estan en razon dupla, multiplicando ambos por 3 quedarán en la misma razon; y así N y M estan en razon dupla.

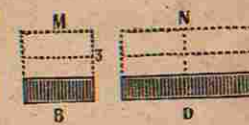


Fig. 87.

Por cuanto si un antecedente, v. g. D, contiene dos veces á su consiguiente B, juntando otro antecedente igual á D, este nuevo antecedente comprenderá tambien otras dos veces á su consiguiente igual á B, y lo mismo será con todos los demas antecedentes iguales que fuéremos añadiendo respecto de sus consiguientes que les fuéremos uniendo : cada antecedente D llevará en sí el valor de dos consiguientes iguales á B. Luego tomando el antecedente primitivo D tres veces, y tomando otras tantas su consiguiente primitivo B, el valor de todos los antecedentes juntos N será duplo del valor de los consiguientes juntos M ; pero tomar los términos tres ó cuatro veces, etc., es lo mismo que multiplicarlos por 3 ó por 4, etc.

Núm. 152. Luego la multiplicacion de dos términos por una misma cantidad los deja en la misma razon que ellos tenian.

III.

La division de dos términos por la misma cantidad los deja en la misma razon que ellos tenian. V. g., si 12 y 6 están en razon dupla, síguese que $\frac{12}{3}$ y $\frac{6}{3}$ están en la misma razon. Pongamos otro ejemplo (Fig. 88) : los dos espacios representados por Q y P están en razon dupla. Q consta de seis espacios, como el de A y P solo consta de tres : dividamos ahora á P y á Q por 3, y tendremos en P una A, y en Q dos; y así se ve otra vez la razon dupla.

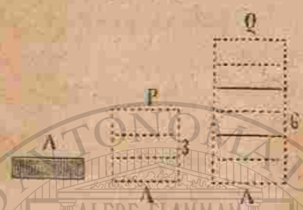


Fig. 88.

La razon de esto es porque dividido el valor del antecedente Q en tres partes iguales, y tambien el del consiguiente P, si un tercio del antecedente no contiene dos veces al tercio del consiguiente, ninguna de las otras partes iguales á la primera las contendrá dos veces. Luego todas las partes del antecedente juntas, ó el antecedente entero Q, no podrá contener dos veces las partes juntas del consiguiente entero P, como se suponia.

Núm. 153. Luego si dos términos se dividen por una misma cantidad deben conservar la misma razon que tenian. Adviértase que cuando dos cantidades se dividen igualmente por otra, las partes de estas se llaman proporcionales.

Núm. 154. Luego la misma razon que se hallare entre dos términos se hallará tambien entre sus partes proporcionales, esto es, entre sus mitades y entre sus tercios ó sus cuartos, etc.

IV.

Establecimos arriba que dos cantidades multiplicadas por una se quedaban en la misma razon que tenian (núm. 152); pero multiplicar dos cantidades por una ó una por dos es lo mismo.

Núm. 155. Luego cuando una cantidad se multiplica por dos se quedará en la misma razon que ellas tenian. V. g. A (Fig. 88) multiplicada, bien sea por 6 ó bien por 3, que están en razon dupla, hará que resulten los dos espacios Q y P, que están tambien en la misma razon dupla.

V.

Tambien dijimos arriba que dos cantidades divididas por una se quedaban en la misma razon que tenian antes de dividirse.

Núm. 156. Luego una cantidad dividida por dos queda en la razon de estas, pero inversa, esto es, si el divisor es duplo ó triple, etc., el cuociente es subduplo, subtriple, etc. : v. g. $\frac{24}{6}=4$; $\frac{24}{3}=8$; pero 4, 8 tienen razon subdupla, y los divisores 6 : 3 estaban en razon dupla. Pongamos otro ejemplo (Fig. 88) : el espacio Q dividido en seis partes queda con el valor de A, y dividido en tres partes, queda con el valor duplo de A. Luego cuando el divisor es subduplo el cuociente es duplo.

La razon de todo esto es, porque un mismo valor del dividendo Q repartido por mas partes, da menos valor á cada una de ellas. Luego en la misma razon que se aumentare el número de las partes ó creciere el divisor, se ha de disminuir el valor de cada una de ellas, ó será menor el cuociente.

VI.

Ya en el núm. 154 quedó establecido que las partes proporcionales de dos cantidades estaban en la misma razon que las cantidades tenian antes de dividirse.

Núm. 157. Luego si aumentaremos los dos términos con alguna parte proporcional, ó la quitamos de ellos, quedarán en la misma razon que antes tenian. V. g. 12 : 6 tienen la razon dupla, aumentemos en 12 su tercio, y en 6 el suyo, tendremos $12+4=16$, y en el consiguiente tendremos $6+2=8$; pues 16 y 8 tambien están en razon dupla. Del mismo modo, si de ambos términos quitamos una parte proporcional, v. g. un $\frac{1}{3}$, quedarán en la misma razon dupla; y asi $12-4=8$, y $6-2=4$ quedan 8 : 4, que están en razon dupla.

La razon es, para que un antecedente contenga v. g. dos veces á su consiguiente, es preciso que cada parte proporcional del antecedente contenga dos veces á la que la corresponde en el consiguiente (núm. 155). Luego si acrecentásemos á ambos la tercera parte v. g., esta nueva parte del consiguiente se hallará inclusa dos veces en la que se aumentó al antecedente, y de este modo quedarán estos dos términos en la razon dupla en que se estaban.

Del mismo modo sucede en la division; si sacamos de ambos términos $\frac{1}{2}$ ú otra cualquiera parte proporcional, las que restaren así en uno como en

otro se comprenderán dos veces, como sucedia en el antecedente y consiguiente. Por eso dijimos que aumentar ó quitar de dos términos una parte proporcional los deja en la misma razon que antes tenian.

VII.

Núm. 158. En la razon geométrica la misma mutacion causa el multiplicar un término por una cantidad que dividir por ella el otro término. V. g. en 24 y 6 la razon es cuadrupla; digo, pues, si yo conservo el consiguiente, y divido el antecedente por 3, diciendo $\frac{24}{3}$: 6, el cuociente $1\frac{1}{3}$, porque $\frac{24}{3}=8$; y $8 : 6=1\frac{1}{3}$; pero esto mismo sucederá si yo conservare el antecedente 24, y solo multiplicase el consiguiente por 3, diciendo : $24 : 6\times3$; pues $6\times3=18$, ya se ve que en 24 : 18 el cuociente es $1\frac{1}{3}$.

La razon es, porque el que el antecedente comprenda en sí al consiguiente mas ó menos veces, depende tanto de la grandeza del antecedente como de la pequeñez del consiguiente: luego lo mismo será disminuir el antecedente, partiéndole por un término, v. g. 3, como aumentar el consiguiente multiplicándole por él; como al contrario, lo mismo será aumentar el valor del antecedente multiplicándole por 2 v. g., que disminuir el consiguiente partiéndole por 2.

§ VII.

De la proporcion geométrica.

Núm. 139. Proporcion geométrica es la igualdad de dos razones geométricas. V. g. entre 6 y 3 la razon es 2, entre 8 y 4 la razon es 2; entonces, pues, diremos que estos cuatro términos están en proporcion, lo que se espresa así, $6:3::8:4$, ó así $\frac{6}{3}=\frac{8}{4}$, diré: 6 á 3 como 8 á 4.

Núm. 140. Cuando la proporcion geométrica consta de tres términos, en tal forma que el primero sea respecto del segundo, como el segundo es respecto del tercero, se llama continua, como ya se dijo, y se escribe así $12:6::6:3$, ó de este modo $\div 12:6:3$.

De esta nocion se siguen varias propiedades.

I.

Puesta cualquiera porcion geométrica, v. g. la de $6:3::8:4$, conviene examinar si el producto de los estremos es igual al de los medios, v. g. si 6×4 es $=3\times 8$.

Saquemos primeramente el producto de los medios $3\times 8=24$: si en lugar del medio 3 pusiéremos su estremo 6, que es duplo, el producto sube á ser duplo, y en lugar de 24 dará 48 (núm. 133): para remediar esto trocamos tambien el otro medio 8 por su estremo 4, que es subduplo; y en este caso

baja el producto de 48 á 24 (núm. 133); pero si de 48 baja á 24 se corrige en un trueque la desigualdad que hizo el otro, por ser las razones iguales.

Núm. 141. Luego en toda proporcion geométrica el producto de los estremos es igual al producto de los medios.

II.

Cuando cuatro términos están dispuestos de modo que el producto de los estremos sea igual al de los medios, están en proporcion geométrica, v. g., si $6\times 4=3\times 8$, se sigue que $6:3::8:4$.

Porque hecho el producto de los medios 3 por $8=24$, si yo trueco el medio 3 por su estremo duplo 6, sube el valor á ser duplo de lo que antes era, y de 24 pasa á 48. Ahora bien, si el otro estremo 4 compensare con su disminucion respecto del 8 que es medio, el aumento que se hallaba en 6 respecto de 3 (lo que es preciso para la igualdad de los productos), es prueba de que tantas veces contiene 6 á su medio 3, como 4 es contenido en su medio 8.

Núm. 142. Luego si el producto de los medios es igual al de los estremos estarán los cuatro términos en proporcion.

Aquí advierto, que hacer el cuadrado de un número es multiplicarle por sí mismo, v. g. $3\times 3=9$ es el cuadrado de 3; $5\times 5=25$ es el cuadrado del número 5, y del mismo modo el cuadrado de 6 es 36, el cuadrado de 7 es 49, etc.

III.

La proporcion continua ∺12:6:3 se puede escribir repitiendo el término medio 12:6::6:3. En este caso el producto de los medios, que es el cuadrado del término medio 6, es igual al producto de los estremos (núm. 141).

Núm. 143. Luego en la proporcion continua el producto de los estremos es igual al cuadrado del medio.

IV.

Cuando tres términos son tales que el producto de dos es igual al cuadrado de otro, se pueden disponer en proporcion continua: v. g. de $12\times3=6\times6$, podemos decir ∺12:3:6.

La razon es, porque en este caso poniendo como estremos los factores del producto, y repitiendo el término que se ha de multiplicar por sí mismo, para llenar los lugares de los medios quedan los términos en el caso del número precedente y en proporcion; pero entonces, suprimiendo una vez el término medio, quedará proporcion continua.

Núm. 144. Luego siempre que el producto de dos términos es igual al cuadrado de otro se podrán disponer en proporcion continua.

V.

Toda cantidad multiplicada por 1 queda en el mismo valor que tenia: luego si la unidad fuese estremo de una proporcion, el otro estremo solo será

igual al producto de los medios: v. g., si dijéremos 1:3::3:15, ó al contrario 15:3::5:1, el producto de los medios será igual á solo un estremo.

Núm. 145. Luego en toda multiplicacion podemos disponer una proporcion poniendo dos factores por medios, el producto por un estremo, y la unidad por otro.

VI.

Podemos considerar cualquier dividendo como un producto hecho por el divisor y cuociente como factores.

Núm. 146. Luego toda division nos da una proporcion si colocamos el divisor y el cuociente como medios, y el dividendo y la unidad como estremos. V. g. si $\frac{15}{3}=5$, podemos decir 15:3::1:5, y tambien 1:5::3:15, porque por la razon del número precedente el producto de los estremos es el dividendo: el cuociente y el divisor son factores.

VII.

Lo que llaman regla de tres consiste en hallar el cuarto término de una proporcion, dados los tres. Pero si el producto de los medios es igual al de los estremos, repartiendo el producto de los medios por el término primero, dará por cuociente el cuarto término de la proporcion.

Núm. 147. Luego teniendo tres términos de una proporcion podemos hallar el cuarto.

Núm. 148. Por el mismo método podemos hallar cualquiera de los dos términos. V. g. si faltaba el tercero, sacaremos el producto de los estremos, y la partiremos por el segundo, y dará por cuociente el tercero.

§ VIII.

De las mutaciones que se pueden hacer en los términos conservando la proporcion.

Mutaciones de lugar solamente. — De lo que dijimos arriba (núm. 142) se infiere, que toda mudanza, hecha en una proporcion que conserve la igualdad entre el producto de los medios y el de los estremos, conservará tambien la proporcion.

Núm. 149. Luego puesta cualquiera proporcion podemos hacer las mutaciones siguientes :

I.

Trocar los medios entre sí, pues por esto no se muda el valor de su producto.

II.

Trocar solos los estremos entre sí por la misma razon.

III.

Hacer los estremos medios, y los medios estremos, lo cual no muda su valor; y esto da de sí muchas mutaciones.

De este modo puesta esta proporcion 6:3::8:4.

1. Podremos *trasponer*, esto es, poner primero los dos últimos términos, y en su lugar los que estaban antes, v. g. 8:4::6:3;

porque los estremos se convierten en medios, y los medios en estremos.

2. Podemos *invertir*, esto es, hacer los antecedentes consiguientes, y los consiguientes antecedentes, diciendo. . . . . 3:6::4:8.

3. Podemos *alternar*, esto es, comparar los dos antecedentes entre sí, y entre sí tambien comparar los consiguientes 6:8::3:4; porque se truecan los lugares en los dos medios.

4. Podremos cambiar solos los estremos entre sí, lo que se llama *alternar*, *invertir* y *trasponer*, diciendo. . . . . 4:3::8:6.

5. Podemos tomar todos los cuatro términos al reves, lo que se llama *invertir* y *trasponer*, diciendo. . . . . 4:8::3:6.

Pongamos otro ejemplo en lineas (Fig. 89). Si A:B::C:D, podemos hacer las mutaciones siguientes :

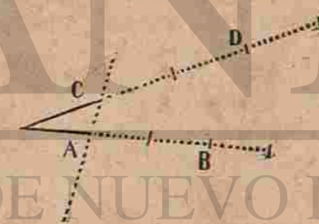


Fig. 89.

1. C:D::A:B. trasponiendo.
2. B:A::D:C. invirtiendo.
3. A:C::B:D. alternando.
4. D:B::C:A, y esto es alternando, invirtiendo y trasponiendo.
5. D:C::B:A, lo cual es invertir y trasponer.

Porque en todas estas mutaciones se halla que el producto de los medios es igual al de los estremos, que es una prueba de proporcion (núm. 142). Otras mutaciones se pueden hacer que se incluyen en estas, por las cuales se ve que si un medio se convierte en estremo, tambien el otro medio, lo que es preciso para que el producto de los estremos sea siempre igual al de los medios.

§ XI.

De las mutaciones que se hacen componiendo ó dividiendo los términos.

Ademas de las mutaciones de lugar que hicimos de los términos, se pueden hacer algunas mas aumentando los unos con los otros, lo cual se llama *componer*, ó quitando el valor de unos del de los otros, lo que se llama *dividir*, ó mejor *disminuir*. Cuando se juntan, se forma una suma, cuando se quitan aparece la diferencia ; y estas sumas y diferencias tambien estarán en proporcion ; sobre lo cual hay varias proposiciones sacadas de lo que queda dicho.

Pero es preciso traer á la memoria lo que dijimos al núm. 157, que cuando aumentamos ó quitamos á dos cantidades sus partes proporcionales, quedan con la misma razon que antes tenian entre sí; pero los consiguientes de una proporcion son partes proporcionales de sus antecedentes.

Núm. 150. Luego puestos cuatro términos en proporcion, si á los antecedentes añadimos sus con-

siguientes, ó se los quitamos de su valor, quedarán en la misma razon que tenian entre sí. V. g. si decimos $A:B::C:D$, tambien podremos $A+B:C+D::A:C$, y asimismo $A-B:C-D::A:C$. Otro ejemplo en números : $12:6::8:4$, podemos decir $12+6:8+4::12:8$, ó bien $12-6:8-4::12:8$.

I.

En otros términos, la suma de los dos primeros términos es á la suma de los dos segundos, como el primer antecedente es al segundo, ó que dicen la misma proporcion.

II.

La diferencia de los dos primeros términos es á la diferencia de los dos segundos como el primer antecedente es al segundo.

III.

Núm. 151. Ahora bien, si las sumas entre sí y las diferencias entre sí son como un antecedente es al otro, las sumas entre sí y las diferencias entre sí vendrán á tener la misma razon, y podemos hacer esta proporcion : una suma es respecto de otra suma, como una diferencia es respecto de otra diferencia : v. g. si $12:6::8:4$: luego $12+6:8+4::12-6:8-4$, ó bien si $A:B::C:D$: luego $A+B:C+D::A-B:C-D$; y alternando esta tambien podemos decir : una suma respecto de su diferencia es como otra suma respecto de la suya. Y así $12+6:12-6::8+4:8-4$.

Núm. 152. Luego la suma de los primeros es á su diferencia, como la suma de los segundos es á la suya.

IV.

Núm. 153. Sentada esta doctrina, y la que dijimos de la alternacion, podemos sacar otras consecuencias, v. g. si dijimos:

$$12:6::8:4,$$

tambien podremos decir:

$$\begin{cases}12+6:8+4::12:8.\\ 12+6:8+4::6:4.\end{cases}$$

Luego alternando la primera consecuencia, diremos:

$$12+6:12::8+4:8;$$

y alternando la segunda, diremos:

$$12+6:6::8+4:4.$$

Por la misma razon, si decimos:

$$A:B::C:D,$$

podremos inferir:

$$\text{Luego } A+B:A::C+D:C;$$

ó de otro modo:

$$A+B:B::C+D:D.$$

Núm. 154. Luego en cualquiera proporcion la suma de los dos primeros es á cualquiera de ellos, como la suma de los dos segundos al que le corresponde.

V.

Puesta la primitiva proporcion $12:6::8:4$, inferimos estas dos proporciones:

$$12-6:8-4::12:8.$$
$$12-6:8-4::6:4.$$

Luego alternando la primera, diremos:

$$12-6:12::8-4:8;$$

y alternando la segunda, diremos:

$$12-6:6::8-:4.$$

Núm. 155. Luego en cualquiera proporcion podemos decir: la diferencia de los primeros términos es á cualquiera de ellos, como la diferencia de los dos últimos respecto del que la corresponde.

Podemos alternar toda proporcion propuesta; y con esto haremos que los antecedentes sean términos primeros, y los consiguientes términos últimos.

VI.

Núm. 156. Todo cuanto hemos dicho de las sumas y diferencias de los primeros y últimos términos lo podemos decir de las sumas y diferencias de los antecedentes y de los consiguientes; de donde se deducen las siguientes proporciones nacidas de una proporcion dada, v. g. si

$$A:B::C:D.$$

Luego alternando será

$$A:C::B:D.$$

1. Luego combinando las sumas

$$A+C:B+D::A:B.$$

2. O bien

$$A+C:B+D::C:D.$$

3. Luego combinando las diferencias

$$A-C:B-D::A:B,$$

4. ó $$A-C:B-D::C:D.$$

5. Luego combinando sumas con diferencias

$$A+C:B+D::A-C:B+D.$$

6. Luego alternando

$$A+C:A-C::B+D:C-D.$$

Ejemplo en números.

Demos que sea la proporcion primitiva

$$12:4::9:3.$$

Luego alternando

$$12:9::4:3.$$

1. Luego combinando las sumas

$$12+9:4+3:12:4.$$

2. O bien

$$12+9:4+3+9:3.$$

3. Luego combinando las diferencias

$$12-9:4-3::9:3.$$

4. Luego combinando sumas con diferencias

$$12+9:4+3::12-9:4-3.$$

5. Luego alternando

$$12+9:12-9::4+3:4-3.$$

De aquí se prueban las proposiciones siguientes.

VII.

Núm. 157. Luego la suma de los antecedentes es á la suma de los consiguientes como un antecedente es á su consiguiente.

VIII.

Núm. 158. Luego la diferencia de los antecedentes es á la de los consiguientes como un antecedente es á su consiguiente.

IX.

Núm. 159. Luego la suma de los antecedentes es á su diferencia como la suma de los consiguientes es á la diferencia de estos.

Hasta aquí en estas seis proporciones, que son consecuencias de la proporcion primitiva, combinamos sumas con sumas, diferencias con diferencias, y sumas con diferencias. Ahora falta combinar las sumas de los antecedentes ó consiguientes, y sus diferencias con cada uno de ellos, y para esto bastará alternar las proporciones de arriba.

Ejemplo.

Sea la proporcion primitiva

$$A:B::C:D.$$

Luego alternando la primera consecuencia que pusimos arriba, núm. 156, diremos :

$$A+A:C::B+D:B;$$

y alternando la segunda diremos :

$$A+C:C::B+D:D;$$

y alternando la tercera, diremos :

$$A-C:A::B-D:B;$$

y alternando la cuarta, diremos :

$$A-C:C::B-D:D.$$

Otro ejemplo en números.

Sea la proporcion primitiva

$$12:4::9:3.$$

Luego alternando la primera consecuencia de arriba, diremos :

$$12+9:12::4+3:4.$$

alternando la segunda tendremos :

$$12+9:9::4+3:3.$$

alternando la tercera se dirá :

$$12-9:12:4-3:4.$$

y alternando la cuarta se dirá :

$$12-9:9::4-3:3.$$

De aquí se prueban las dos verdades siguientes :

X.

Núm. 160. La suma de los antecedentes es á cada uno de ellos como la suma de los consiguientes es al que le corresponde.

XI.

Núm. 161. La diferencia de los antecedentes es para cada uno de ellos lo que la diferencia de los consiguientes para el que la corresponde.

§ X.

De la razon compuesta.

Núm. 162. Sucede muchas veces, amigo Eugenio, que una cantidad escede á otra por muchos principios : v. g. una sala es mayor que un gabinete por ser mas larga, por ser mas ancha, y por ser mas alta : supongamos que tiene la longitud cuadrupla de la del gabinete, solo por este principio seria como $4:1$: supongamos tambien que la anchura es como tres á la del gabinete ; ya solo por este principio debe ser como $3:1$; y combinando estas dos razones no hemos de juntar ó sumar una con otra, y $4+3=7$, sino multiplicar la una por la otra, y decir $4\times$ por $3=12$, siendo el 12 el esponente de esta razon compuesta.

Por cuanto si la anchura es triple podremos dividirla en tres iguales partes ; y por haber en cada uno de estos tres tercios una longitud cuadrupla de la del gabinete, entrará en solo un tercio cuatro veces el gabinete, y otras tantas en cada uno de los otros dos tercios, lo que en todo compone 12; y así será preciso repetir doce veces el *area* ó el suelo del gabinete para llenar el area ó pavimento de la sala.

Ahora bien, si la altura de la sala fuere dupla, y la dividimos por medio con tablas, quedaria en la parte superior otro tanto vacío como en la parte inferior; esto es, se podian hacer otros doce gabinetes: volveremos, pues, á multiplicar por 2 (esponente de las alturas) el esponente compuesto del pavimento 12, y diremos que la sala es al gabinete como $24:1$.

Núm. 163. Cuando el esponente de una razon es el producto de dos esponentes, la razon se llama compuesta de dos: cuando es producto de tres esponentes, la razon será compuesta de tres, etc.

Si las dos razones ó esponentes, que multiplicados dan una razon compuesta son iguales entre sí, v. g. 2×2, 3×3, 4×4, etc., entonces la razon compuesta se llama *duplicada*, y en el primer caso es duplicada de razon dupla, en el segundo *duplicada* de razon triple, en el tercero *duplicada* de razon cuadrupla, etc.

Del mismo modo si el esponente de la razon es el producto de tres esponentes iguales será esponente de una razon triplicada; y si los esponentes primitivos, v. g. de longitud, latitud y altura, fueren $2\times=8$, la razon será triplicada de razon dupla $3\times3\times3$ igual, 27 será la razon triplicada de la razon triple; si fueren $4\times4\times4=64$, la razon será triplicada de razon cuadrupla.

Aquí se ve la diferencia que hay entre la razon

dupla y la razon duplicada, entre la razon triple ó cuadrupla y la razon triplicada ó cuadruplicada. Las duplas, triples, cuadruplas se hacen añadiendo ó sumando unidades: las duplicadas, triplicadas, etc., se hacen multiplicando esponentes semejantes.

Tambien se advierte que cualquiera de las razones que componen la duplicada es subduplicada, las que componen la triplicada son subtriplicadas. Pongamos ahora dos proporciones.

$10:5::4:2$. (su esponente.. 2.
$6:2::9:3$. (su esponente.. 3.

Los esponentes son 2 y 3: multipliquemos ordenadamente los términos de una por los de la otra diciendo:

$$10\times6,\ 5\times2,\ 4\times9,\ 2\times3.$$

En los mismos productos resulta otra proporcion:

$$60:10::36:6,$$

cuyo esponente es 6, producto de los dos esponentes el 2 y el 3, por ser lo mismo multiplicar 10 por 6 que multiplicar dos veces 3 por tres veces 2; y en esto no solo multiplicamos los dos consiguientes 5 y 2, sino los dos esponentes, uno que dice *dos veces*, y otro que dice *tres veces*; y así el producto 60 no solo comprende á su consiguiente (10) las dos veces de la primera proporcion, sino las dos veces de esta primera proporcion multiplicadas por 3 de la segunda, que hacen 6. Ahora, pues, como en los otros dos términos de la proporcion 4×9 y 2×3 hay la misma razon, y en ellos se multiplica tambien el 4 *duplo* por 9 *triple*, el producto debe ser sestuplo, como vemos en 36 y 6; y así habiendo en ambas razones el mismo esponente quedan los cuatro términos en proporcion.

Núm. 164. Luego cuando se multiplican ordenadamente los términos de una proporcion por los de otra, los productos hacen tercera proporcion, y el esponente de esta es el producto de los esponentes primitivos.

Ahora, pues, si se multiplicaren los términos no solo de dos sino de muchas proporciones que tengan varios esponentes, v. g. 2, 3, 4, los productos, si la multiplicacion se hace por el orden en que se hallan antecedentes y consiguientes, harán una nueva proporcion, cuyo esponente será el producto de los tres esponentes primeros, esto es, $24=2\times3\times4$, porque aquí milita la razon que dimos para las dos razones combinadas; y las tres proporciones se pueden reducir á menos, combinando primero dos de ellas, y despues el producto de estas con el esponente de la tercera; y así lo haremos si fueren cuatro ó mas las proporciones dadas.

Luego cuando se multiplicaren ordenadamente los términos de muchas proporciones, los productos harán una nueva proporcion, cuyo esponente será el producto de todos los esponentes primitivos.

De aquí se sigue que si fueren solas dos las proporciones, y del mismo esponente, v. g. 2.

$$\begin{cases} 1:2::3:6. \\ 4:8::5:10. \end{cases}$$

los productos tendrán un esponente, que será 4 cuadrado del primero, y estarán en razon duplicada de la primera razon dupla; esto es, 4:16::15:60, cuyo esponente es 4, término cuadrado del esponente 2, que reinaba en las otras proporciones.

Y por la misma razon si juntaremos tres proporciones en que haya la misma razon, los productos tendrán por esponente un cubo del primero, ó el producto de tres razones iguales, y quedarán en razon triplicada de la primera.

Núm. 165. Luego puestos cualesquiera términos en proporcion 1:2::3:6, los cuadrados de estos 1:4::9:36, y sus cubos 1:8::27:216 tambien estarán en proporcion.

Porque entre cada antecedente y su consiguiente siempre se hallará razon igual, esto es, el producto de dos ó de tres razones iguales.

Núm. 166. Luego en la proporcion de los cuadrados el esponente será un cuadrado del esponente de la proporcion simple ó de la raiz, y en la proporcion de los cubos el esponente tambien será un cubo del esponente de la proporcion simple, por razon de que en la proporcion de los cuadrados el esponente es el producto de dos razones iguales; y en la de los cubos el esponente es el producto de tres razones iguales.

§ XI.

De la proporcion recíproca.

La proporcion directa, que es la que hemos esplicado hasta aquí, se da cuando una cosa contiene á otra igualmente por dos circunstancias, v. g. si una puerta contiene á otra dos veces por la altura y dos veces por la latitud, entonces decimos que la altura mas grande es á la mas pequeña, como la latitud grande es á la longitud pequeña, creciendo siempre á proporcion tanto la longitud como la altura. Lo mismo decimos cuando una sala es seis veces mas ancha que un gabinete, como tambien seis veces mas larga.

Núm. 167. Cuando una cosa escede á otra, v. g. tres veces en una circunstancia, y es escedida de ella tambien tres veces en otra, estan en proporcion recíproca, v. g., cuando un campo es diez veces mas largo que otro, pero diez veces mas estrecho que el otro, escede en una dimension, pero igualmente es escedido en otra.

Pongamos otro ejemplo : cuando dos animales corren, y tanto mayor es la velocidad en el uno cuanto el tiempo preciso para andar una legua es menor que el del otro, decimos que entonces estan las velocidades en proporcion recíproca con los tiempos. Y la velocidad de un galgo v. g. es á la velocidad del hombre, como el tiempo que emplea el hombre es al tiempo que emplea el galgo.

Otro ejemplo : cuanto mayor es la tripulacion de una nave menos tiempo dura una determinada provision de alimentos, y decimos : la tripulacion de la nave grande es á la tripulacion de la pequeña como la duracion de las provisiones es en la nave pequeña respecto de la duracion de los alimentos en la grande.

En todos estos casos se ve que en la proporcion recíproca el segundo y tercero término pertenecen al mismo objeto, y el primero con el cuarto pertenecen al otro, v. g. en el ejemplo de las velocidades y tiempos, la velocidad del galgo es el primer término, y su tiempo que gasta es el cuarto ; y la velocidad del hombre es el segundo término, y su tiempo el tercero, como se ve haciendo la proporcion ; y para abreviar llamaremos á las velocidades V, á los tiempos T, al galgo G, y al hombre H.

VG:VH:TH:TG.

Y en esto está la diferencia de la proporcion directa, en que en la directa el primer término y el tercero pertenecen á un objeto, y el segundo con el cuarto á otro ; pero en la recíproca el primero y el cuarto pertenecen á uno, y el segundo y tercero á otro.

Esta materia, amigo mio, es un poco cansada y oscura, pero es indispensable : si á la primera vez que lees esta carta no la comprendes bien, pasa adelante, ve leyendo las otras, y vuelve despues á leer en esta misma carta, que la irás entendiendo mejor : y créeme, amigo, que puse toda diligencia para tratar esta materia con la mayor facilidad posible : agradéceme la buena voluntad.

CARTA DÉCIMAOCTAVA.

DE LAS LINEAS PROPORCIONALES.

§ I.

Dividir las líneas en la proporcion pedida.

La doctrina, amigo Eugenio, que te dí acerca de la proporcion de los números se aplica fácilmente á las líneas, dividiéndolas en cierto número de partes iguales; y yo ahora tratando de las líneas proporcionales me iré fundando sobre lo que dije acerca de las razones y proporciones de los números.

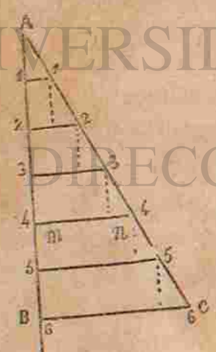


Fig. 90.

Núm. 168. Supongamos, pues, que nos dan una línea AC (Fig. 90), y que nos piden

que la dividamos en cierto número de partes iguales, v. g. seis; haremos lo siguiente.

I.

De una estremidad A, tiremos otra línea indefinida, como AB.

II.

Tomemos con el compas en esta línea indefinida AB varias porciones iguales, y del fin de la última porcion B tiremos una línea BC hasta la estremidad de la línea dada para dividir la AC.

III.

De todos los puntos que fué señalando el compas en AB tiremos paralelas á A, B, C.

IV.

De todos los puntos 1, 2, 3, que las paralelas van á tocar en AC, tiremos unas pequeñas líneas á AB. Hecho esto se infiere:

I.

Que estos triángulos pequeños tienen los lados de los puntitos iguales entre sí por ser iguales á las porciones que tomó el compas en la línea AB (núm. 114).

II.

Que estos triángulos tienen los ángulos correspondientes iguales entre sí por ser hechos por una línea que corta paralelas (núm. 45).

III.

Que en esta suposicion estos triángulos tienen un lado igual, y los ángulos adyacentes; y por esto (núm. 109), son iguales entre sí; y por consiguiente la línea AC está dividida en seis partes iguales, y del mismo modo que lo está la línea AB, aunque las partes de AC no son iguales á las de AB, así como las líneas totales no lo eran.

Núm. 169. Luego cualquiera de las paralelas á la base de este triángulo divide sus lados de tal suerte que las cuatro partes de ellas están en proporcion; porque la línea *mn*, v. g., de tal suerte divide las líneas AB, AC, que A*m*:*m*B::A*n*:*n*C, pues en ambas partes la razon es de 4:2.

Lo mismo podemos decir de cualquiera otra paralela así en este como en otro cualquier triángulo, porque le podemos aplicar la misma demostracion.

Núm. 170. Luego toda paralela á la base de un triángulo (Fig. 91) divide sus lados proporcional-

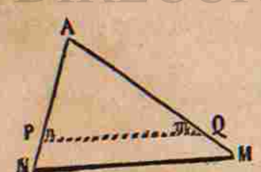


Fig. 91.

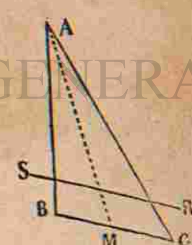


Fig. 92.

mente; y así PQ divide los lados del triángulo en tal forma, que AP:NP::AQ:QM.

Ahora bien, el punto Q, en que la línea AM queda dividida proporcionalmente, es punto único, solo corresponde á P; por consiguiente, toda línea que saliendo de P fuere á cortar el otro lado proporcionalmente ha de ir á parar á Q, y coincidir con la paralela PQ; y por consiguiente será tambien esa línea paralela á la base.

Núm. 171. Luego toda línea que cortare proporcionalmente los lados de un triángulo será paralela á la base de este.

Supongamos ahora (Fig. 92) que tiro yo desde A, vértice de un triángulo, una línea AM sobre la base: esta línea divide un triángulo en dos, y es un lado comun para ambos; y así la línea SR que fuere paralela á la base cortará proporcionalmente, no solo los dos lados antiguos AB, AC, sino tambien la nueva línea AM.

Luego toda línea que sale del vértice de cualquier triángulo queda cortada proporcionalmente á los lados por toda otra paralela á la base.

En esta suposicion podemos sacar de estas proposiciones muchos usos utilísimos para la práctica.

Demos que sea preciso reducir de un golpe muchas líneas diferentes á una séptima parte menos, ó á otra cualquiera proporcion, haremos lo siguiente.

I.

Sean las líneas que deben reducirse (Fig. 93) *a*O, *b*O, *c*O, *d*O, *e*O, *f*O.

II.

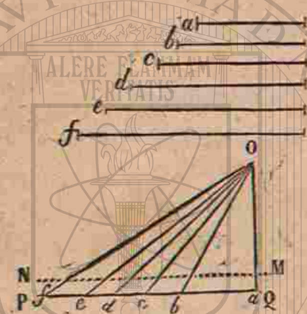


Fig. 93.

Tiraré una línea indefinida PQ : iré, pues, poniendo con el compas todas las líneas dadas, de tal forma que todas salgan del punto O, y terminen en la línea PQ, lo que es muy facil haciendo á O centro de muchos arcos, cuyos rayos sean las líneas dadas, los cuales irán á cortar la indefinida en *a*, *b*, *c*, *f*, *d*, *e*, etc.

III.

Cortaré de una cualquiera, v. g. O*a*, la parte que hayan pedido (núm. 168), y del punto M de la division tiraré la paralela MN : esta línea dividirá todas las demas con proporcion á la primera.

Núm. 172. Luego ya tenemos método para dividir muchas líneas juntamente en la misma razon pedida.

Dado un triángulo, cualquiera que sea (Fig. 94), supongamos que dividimos por medio el ángulo del vértice B : esta línea BP dividirá la base en dos

partes MN. Veamos ahora si son estas proporcionales á los dos lados, de suerte que podamos decir M:N::Q:T : para examinar este punto tiro de la estremidad *e* una paralela ABP, y continuo el lado TS hasta encontrar con la paralela en I.

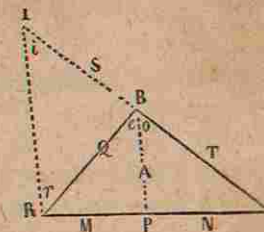


Fig. 94.

Por lo que queda dicho al número 170, por ser la línea BP paralela á RI, base del triángulo grande, dividirá sus lados proporcionalmente, y por consecuencia M:N::S:T.

Ahora bien, si el lado Q fuere igual á S se le podrá sustituir y poner en su lugar : de este modo tendremos la proporcion que buscamos. Para conocer que Q es igual á S, advertiremos que el ángulo *i*=*o* por las paralelas, *o*=*e* por la division en dos mitades, *e*=*r* su alterno : luego *i*=*r*; por consiguiente el triángulo IBR es isósceles (núm. 92), y su lado S igual Q; luego podemos en lugar de S poner Q sin perturbar la proporcion, y decir M:N::Q:T.

Núm. 173. Luego la línea que divide el ángulo del vértice por el medio divide la base proporcionalmente á los lados.

§ II.

De los lados proporcionales en los triángulos semejantes.

Núm. 174. Llamamos *triángulos semejantes* aquellos que tienen todos los ángulos correspondientes iguales (Fig. 95), v. g. los triángulos ABC y *abc*.

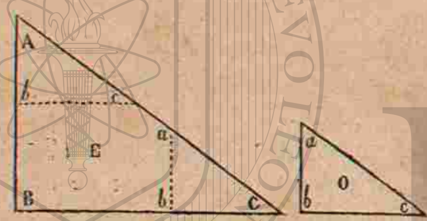


Fig. 95.

Los lados opuestos á angulos semejantes se llaman tambien *homólogos*. Si yo, pues, sobrepongo el triángulo pequeño O sobre el grande E á la parte del ángulo A, los dos ángulos A*a* y las líneas que los forman coincidirán. Ademas de esto como el ángulo b=B, y el ángulo c=C, la línea de puntos *bc* es paralela á BC (número 42), y así corta los dos lados AB, AC proporcionalmente (núm. 170); y comparando los dos triángulos OE, podemos decir $ab : AB :: ac : AC$.

Del mismo modo poniendo el triángulo pequeño O sobre el grande E en el ángulo C, se prueba que *ab*, que corresponde á AB, le es paralela, y que

por consiguiente corta en proporcion los dos lados AC, BC.

Núm. 185. Luego todos los triángulos semejantes tienen los lados proporcionales.

Amigo Eugenio, por ser esta proposicion la clave de infinitos descubrimientos en geometría procuraremos todos los modos de conocer cuando son semejantes dos triángulos, y á esto se ordenan las observaciones siguientes.

Sabemos que siempre que una línea es paralela á la base de un triángulo (Fig. 94) hace dos ángulos *mn* iguales á MN, adyacentes á la base (núm. 44); y que el ángulo del vértice A queda comun al triángulo antiguo y al nuevo. Pero cuando dos triángulos tienen los ángulos correspondientes iguales son semejantes.

Núm. 176. Luego toda línea que corte los lados de un triángulo siendo paralela á la base hace dos triángulos semejantes.

Dijimos tambien que todos los ángulos formados por líneas respectivamente paralelas eran iguales (núm. 45).

Núm. 177. Luego cuando todos los lados de un triángulo fueren paralelos á los de otro, los triángulos son semejantes.

Sabemos (Fig. 96) que si una línea fuere perpendicular sobre otra, si se la da una revolucion de 90 grados, ó coincide con ella, ó es su paralela (núm. 18); y así cuando un triángulo

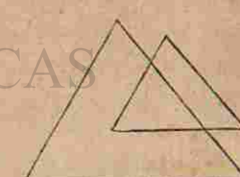


Fig. 96.

tuviere todos los lados perpendiculares á sus correspondientes en el otro, en dando una revolucion de 90 grados á un triángulo, todos los lados de uno (Fig. 97) serán paralelos á los del otro; y por consiguiente los ángulos respectivos iguales.

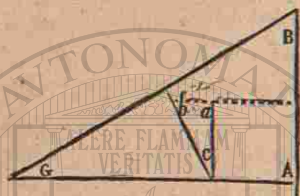


Fig. 97.

Num. 178, Luego cuando el triángulo tuviere todos sus lados perpendiculares á los de otro le será semejante.

Tambien dijimos que los ángulos opuestos en el vértice son iguales (núm. 15), y que tambien lo eran los ángulos alternos.


Fig. 98.

Núm. 179. Luego cuando los triángulos son formados por dos líneas que se cruzan, y por dos entre sí paralelas, son semejantes (Fig. 98), porque sus ángulos ó son verticalmente opuestos, ó son alternos.

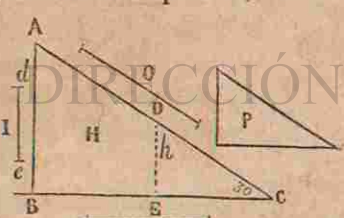


Fig. 99.

Formando un triángulo cualquiera H (Fig. 99), si tomamos tres líneas E, I, O proporcionales á sus lados, podremos hacer

de ellas un triángulo, v. g. P. Veamos ahora si necesariamente es este nuevo triángulo semejante al primero.

Poniendo los dos lados E, O sobre sus correspondientes (supongamos que son mitades de ellos) terminan en DE: tiremos por los puntos en que los lados quedan cortados proporcionalmente una línea, la que siendo por eso mismo paralela AB (núm. 177) formará el triángulo *h*, semejante á H por el núm. 176: solo falta demostrar que este pequeño triángulo *h* es lo mismo que P, hecho con las tres proporcionales, lo que se conoce así.

Como los triángulos *h* y H son semejantes, todas sus líneas serán proporcionales, y de este modo la vertical será á la vertical, como la horizontal á la horizontal; pero EC es la mitad de BC por la suposicion. Luego DE será lo mismo que *de*, mitad de AB; y por consiguiente el triángulo *h* será lo mismo que el triángulo P.

Núm. 180. Luego cuando los tres lados de un triángulo son proporcionales á los tres de otro, los triángulos son semejantes.

Esto supuesto, si nos pidieren una cuarta proporcional, esto es, si nos dieren (Fig. 100) tres líneas AB, AC, AD, y nos pidieren otra cuarta que con las tres haga proporcion, haremos lo siguiente.

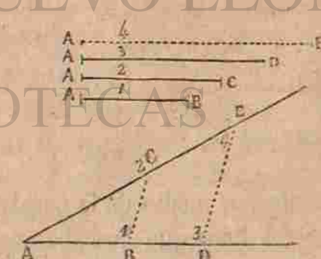


Fig. 100.

I.

Haré un ángulo arbitrario de líneas indefinidas BCA, y pondré por una parte la primera línea dada AB, y cerraré el triángulo con la línea de puntitos BC.

II.

Pondré en el primer lado la tercera línea dada AD, y tiraré una línea DE paralela á BC.

Esto hecho, los dos triángulos son semejantes por el núm. 176, y los lados proporcionales por el número 175 : luego AB:AC::AD:AE; por consiguiente AE es la cuarta proporcional que nos pedian.

Núm. 181. Luego tenemos modo de hallar una cuarta proporcional.

Del mismo modo, si dadas dos líneas AB, AC, nos pidieren una tercera proporcional, haremos lo siguiente (Fig. 101).

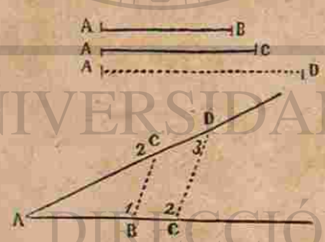


Fig. 101.

Hecho el ángulo arbitrario, pondremos de un lado la primera y segunda línea, y en el otro repetiremos la segunda, y cerraremos el triángulo con la línea BC; y últimamente por medio de la paralela CD hallaremos la tercera línea que buscábamos, y podremos decir AB:AC::AC:AD.

Núm. 182. Luego tenemos modo de hallar una tercera proporcional.

§ III.

Aplicacion de la doctrina precedente á medir distancias inaccesibles sin el socorro de la trigonometría.

Nada lisonjea mas el gusto de los principiantes que el medir distancias inaccesibles sin instrumentos ni cálculos embarazosos, lo cual pueden conseguir sacando varias consecuencias de la regla general que arriba hemos puesto, y es esta.

Todos los triángulos semejantes tienen los lados en proporcion.

De aquí se sacan las consecuencias siguientes :

I.

Núm. 183. Luego para medir la distancia inaccesible AB (Fig. 102) bastará hacer lo siguiente.

1º Poner una estaca en B y otra en Q, esto es, en la línea visual que va desde B hasta el objeto A. Despues se tira la línea visual desde B hasta C, en donde pondremos otra estaca C.

2º Tiraremos una línea visual *ab* paralela á la otra visual BA; la línea *ba* se notará con dos estacas; pero de modo que la estaca *a* esté tambien en la visual CA, y *b* en la visual CB.

3º Estas estacas con el objeto distante A hacen los términos de los triángulos semejantes C, B, A,

I.

Haré un ángulo arbitrario de líneas indefinidas BCA, y pondré por una parte la primera línea dada AB, y cerraré el triángulo con la línea de puntitos BC.

II.

Pondré en el primer lado la tercera línea dada AD, y tiraré una línea DE paralela á BC.

Esto hecho, los dos triángulos son semejantes por el núm. 176, y los lados proporcionales por el número 175 : luego AB:AC::AD:AE; por consiguiente AE es la cuarta proporcional que nos pedian.

Núm. 181. Luego tenemos modo de hallar una cuarta proporcional.

Del mismo modo, si dadas dos líneas AB, AC, nos pidieren una tercera proporcional, haremos lo siguiente (Fig. 101).

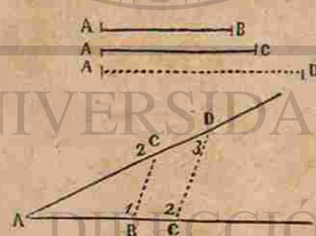


Fig. 101.

Hecho el ángulo arbitrario, pondremos de un lado la primera y segunda línea, y en el otro repetiremos la segunda, y cerraremos el triángulo con la línea BC; y últimamente por medio de la paralela CD hallaremos la tercera línea que buscábamos, y podremos decir AB:AC::AC:AD.

Núm. 182. Luego tenemos modo de hallar una tercera proporcional.

§ III.

Aplicacion de la doctrina precedente á medir distancias inaccesibles sin el socorro de la trigonometría.

Nada lisonjea mas el gusto de los principiantes que el medir distancias inaccesibles sin instrumentos ni cálculos embarazosos, lo cual pueden conseguir sacando varias consecuencias de la regla general que arriba hemos puesto, y es esta.

Todos los triángulos semejantes tienen los lados en proporcion.

De aquí se sacan las consecuencias siguientes :

I.

Núm. 183. Luego para medir la distancia inaccesible AB (Fig. 102) bastará hacer lo siguiente.

1º Poner una estaca en B y otra en Q, esto es, en la línea visual que va desde B hasta el objeto A. Despues se tira la línea visual desde B hasta C, en donde pondremos otra estaca C.

2º Tiraremos una línea visual *ab* paralela á la otra visual BA; la línea *ba* se notará con dos estacas; pero de modo que la estaca *a* esté tambien en la visual CA, y *b* en la visual CB.

3º Estas estacas con el objeto distante A hacen los términos de los triángulos semejantes C, B, A,

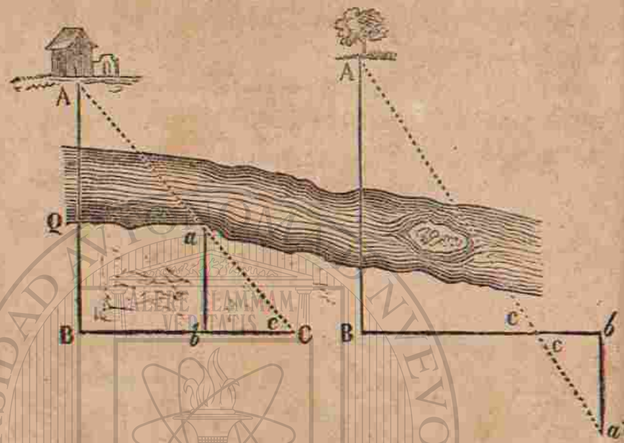


Fig. 102. Fig. 103.

y c, b, a : consideremos las dos líneas BC y *bc* como bases de los dos triángulos, cuyos vértices sean A y *a*. Ahora bien, como estos triángulos, por ser semejantes han de tener los lados proporcionales (núm. 175), se sigue que la pequeña base es respecto de la grande como la pequeña altura es respecto de la grande; y así tenemos esta proporcion *cb*:CB::*ba*:BA; y así si la pequeña base es, v. g., diez veces menor que la grande BC, tambien la línea *ba* será diez veces menor que la distancia BA, que es la que deseábamos conocer.

II.

Núm. 184. Cuando no se puede trabajar en el terreno que va desde la línea BC (Fig. 103) hácia adelante, por ser el terreno corto ó escabroso, se

puede hacer esta operacion en la parte opuesta en el terreno mismo que pisamos, y el modo es facil.

1º Puesta la línea visual BA, tiremos una perpendicular B*b*, y despues otra *ba* perpendicular á *b*B.

2º Estas dos líneas BA y *ba*, siendo perpendiculares á la misma línea B*b*, hacen los ángulos alternos iguales, y vienen á quedar paralelas entre sí (núm. 41).

3º Dividamos la línea B*b* en partes *alicuotas* (así se llaman las que repetidas agotan el valor de la cantidad, como si una línea se divide en doce dedos ó cuartas, que valgan tanto como toda la línea, se dice está dividida en partes *alicuotas*, porque alicuantas son las que se consideran mitades de mitades, etc.) : divídase, pues, la línea B*b*, y pongamos en una de ellas la estaca C.

4º Retirémonos por cima de la línea *ba* hasta que la estaca C nos embarace la vista del objeto distante A, y pongamos allí otra estaca *a*.

En este caso los dos triángulos *abc*, ABC, son semejantes (núm. 179), y los lados proporcionales: llamamos bases de estos triángulos las líneas BC y *bc*, luego la pequeña base es respecto de la grande como la altura del triángulo pequeño es á la altura del grande, y podemos hacer esta proporcion *bc*:BC::*ba*:BA; y así queda conocida la distancia BA que nos es inaccesible.

III.

Núm. 185. Si quisiésemos medir la altura de una torre por la sombra, lo podremos hacer del modo siguiente (Fig. 104).

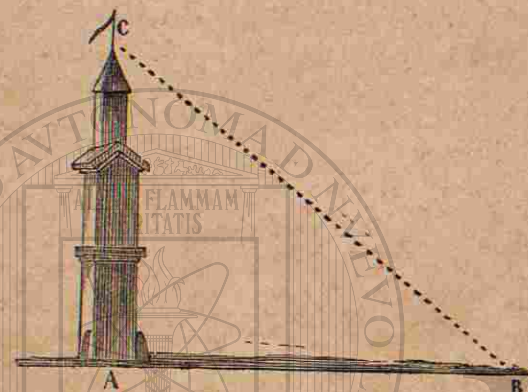


Fig. 104.

1º Me llegaré al fin de la sombra de la torre, de modo que la sombra de mi cabeza llegue á la última punta de la sombra que hace la torre.

2º Dejaré una señal en el suelo en el mismo lugar en que estaban mis pies; un criado notará tambien en el suelo el lugar B en que estuvo la sombra de mi cabeza, igual al mismo punto donde llegaba la sombra de la torre.

3º Hecho esto, ya tenemos dos triángulos semejantes, porque todos sus lados son respectivamente paralelos, pues la sombra de mi cuerpo es paralela á la de la torre: los rayos del sol que pasan por mi cabeza para terminar mi sombra, y los que pasan por la aguja de la torre para terminar la de esta y últimamente mi cuerpo con el de la torre, todos

están paralelos, pues estos dos últimos están á plomo.

4º Luego la sombra pequeña es respecto de la grande, como la altura de mi cuerpo es á la altura de la torre. Esto supuesto, como yo puedo medir el espacio que ocupa mi sombra en el tiempo de la operacion, pues quedaron señales en el suelo, así de mis pies como de la sombra de mi cabeza, y aun por el lugar de esta podemos conocer hasta donde llegó la sombra de la torre en aquel mismo tiempo; se sigue que si la sombra de la torre es, v. g. veinte veces mayor que la mia, tambien la altura de la torre será veinte veces mayor que la de mi cuerpo.

Adviértase que se debe contar en la sombra de la torre todo lo que hay desde su centro A, para que quede á plomo la línea que va hasta la aguja C, pues solo esta línea es paralela á mi cuerpo puesto á plomo.

Tambien se ha de notar, que esta operacion no admite tanta exactitud como las que se hacen con las líneas visuales, porque la sombra no termina en punto fijo: no obstante siempre se conoce la altura con corta diferencia.

Advertencia. — Cuando se forman estas proporciones, siempre se ha de guardar el término no conocido para cuarto lugar; y por consiguiente se ha de principiar por un término que no sea *homólogo*, ó correspondiente al término incógnito v. g., pues en el caso presente el término no conocido es la altura de la torre; ha de entrar en cuarto lugar, y no debo empezar por mi altura, porque es el término *homólogo* correspondiente al incógnito, sino que debo principiar por mi sombra, y decir : una sombra es á otra como una altura á otra altura, ó una sombra pequeña es á la altura pequeña como la sombra grande á la altura grande.

Te enseño este problema, amigo Eugenio, no porque en la práctica se pueda ejecutar con perfecta exactitud, sino porque sirve para una medida poco mas ó menos, y es facil.

Tambien te advierto, que cuando se comparan los lados de dos triángulos semejantes, solo se comparan entre sí los lados *homólogos*, esto es, los que están opuestos á ángulos iguales.

IV.

Núm. 186. Si hubiere un grafómetro (Fig. 105) y un semicírculo graduado (Fig. 106), se pueden medir las distancias inaccesibles con bastante exactitud de este modo.

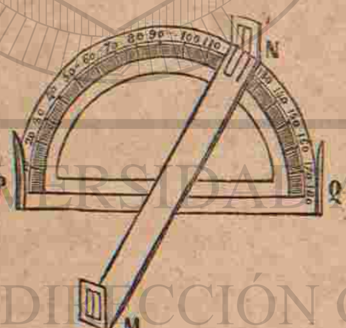


Fig. 105.

1° Poniendo dos estacas en BC (Fig. 102), las cuales con el objeto distante A hacen los tres puntos del triángulo visual : despues de esto en el lugar C pondré el grafómetro (Fig. 105) para medir el ángulo C.

El medio de medir los ángulos visuales con el grafómetro es el siguiente : pondré en C horizontal el instrumento, y de modo que por la regla ó *alidada* fija PQ vea yo la estaca fija en B, y sin mover el instrumento volveré la *alidada* ó regla movible MN, de forma que por las *pínulas* MN vea yo el objeto distante A : de este modo el arco del grafómetro, comprendido entre las dos alidadas, dará el número de grados comprendidos por el ángulo visual CA y CB de la (Fig. 105).

2° Medido por este modo el ángulo visual en C, quitaré el grafómetro de allí, y dejaré una estaca en su lugar : le pasaré al lugar de otra estaca en A : volveré el instrumento, de modo que por la alidada fija PQ pueda ver la estaca C, y sin tocar al instrumento volveré la alidada movible MN hasta ver el objeto distante en A ; y entonces el arco comprendido entre las dos alidadas mostrará el valor del ángulo visual en B,

3° Mediré la línea BC para ver cuantos pasos ó varas contiene.

4° Esto supuesto, haré en un papel (Fig. 106)

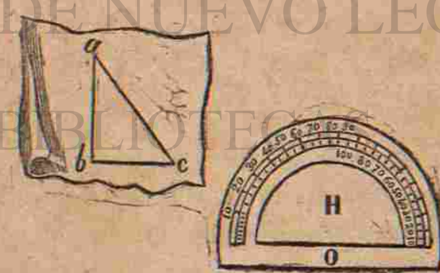


Fig. 106.

una línea *bc*, que tendrá tantas partes de pie de rey, ó cualquiera otro petipie, cuantas varas, brazas, etc., hubiere en la línea visual BC : tirada así esta línea *bc*, pondré en sus estremidades el centro O del semicírculo H, y haré allí dos ángulos iguales á los dos ángulos visuales que tenemos en B y en C : pondré dos puntitos en los grados que les corresponden en el semicírculo, por los cuales tiraré dos líneas, que se han de cruzar en alguna parte ; y en donde se cruzan pondré la letra *a*, que corresponde al objeto distante A.

V.

Hechos estos triángulos, llamaré bases á las líneas BC y *bc* : llamaré alturas las líneas BA y *ba*, y diré que la base del triángulo pequeño es á su altura como la base del grande es á la suya. Y de este modo sabiendo yo cuantas partes de petipie tiene la línea *bc*, y pudiendo averiguar cuantas se contienen en *ba*; sabiendo tambien cuantas brazas tiene la línea visual BC, tengo una proporcion $bc:ba::BC:BA$: los tres términos son conocidos, y por consiguiente el cuarto lo será, y este cuarto término es la distancia que buscábamos.

VI.

Núm 187. Podemos medir de otro modo al mismo tiempo la distancia y altura de un objeto distante sin mas instrumento que dos estacas á plomo (Fig. 107).

1º Pongamos dos estacas á plomo P y Q.

2º Llegando á la estaca P notaré allí el punto *a* á

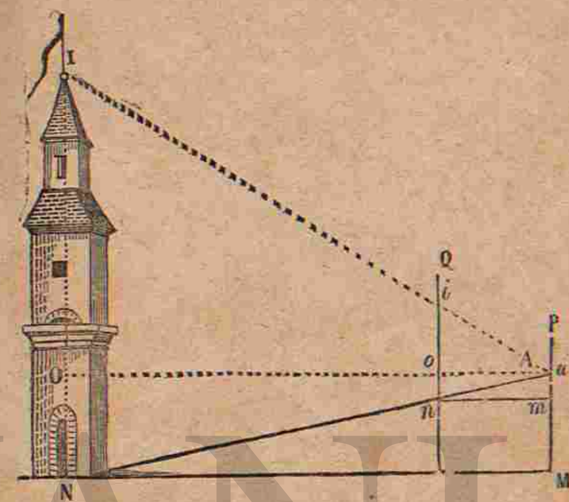


Fig. 107.

la altura de los ojos, y notaré en la otra estaca el punto *n*, por donde pasa el rayo visual que va á terminar á la base N del edificio.

3º Tomaré la distancia que hay desde *n* hasta el suelo, y la pasaré á la estaca P en el punto *m* : ya con esto tenemos un triángulo pequeño *anm* y otro grande que le es semejante ANM ; y la razon de semejanza es, porque *nm* es paralela al suelo ó pavimento representado en la línea NM.

4º Supuesta la semejanza de los triángulos, llamaré su altura las líneas *am* y AM, y diré la altura del pequeño es á la del grande como la base del pequeño es á la base del grande ; y así $am:AM::mn:MN$: siendo las tres primeras cantidades conocidas tambien lo será la cuarta, que es la distancia del edificio representada en la línea NM.

Mas para medir la altura haré lo siguiente :

I.

Llevaré á la estaca Q la altura *a*M, notando allí el punto *o*, de forma que la línea visual A*o* y O quede paralela al pavimento.

II.

Desde *a* miraré á lo mas alto del edificio, y notaré en la segunda estaca el punto *i*, por donde pasa el rayo visual.

III.

Con esto tenemos un pequeño triángulo *aio*, y otro grande AIO, el cual es semejante, porque la estaca Q está paralela al edificio.

IV.

Luego la base del pequeño triángulo es á la del grande como la altura del pequeño á la altura del grande; y así diré $ao : AO :: oi : OI$; pero las tres primeras cantidades son conocidas; luego tambien lo será la cuarta : y si juntáremos la altura OI con la altura *a* y M, ó bien ON, quedará conocida la altura total del edificio NI.

Advierto que tampoco esta operacion puede ser exactísima; pero hecha con cuidado dará á conocer la distancia y altura con corta diferencia.

V.

Núm. 188. Por semejante método tenemos el medio para medir una distancia inaccesible por ambas estremidades (Fig. 108).

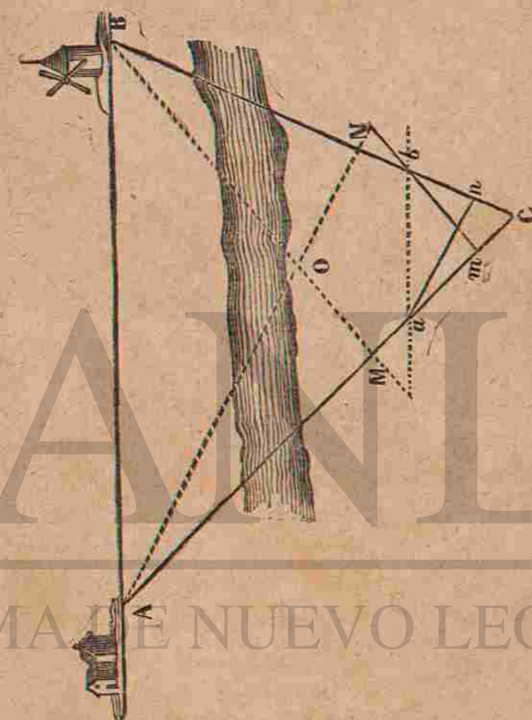


Fig. 108.

I.

Del punto C tomado á discrecion miraré á los dos objetos, cuya distancia quiero conocer, y tendré el triángulo ABC, cuyos tres lados por ser incógnitos parecen inútiles para toda operacion; mas para conocerlos haré lo siguiente :

II.

De un punto arbitrario M, tomado en la línea CA, miraré al objeto B, y tomando en esa misma línea una parte proporcional á mi discrecion notaré un punto *m*, del cual tiraré la línea *mb* paralela á la grande MB, lo que es muy facil, poniendo el grafómetro en M y despues en *m*, sin mudar la graduacion de la alidada movible, y notaré el punto *n*.

Esto hecho, ya tenemos dos triángulos semejantes *mbc* y MBC : llamaré bases á las líneas MC y *mc* : podré decir la base del pequeño es á la del grande, como la oblicua del pequeño es á la del grande, de este modo : C*m*:CM::C*b*:CB.

III.

Trasportaré á la línea CB las mismas distancias que tomé en la línea CA, esto es, notando los puntos N*n* que estan en las mismas distancias de C que *m* y M : tiraré de N una línea visual NA y otra paralela á esta *na*, con el fin de tener dos triángulos semejantes *nac*, NAC; y llamando bases de estos triángulos las líneas C*n*, CN, podemos decir la base del pequeño es á la del grande como la oblicua del pequeño es á la del grande, esto es, C*n*:CN::C*a*: CA, y como las tres primeras cantidades son conocidas, tambien lo será la cuarta CA.

IV.

Si el terreno no consintiere tomar los puntos *n*N

en la misma distancia de *m*M, bastará tomar cualesquiera otros, con tal que la pequeña distancia C*n* sea respecto de la grande CN, como C*m* es á CM.

V.

Juntando ahora lo que tenemos probado conoceremos que si C*m* es v. g. la cuarta parte de C*m*, y C*n* de CN, tambien C*a* será la cuarta parte de CA y C*b* de CB.

VI.

Habiendo hallado los dos puntos *ab* que dividen en proporcion los dos lados CA, CB, tiraremos por ellos una línea *ab*, la cual por el número 171 es paralela á la no conocida AB; y así los dos triángulos C*ab*, CAB son semejantes y los lados proporcionales; por consiguiente llamando bases las líneas *ab*, AB, diremos que el lado del pequeño C*b* es al lado del grande CB como la base del *ab* pequeño á la del grande AC, esto es, B*a*:CA::*ab*:AB.

Y con esto se conocerá no solo la distancia AB, sino tambien en qué rumbo ó direccion se halla esta línea, pues debe ser la misma que la de su paralela *ab*.

§ IV.

Aplicacion de la doctrina dada á la division de cualquiera línea en partes proporcionales muy pequeñas.

Teniendo presente, amigo Eugenio, dos verdades esenciales ya probadas, una que la paralela que corta un triángulo hace dos triángulos semejantes (núm. 176), otra que los triángulos semejantes tienen los lados proporcionales (núm. 175), sacaremos de ellas varias consecuencias.

I.

Núm. 189. El modo de dividir exactamente cualquier línea muy pequeña en las partes que se pidieren (Fig. 109).

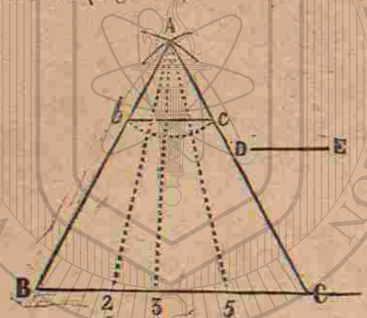


Fig. 109.

Sea la línea dada DE, y supongamos que las quieren dividir en 2, 3 ó 5 séptimas partes, lo que se espresa así: $\frac{2}{7}$, $\frac{3}{7}$, $\frac{5}{7}$.

1º Tomaremos una línea arbitraria CB, y en ella con el compas haremos siete medidas iguales entre sí, bien que tambien á discrecion.

2º Tomaré con el compas las siete medidas juntas que hace la línea BC, y describiré desde sus estremidades dos arcos que se cruzan en A para formar un triángulo equilátero.

3º De las divisiones 2, 3, 5 tiraré líneas al vértice A. Esto hecho, ya sé que toda línea que fuere paralela á BC quedará dividida como ella lo está, esto es, $\frac{2}{7}$, $\frac{3}{7}$, $\frac{5}{7}$.

4º Tomaré con el compas la línea dada DE, y desde el vértice A describiré un arco que corte los lados del triángulo en *bc*, y tiraré la línea *bc*, la cual será igual á DE, por cuanto el nuevo triángulo A*bc*, teniendo el vértice comun en A, y los ángulos de la base iguales con los del triángulo grande ABC, ha de ser equilátero como él, y por la misma razon todos los triángulos pequeños, cuyas bases hacen la línea *bc*, son semejantes á los grandes, cuyas bases juntas hacen la línea BC.

Luego la línea dada DE (ó su igual *bc*) se halla dividida como BC, esto es, en $\frac{2}{7}$, $\frac{3}{7}$, $\frac{5}{7}$.

II.

Núm. 190. Tenemos el modo de formar el petipie de centésimas, que muchos llaman de décimas.

El petipie de centésimas se halla en muchos instrumentos matemáticos para tomar las partes centésimas de una pulgada, y se puede aplicar á cualquiera otra línea; este se forma del modo siguiente (Fig. 110).

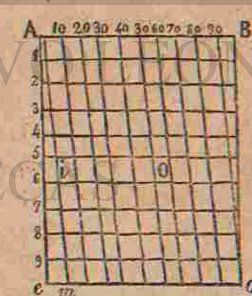


Fig. 110.

1º Sea la línea dada AB, la cual se procura dividir en cien partes iguales; para esto la dividiremos en diez partes iguales, numerándolas por las decenas siguientes: 10, 20, 30, etc.

2º De las dos estremidades bajaremos las dos paralelas entre sí A*e*, B*o*, en cada una de las cuales tomaré con el compas diez partes iguales, notándolas con los números siguientes 1, 2, 3, etc.

3º Uniremos las dos paralelas A*e*, B*o* con la línea *oe* igual á AB.

4º Tiraremos paralelas AB por todos los puntos notados en A*e*.

5º Tiraremos una oblicua A*m*, y todas las demas paralelas á esta oblicua.

Esto supuesto demos que me pidan 56 partes iguales centésimas de la línea AB; buscaré en ella la division 50, y en A*e* la division 6, y veré en qué parte esas dos divisiones se encuentran, lo que sucede en el punto O; y tomando con el compas la distancia de O hasta 6, hallaré 56 partes centésimas. Por cuanto de O hasta *i* hay 5 divisiones, cada una de 10 partes, y desde *i* hasta 6 hay seis partes centésimas, lo que se prueba de este modo:

Estando este triángulo *e*A*m* dividido por paralelas, en cualquier parte que le corten estas siempre queda triángulo semejante al total: luego así como la altura del grande es á la del pequeño como 10 á 6, así la base del grande será á la del pequeño como 10 á 6; y así *em* vale 10 partes centésimas, 6 *i* valdrá 6.

Del mismo modo se pueden hallar todas las partes centésimas desde 1 hasta 99.

§ V.

De las líneas que son medias proporcionales.

Núm. 191. Llamamos, Eugenio, media proporcional una línea, que si se pone entre otras dos líneas dadas haga con ellas una progresion geométrica ó proporcion continua.

Pero antes es preciso advertir que se llama hipotenusa en un triángulo la línea opuesta á un ángulo recto, v. g. (Fig. 111), la línea AB y el triángulo que tiene un ángulo recto se llama triángulo rectángulo.

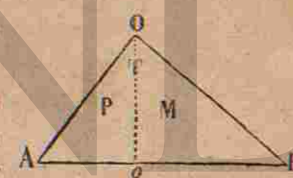


Fig. 111.

Tomemos ahora un triángulo rectángulo, bajemos desde el ángulo recto la línea O*o* perpendicular sobre la hipotenusa AB, ya tenemos el triángulo total T dividido en dos, uno pequeño P, otro mayor M.

P tiene un ángulo recto en *o*, así como el total le tiene en O, y ademas de esto tiene el ángulo A comun al triángulo P y al total T; y por consiguiente (núm. 86) será semejante al total.

Del mismo modo el triángulo M tiene un recto en *o*, y otro agudo en B, comun al triángulo M y al triángulo T; y por consiguiente será semejante al tocada una de las cuales tomaré con el compas diez partes iguales, notándolas con los números siguientes 1, 2, 3, etc.

3º Uniremos las dos paralelas A*e*, B*o* con la línea *oe* igual á AB.

4º Tiraremos paralelas AB por todos los puntos notados en A*e*.

5º Tiraremos una oblicua A*m*, y todas las demas paralelas á esta oblicua.

Esto supuesto demos que me pidan 56 partes iguales centésimas de la línea AB; buscaré en ella la division 50, y en A*e* la division 6, y veré en qué parte esas dos divisiones se encuentran, lo que sucede en el punto O; y tomando con el compas la distancia de O hasta 6, hallaré 56 partes centésimas. Por cuanto de O hasta *i* hay 5 divisiones, cada una de 10 partes, y desde *i* hasta 6 hay seis partes centésimas, lo que se prueba de este modo:

Estando este triángulo *e*A*m* dividido por paralelas, en cualquier parte que le corten estas siempre queda triángulo semejante al total: luego así como la altura del grande es á la del pequeño como 10 á 6, así la base del grande será á la del pequeño como 10 á 6; y así *em* vale 10 partes centésimas, 6 *i* valdrá 6.

Del mismo modo se pueden hallar todas las partes centésimas desde 1 hasta 99.

§ V.

De las líneas que son medias proporcionales.

Núm. 191. Llamamos, Eugenio, media proporcional una línea, que si se pone entre otras dos líneas dadas haga con ellas una progresion geométrica ó proporcion continua.

Pero antes es preciso advertir que se llama hipotenusa en un triángulo la línea opuesta á un ángulo recto, v. g. (Fig. 111), la línea AB y el triángulo que tiene un ángulo recto se llama triángulo rectángulo.

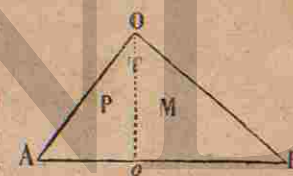


Fig. 111.

Tomemos ahora un triángulo rectángulo, bajemos desde el ángulo recto la línea O*o* perpendicular sobre la hipotenusa AB, ya tenemos el triángulo total T dividido en dos, uno pequeño P, otro mayor M.

P tiene un ángulo recto en *o*, así como el total le tiene en O, y ademas de esto tiene el ángulo A comun al triángulo P y al total T; y por consiguiente (núm. 86) será semejante al total.

Del mismo modo el triángulo M tiene un recto en *o*, y otro agudo en B, comun al triángulo M y al triángulo T; y por consiguiente será semejante al total, y semejante tambien á AP; de aquí sacaremos esta consecuencia general.

Núm. 192. Luego toda perpendicular sobre la hipotenusa divide el triángulo en dos, que son semejantes entre sí y al total.

Siendo, pues, los tres triángulos semejantes, sus lados serán proporcionales (núm. 175). Tomemos, pues, en P y en M los lados que forman los ángulos rectos para compararlos entre sí, y diremos : A*o*:*o*O::*o*O:*o*B.

Núm. 193. Luego la perpendicular bajada sobre la hipotenusa es media proporcional entre las dos partes de ella.

Luego si nos dieren dos líneas *ab* (Fig. 112), y nos

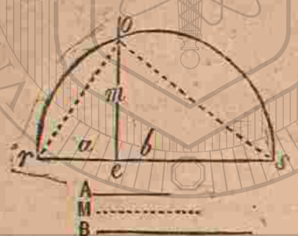


Fig. 112.

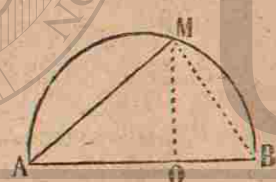


Fig. 113.

pidieren una media proporcional entre ellas, se podrá hallar de este modo :

Pondré las dos líneas *ab* seguidas una á otra : haré de ambas el diámetro de un semicírculo, y levantaré del punto *e* en que se juntan las dos una perpendicular : despues tirando las dos líneas *or*, *os*, haré un triángulo rectángulo (núm. 47), y por el núm. precedente *a*:*m*::*m*:*b*.

Núm. 194. Luego tenemos método para hallar una media proporcional entre dos líneas dadas.

Por la misma razon de la semejanza de los triángulos P y T (Fig. 111), podemos comparar entre sí los lados que en uno y otro forman el ángulo comun, y decir : A*o*:AO::AO:AB. Lo mismo haremos en los triángulos M y T, comparando entre sí los lados que forman el ángulo comun C, y diremos : B*o*:BO::BO:BA.

Núm. 195. Luego dividido cualquier triángulo rectángulo por la perpendicular sobre la hipotenusa, cualquiera de los lados es media proporcional entre toda la hipotenusa y el segmento de ella que le corresponde.

Si describimos un semicírculo (Fig. 113), su diámetro será hipotenusa del triángulo hecho por ella, y por dos cuerdas terminadas en su circunferencia, porque estas precisamente hacen ángulo recto (núm. 74).

Núm. 196. Luego cualquier cuerda (Fig. 113) tirada de la estremidad del diámetro, es media proporcional entre todo el diámetro, y el segmento de este, cortado por la perpendicular bajada desde la estremidad de la cuerda, y podemos decir : AO:AM::AM:AB.

Tambien podemos hallar una media proporcional por otro medio : si juntamos en un punto fuera del círculo (Fig. 114) una secante y una tangente, tenemos tres líneas, que son la esterior AO, la tangente AN, y la secante total AM. Para examinar si estan en proporcion tiraremos las líneas NO y NM, las cuales forman dos triángulos NAO, NAM. Llamemos al pequeño P y al grande T.

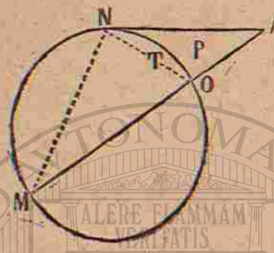


Fig. 114.

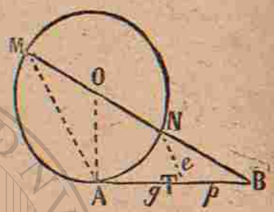


Fig. 115.

Estos dos triángulos tienen el ángulo A comun : ademas de esto el ángulo M tiene por medida la mitad del ángulo NO (núm. 72), y el ángulo ONA tiene tambien esta medida, por ser ángulo de cuerda y de tangente. Luego los dos triángulos son semejantes ; y si comparamos los lados homólogos que forman el ángulo comun A, se hallará proporcionales, y podremos decir : $AO:AN::AN:AM$.

Núm. 197. Luego la tangente que toca en la estremidad de la secante es media proporcional entre toda la secante y su parte esterior.

§ VI.

Modo de dividir cualquier línea en media y estrema razon.

Núm. 198. Llamamos, amigo Eugenio, dividir una línea en media y estrema razon cuando la dividimos en tal forma, que la parte pequeña comparada con

la grande esté en la misma razon que la mayor tiene con la total (Fig. 115) : v. g. si nos dan la línea AB para dividirla, y la partimos en el punto *e*, quedará la parte pequeña *p* con la grande *g*, como esta grande comparada con la total T, y podremos decir : $p:g::g:T$. Para conocer que esto es verdad, haremos lo siguiente.

I.

Tomaré la mitad de la linea dada AB, y levantaré sobre la estremidad una perpendicular AO, igual á esa misma mitad, la que me servirá de radio para un círculo, quedando de este modo su diámetro igual á la línea dada AB.

II.

Tiraré de la estremidad B una secante que pase por el centro del círculo, y termine en la circunferencia M.

Esto hecho, ya tenemos una secante y una tangente unidas en un punto, y por consiguiente (núm. 197) la esterior BN es á la tangente BA, como esta es respecto de la secante BM, diciendo así : ÷ $BN:BA:BM$, BN es á BA como BA á BM.

Ahora pues el diámetro MN es igual á la tangente AB, y se puede sustituir por ella sin perturbar la progresion ; luego podemos decir ÷ $BN:NM:BM$, quedando de este modo dividida la secante en media y estrema razon.

Pero si tiramos las dos paralelas MA, N*e*, tenemos dos triángulos semejantes, cuyos lados estan cortados proporcionalmente y del mismo modo (núm. 170).

Núm. 199. Luego tenemos modo de cortar cualquiera línea dada en media y estrema razon.

§ VII.

De las líneas que estan en proporcion recíproca.

Núm. 200. Llamamos proporcion recíproca siempre que un objeto comprende á otro tantas veces en una circunstancia, cuantas es comprendido por él en otra: de esta suerte en la proporcion recíproca el segundo y tercer término pertenecen al mismo objeto, y el primero con el cuarto pertenecen á otro.

En esta suposicion, si tiramos en un círculo dos cuerdas AN, EM (Fig. 116), las cuales se corten, y

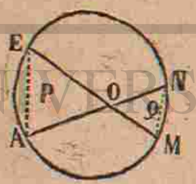


Fig. 116.

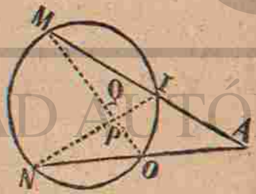


Fig. 117.

unimos sus estremidades con dos líneas EA, NM, haremos dos triángulos P y Q, los cuales son semejantes, porque los ángulos en O son opuestos en el vértice, y los án gulos en EN, por estar en la circunferencia y apoyados en el mismo arco AM, tambien son iguales. Luego los lados que forman los ángulos en O son proporcionales; y así se infiere que OA:OE::OM:ON. Bien se advierte que el segundo y tercer término pertenecen á una misma línea, así como el primero y el cuarto pertenecen á la otra.

Núm. 201. Luego cuando dos líneas se cruzan dentro de un círculo hacen cuatro segmentos que estan en proporcion recíproca.

Supongamos ahora que dos secantes se juntan en un punto fuera del círculo (Fig. 117), y que de los puntos OI en que cortan el círculo tiramos dos líneas de puntitos á las estremidades MN: en este caso tendremos dos triángulos NIA, MOA, los cuales tienen un ángulo comun en A, y los ángulos en MN iguales, por estar en la circunferencia, y apoyados en el mismo arco IO (núm72); por consiguiente serán semejantes, y los lados respectivos proporcionales; de suerte que el lado mas pequeño de P será al lado mas pequeño de Q como el lado máximo de P al máximo de Q, esto es, AI:AO::AN:AM.

Ahora, pues, el segundo término y el tercero pertenecen á la misma línea AN, así como el primero y cuarto pertenecen á otra AM, señal propia de proporcion recíproca.

Núm. 202. Luego cuando dos secantes se unen en un punto fuera del círculo, las esteriores estan en razon recíproca con las secantes enteras.

§ VIII.

De las circunferencias proporcionales en los polígonos y en los círculos.

Para conocer qué proporcion hay entre las circunferencias de varios polígonos semejantes ó diversos círculos podemos advertir lo siguiente :

I.

Que los polígonos se pueden dividir en triángulos.

II.

Que siendo los triángulos respectivamente semejantes, y puestos del mismo modo, vienen á formar polígonos semejantes : de esto se infieren varias consecuencias.

I.

Dado cualquier polígono irregular (Fig. 118), si nos pidieren otro semejante (Fig. 119), cuyo circuito sea duplo, triple, ó en cualquiera razon otra respecto del que fué dado, haremos lo siguiente :

1° Del ángulo O tiraremos diagonales á todos los demas ángulos, y las prolongaremos indefinidamente.

2° Prolongaremos tambien indefinidamente los lados que forman el ángulo O.

3° Tomaremos en la línea OM una estension que tenga al lado OA la razon dupla, triple, etc. ; y del punto M, en que se termina el nuevo lado, tiraré una paralela AI al lado del polígono antiguo, y del punto N otra paralela al otro lado antiguo, y así en los demas lados.

Por cuanto hecho esto, el nuevo polígono será semejante al que nos dieron, pues los triángulos que le forman son semejantes á los que formaban el que nos dieron (núm. 176).

Ademas de esto como los lados son proporcionales, la misma razon habrá entre AO y OM, que entre AI y MN, y por consiguiente entre los dos circuitos de los polígonos.

Núm. 203. Luego en los polígonos semejantes los circuitos son proporcionales á los lados homólogos.

II.

Núm. 204. Si el polígono fuere regular (Fig. 120), dividido este en triángulos con los radios tirados desde el centro, y hecha la misma operacion, quedará el nuevo polígono semejante con el círculo en la razon de sus radios, por la misma razon que dimos en los polígonos irregulares.

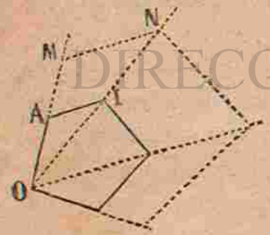


Fig. 118 y 119.

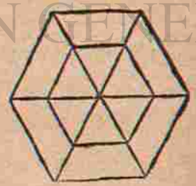


Fig. 120.

III.

Pues los círculos se consideran como polígonos de infinitos lados, podemos decir de los círculos lo que dijimos de los polígonos regulares.

Núm. 205. Luego las circunferencias de los círculos son entre sí como los radios ó como sus diámetros (Fig. 121), por la razon del número precedente.

Fig. 121.

Ahora bien, amigo Eugenio, si hubieres entendido bien estas cartas puedes sosegar, pues no encontrarás en los elementos de geometría cosa que sea difícil, porque el peor camino ya está pasado: ten presente la comparacion que te hice, y créeme, que cada proposicion demostrada es como una nueva antorcha, que te ha de iluminar en el oscuro camino que resta; pero teniendo tantas hachas encendidas no debes temer las tinieblas. Dios te guarde, etc.

CARTA DÉCIMANONA.

DE LAS SUPERFICIES.

§ I.

De la formacion de la superficie.

Despues de tratar, amigo Eugenio, de las líneas y sus propiedades, pide el buen orden que ahora tratemos de las *superficies*, y despues de estas trataremos de los *sólidos*. Ahora te acordarás de que para darte la idea de la *línea* te dije que considerases un punto en movimiento, y que tuvieses por línea el camino por donde el punto va pasando: ahora te digo una cosa semejante para darte idea de la superficie. Cuando una línea se considera moviéndose toda hácia algun lado, el espacio por donde se considera que la línea entera va pasando se llama *superficie*.

Núm. 206. Debes ahora suponer que cuando una

III.

Pues los círculos se consideran como polígonos de infinitos lados, podemos decir de los círculos lo que dijimos de los polígonos regulares.

Núm. 205. Luego las circunferencias de los círculos son entre sí como los radios ó como sus diámetros (Fig. 121), por la razon del número precedente.

Fig. 121.

Ahora bien, amigo Eugenio, si hubieres entendido bien estas cartas puedes sosegar, pues no encontrarás en los elementos de geometría cosa que sea difícil, porque el peor camino ya está pasado: ten presente la comparacion que te hice, y créeme, que cada proposicion demostrada es como una nueva antorcha, que te ha de iluminar en el oscuro camino que resta; pero teniendo tantas hachas encendidas no debes temer las tinieblas. Dios te guarde, etc.

CARTA DÉCIMANONA.

DE LAS SUPERFICIES.

§ I.

De la formacion de la superficie.

Despues de tratar, amigo Eugenio, de las líneas y sus propiedades, pide el buen orden que ahora tratemos de las *superficies*, y despues de estas trataremos de los *sólidos*. Ahora te acordarás de que para darte la idea de la *línea* te dije que considerases un punto en movimiento, y que tuvieses por línea el camino por donde el punto va pasando: ahora te digo una cosa semejante para darte idea de la superficie. Cuando una línea se considera moviéndose toda hácia algun lado, el espacio por donde se considera que la línea entera va pasando se llama *superficie*.

Núm. 206. Debes ahora suponer que cuando una línea recta se mueve hácia un lado siempre va paralela á sí misma; y asi el espacio que corrió la línea se llama paralelógramo (Fig. 122). La línea AB

Fig. 122.

Fig. 123.

Fig. 124.

se considera *movible*, y la línea AC es la *directriz*, y se considera quieta.

Núm. 207. Si la movible con la directriz hacen un ángulo recto (Fig. 123), el paralelógramo se llama rectángulo, como A.

Núm. 208. Si ademas de ser el ángulo recto la movible es igual á la directriz, el paralelógramo se llama cuadrado, como B (Fig. 124).

Núm. 209. Si la movible hiciere con la directriz un ángulo que no sea recto, el paralelógramo se llama oblicuángulo; y en este caso si la movible es igual á la directriz, el paralelógramo se llama rombo, v. g. C (Fig. 125); pero si no fuesen iguales

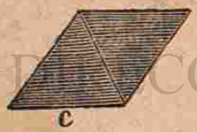


Fig. 125.

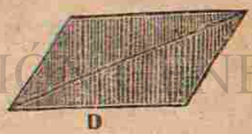


Fig. 126.

las dos líneas se llama romboide, como D (Fig. 126).

Núm. 210. Tomemos ahora un paralelógramo de

cualquier especie que sea, y tiremos en él una linea desde un ángulo al otro ángulo opuesto, y se llamará línea la *diagonal*; y cada mitad del paralelógramo será un triángulo, y los dos ó son rectángulos ú oblicuángulos, segun era el paralelógramo de donde salieron, como T y D (Fig. 123 y 124).

Núm. 211. Juntando dos triángulos, el uno á lo largo del otro, de modo que tengan un lado comun, resulta una figura de cuatro lados: si dos de ellos fueren paralelos la figura se llama *trapecio* (Fig. 127); pero si no hubiere lado alguno paralelo al


Fig. 127.


Fig. 128.

Fig. 129.

otro se llama simplemente cuadrilátero (Fig. 128.)

Núm. 212. Toda figura de muchos lados, y por consiguiente de muchos ángulos, se llama *polígono*: si los lados, como tambien los ángulos, fueren todos iguales será polígono regular, como M (Fig. 129); mas si los lados ó ángulos son desiguales, la figura será polígono irregular, como N (Fig. 130).

Fig. 130.


Fig. 131.

Fig. 132.

Núm. 213. El espacio comprendido dentro de una línea circular se llama *círculo* (Fig. 151): el espacio comprendido entre dos radios y el arco se llama *sector* (Fig. 152); pero el espacio comprendido entre la cuerda y su arco se llama *segmento* (Fig. 153).

Fig. 153.

Fig. 154.

Dijimos al número 210 que en todo paralelógramo tirada una diagonal resultaban dos triángulos. Ahora decimos que estos triángulos (Fig. 123, 124, 125 y 126) tienen un lado comun, que es la diagonal; y ademas de esto los ángulos adyacentes á la diagonal son alternos; y así los dos triángulos vienen á ser iguales (núm. 115). Tienen ademas por base los lados que al mismo tiempo son base del paralelógramo, y son de la misma altura que este.

Núm. 214. Luego todo paralelógramo se divide en dos triángulos iguales de la misma base y de la misma altura del paralelógramo.

Núm. 215. Nótese que podemos llamar base á cualquiera de los lados de un triángulo, con tal que llamemos vértice al ángulo que la sea opuesto. Adviértase tambien que llamamos altura del triángulo ó del paralelógramo la perpendicular sobre la base ó sobre la continuacion de esta, como AC (Fig. 154).

Núm. 216. Luego el valor de cualquier triángulo es la mitad del valor que tendria su paralelógramo, esto es, siendo de la misma base y de la misma altura. Aquí se advierte que cuando hablamos del valor del triángulo, paralelógramo, círculo, polígono, etc., hablamos de la area ó espacio comprendido entre las líneas que la componen.

§ II.

Modo de valuar las superficies.

Núm. 217. Para valuar la superficie de un paralelógramo rectángulo se debe multiplicar la base por la altura; mas los principiantes no pueden bien comprender como se multiplica una línea por otra: para esto se advierte que cualquiera cantidad representada por una línea se debe dividir en cierto número de unidades, aunque la calidad de estas es arbitraria, pues cada unidad puede ser línea, pulgada, palmo, etc.; y así multiplicando el número de las unidades de una línea por el número de las de la otra, queda multiplicada una línea por otra.

Núm. 218. Adviértase tambien que no es lo mismo formar una superficie que valuarla, pues para su formacion se considera la línea matemáticamente, esto es, prescindiendo de su grueso; y esta línea se mueve de lado, caminando siempre paralela á sí misma, segun la direccion de otra línea para formar la superficie.

Pero si queremos valuar la superficie ya formada debemos numerar la cantidad de partes que la componen; y en esto ya se ve que esas mismas partes son tambien superficies, y no puramente líneas, por cuanto de líneas matemáticas sin latitud ó grueso no se puede componer una estension física, la cual tiene anchura, siendo cierto que la nada por mas que se multiplique no puede dar cosa positiva.

Es evidente, pues, que cuando se trata de valuar alguna superficie debemos considerar la línea movil como la primera serie de unidades estensas, esto es, pulgadas, palmos, cuadrados, etc.; y por la misma razon la línea directriz debe dividirse tambien en unidades, y entonces multiplicando el número de unidades de la una línea por el de la otra tendremos el valor de la superficie.

Supongamos ahora (Fig. 155) que el paralelógra-

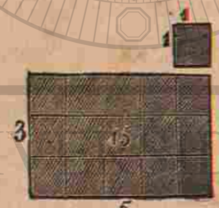


Fig. 155.

Fig. 156.

mo que debemos valuar tiene cinco pulgadas en la base y tres de altura: multiplicaré 5 por 3, y dará 15, porque la base tiene en sí cinco pulgadas cuadradas, la segunda serie tiene otras cinco, y las mismas la tercera: poniendo, pues, tres series de pul-

gadas cuadradas hemos agotado el paralelógramo que tiene tres de altura.

Núm. 219. Luego multiplicando la base del paralelógramo rectángulo por su altura tenemos su valor.

Si la unidad que ha de servir de medida no fuere cuadrado, sino paralelógramo (Fig. 156), v. g. si queremos saber cuantos ladrillos se necesitan para el pavimiento de una sala, debemos hacer la misma cuenta, mas con la cautela siguiente. Si A, que es el lado mayor del paralelógramo que sirve de unidad, fuere la base, el lado menor O debe servir para medir la altura del paralelógramo, porque de este modo multiplicando el primer orden tantas veces cuantas la altura del ladrillo entra en la altura del paralelógramo, quedará agotado todo el espacio; y así $5\times4=12$, que es el valor del paralelógramo.

Para valuar los paralelógramos oblicuángulos haremos la reflexion siguiente: tomemos el paralelógramo rectángulo A (Fig. 157), y dividámosle en varios paralelógramos horizontales: si despues de esto, en vez de considerarlos unos sobre otros á plomo como en A, los considerare-

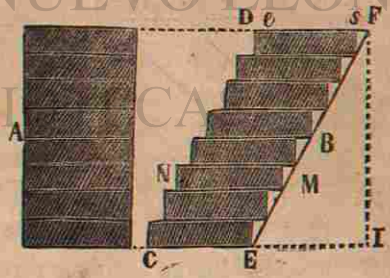


Fig. 157.

mos en la forma que se ve en B, el valor de ellos siempre será el mismo.

Tiremos ahora de las dos estremidades de la base CE dos paralelas á las estremidades de la línea DF; la línea CD cortará todos los triángulos que se ven en la figura, y la línea EF cerrará en la otra parte otros tantos espacios vacíos triangulares, en los que cabrian exactamente dos triángulos de la parte opuesta, pues la altura de los unos y de los otros es la misma; los ángulos adyacentes al lado que forma su altura son de un ángulo recto siempre igual, y otro ángulo formado por paralelas, que es igual por el núm. 45; por consiguiente cada triángulo de una parte es igual al vacío que le corresponde por la otra; y si los consideramos mudados á la parte opuesta, la llenarán perfectamente por el núm. 115. Hecho esto así, el paralelógramo rectángulo A se reduce al oblicuángulo B.

Núm. 220. Luego los paralelógramos que tienen la misma base y la misma altura son iguales; pues si el paralelógramo B (Fig. 138) es igual al rectángulo A, y este se valua multiplicando la base por la altura, del mismo modo se debe valuar su igual B, esto es, multiplicando la base RS, no por el lado SO, sino por la altura SE.

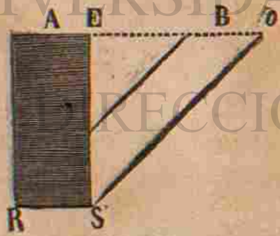


Fig. 138.

Núm. 221. Luego cuando se hubiere de valuar un paralelógramo oblicuángulo, se debe multiplicar

su base por la altura perpendicular, y no por uno de sus lados.

De paso observamos que el paralelógramo oblicuo B teniendo lados mas largos que el recto A, es igual á él en el valor. Luego puede el mismo espacio, sin mudar de valor, ser comprendido, ó por líneas mayores ó por menores (Fig. 138).

La razon es porque en los dos paralelógramos A y B los lados de A son líneas perpendiculares, los de B son oblicuas; y siendo siempre las líneas oblicuas mayores que las perpendiculares que caen sobre la misma línea por el núm. 57, pueden ser los espacios iguales, aunque las líneas que los comprenden no sean iguales.

Núm. 222. Luego los espacios ó superficies no siguen la misma proporcion de las líneas que los terminan.

Núm. 223. Dijimos que los triángulos eran la mitad de los paralelógramos que tuviesen la misma base y altura (núm. 216), y acabamos de decir que los paralelógramos de la misma base y altura son iguales; por consiguiente tambien lo serán las mitades respectivas.

Núm. 224. Luego los triángulos de la misma base y altura son iguales. A es igual á B (Fig. 139).

Núm. 225. Luego cuando nos dieren un triángulo para valuarle, lo podemos hacer por estos modos (Fig. 140).

I.

En el triángulo A multiplicando toda la base por

Fig. 139.

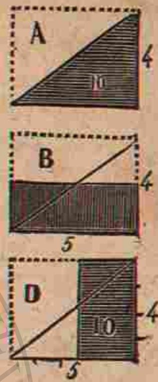


Fig. 140.

toda la altura, y tomando solamente la mitad de este producto para valor del triángulo. A, la base es 5, la altura es 4, el producto es 20, la mitad de este 10, será el valor del triángulo A.

II.

Multiplicando la base del triángulo B por media altura, entonces la base es 5, multiplicada por media altura 2 dará 10, valor del triángulo B.

III.

En D, multiplicando toda la altura 4 por la mitad de la base $2\frac{1}{2}$, resultan 10, valor del triángulo D; la razon es, porque de todos estos tres modos viene el triángulo á tener la mitad del valor de su paralelógramo.

Si nos dieren el trapecio de la (Fig. 141) : para hallar su valor haremos lo siguiente. Tiraremos la línea MN paralela á las dos faces ó lados paralelos

del trapecio, y en igual distancia de ellos : despues le multiplicaremos por la altura, haciendo un paralelógramo rectángulo. De este modo cortaremos del trapecio los dos triángulos inferiores, y formaremos en la parte superior otros dos, los que son iguales á los de abajo, porque la altura de ellos es la misma (pues esta se dividió por el medio) : los ángulos rectos son iguales, y los que son opuestos en el vértice tambien lo son; por consiguiente (núm. 115) el triángulo inferior es igual al superior que le corresponde; y así puestos los triángulos superiores en lugar de los inferiores, que son sus iguales, el trapecio se convierte en un paralelógramo rectángulo, cuyo valor es el producto de la paralela del medio multiplicada por toda la altura.

Núm. 226. Luego todo trapecio es igual al paralelógramo, en que la paralela del medio del trapecio se multiplica por la altura.

§ III.

Modo de valuar ó hallar el valor de los polígonos regulares y los círculos.

Núm. 227. Cualquiera polígono regular (Fig. 142)

Fig. 141.

Fig. 142.

se puede dividir en triángulos iguales y semejantes, tirando líneas desde el centro á todos sus ángulos, por ser iguales todos los lados que forman la circunferencia y todos los ángulos, pues á no serlo no seria el polígono regular.

La línea perpendicular tirada desde el centro á los lados se llama *apóstema*.

Para hallar este centro, levantaremos una perpendicular del medio de un lado F, y levantando otra en medio del lado E se cruzarán en algun punto O; pero como el lado A tiene igual inclinacion á F, tambien la perpendicular desde el medio de este lado cortará á la de F en el mismo punto O, en que la cortó la perpendicular tirada de E. El mismo argumento se hace de los otros lados, y todas se cruzan en O.

Digo ahora que O será el centro del polígono, porque todos los triángulos tienen bases iguales en la circunferencia, y los ángulos adyacentes iguales, y así en todo son iguales; luego el círculo descrito de O, como de centro, puede pasar por todos los ángulos, pues todos los radios y lados de los triángulos son iguales.

Esto supuesto (Fig. 145), si yo separase todos

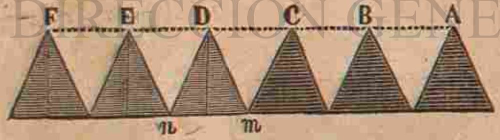


Fig. 145.

los triángulos en que se dividió el polígono, po-

niéndolos en línea recta, el conjunto de estos triángulos tendria el mismo valor del polígono.

Ademas de esto, ya se ve que los espacios vacíos que dejan entre sí estos triángulos, son otros triángulos iguales en situacion inversa, porque los lados son iguales, y los ángulos de los vértices comprendidos por ellos, tambien son iguales por ser alternos; pues los lados CmDn son paralelos por la igualdad de los ángulos de la base en todos los triángulos del polígono.

Supongamos, pues, que yo tomase los tres últimos triángulos D, E, F, para colocarlos sobre los tres primeros A, B, C (Fig. 144), ajustándolos en los vacíos que habia entre ellos, y que dividido por medio del triángulo F para colocarle en las estremidades: en este caso formaria un paralelógramo, cuya base seria media circunferencia del polígono, y su altura todo el apostema.

Fig. 144.

Núm. 229. Luego el polígono regular es igual á un paralelógramo, cuya base sea media circunferencia, y su altura todo el apostema.

Si divido por el medio el paralelógramo (Fig. 144), y pongo (Fig. 145) las dos mitades, una delante de

Fig. 145.

la otra, en este caso tendré un paralelógramo del mismo valor, cuya base seria toda la circunferencia, y su altura medio apostema solamente.

Núm. 230. Luego el polígono regular tambien es igual á un paralelógramo, cuya base sea toda la circunferencia, y cuya altura sea medio apostema.

Dividamos ahora este paralelógramo (Fig. 145), y tiremos en la una mitad la diagonal *ao*; haremos con ella un triángulo *n*, al cual podemos colocar sobre el punto *o* (Fig. 146), con el fin de que caiga

Fig. 146.

hácia otra parte, y haga un triángulo.

En estos términos el triángulo *m* seria igual á *n*, pues ambos tienen un ángulo recto, y los lados que le forman son iguales en uno y otro triángulo (núm. 115); y así el valor de ellos es el mismo: luego cortando el triángulo *m*, y poniendo *n* en su lugar, no se mudará el valor, y en este caso tenemos un triángulo, cuya base es toda la circunferencia, y su altura todo el apostema.

Núm. 231. Luego el polígono regular es igual á un triángulo, cuya base sea toda la circunferencia, y su altura toda el apostema.

Ahora, pues, el círculo (Fig. 147) se puede confundir con el polígono regular de lados infinitos, y

de este modo todo cuanto se dice el polígono regular se puede aplicar al círculo.

Núm. 232. Luego el círculo A es igual, lo primero al paralelógramo B, cuya base sea media circunferencia, y su altura todo el radio: lo segundo es igual á un paralelógramo C, cuya base sea toda la circunferencia, y su altura todo el radio.

Fig. 147.

Hemos dicho que sector del círculo era una porcion de este comprendida entre dos radios y el arco (Fig. 148). En esta suposicion así como el círculo se reduce á un paralelógramo, cuya base sea toda la circunferencia, ó todos los arcos que le forman, y su altura medio radio, así podemos decir del sector. Y por la misma razon, así como el círculo se reduce á un paralelógramo, cuya base sea media circunferencia y su altura todo el radio, así tambien será el sector.

Núm. 233. Luego el sector del círculo (Fig. 148) será igual al paralelógramo A, que tiene por base

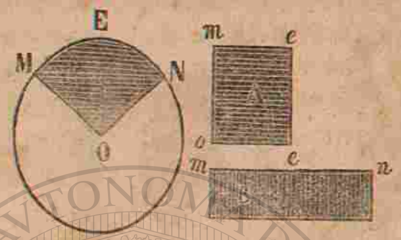


Fig. 148.

medio arco ME, y por altura todo el rayo MO, y tambien será igual al paralelógramo B, cuya base será igual á todo el arco M, E, N, y la altura la mitad del radio MO.

Dijimos en su lugar que el segmento era la parte del círculo comprendida entre la cuerda y el arco; por consiguiente, quitando del valor del sector (Fig. 149) el triángulo A hecho por la cuerda y dos radios, el resto será el valor del segmento.

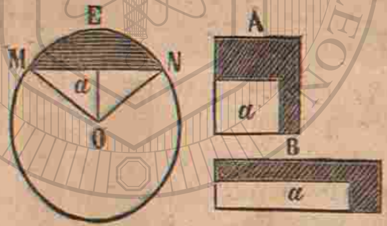


Fig. 149.

Para que esto se haga sensible pongamos los dos paralelógramos AB de la (Fig. 149), á los que reducimos el valor del sector, y reduzcamos ahora sobre ellos el triángulo *a* que está por bajo del segmento; reduzcámosle, digo, á los paralelógramos *a*, *a* para ver lo que resta; y primeramente empezando por el paralelógramo A, reduzcamos el triángulo *a* á un paralelógramo *a*, cuya base sea la mitad de la cuerda, y su altura todo el complemento de la flecha

(esto es, de la altura del segmento). Siguiendo despues en el paralelógramo B, reduzcamos el triángulo *a* á otro paralelógramo *a*, cuya base sea toda la cuerda, y su altura medio complemento de la flecha, como se ve en la figura B. Hecho esto, veremos lo que resta, y eso será el valor del segmento. No hay duda que es una figura irregular; pero se resuelve en dos paralelógramos rectos fáciles de valuar.

Núm. 254. Luego el segmento del círculo es igual al paralelógramo que tiene el valor del sector, menos el paralelógramo que tiene el valor del triángulo hecho por la cuerda y radios, como se ve en la (Fig. 149).

§ IV.

Modo de reducir un paralelógramo á otro.

Núm. 255. De lo dicho al núm. 220 se sigue que podemos reducir cualquier paralelógramo oblicuángulo B (Fig. 158) á otro recto A que le sea igual. Prolongaremos una base B del oblicuángulo, y levantaremos de las estremidades de la otra base RS dos perpendiculares hasta encontrar la línea AB, y quedará el paralelógramo recto igual á B.

Ahora daremos varios métodos para reducir cualquier paralelógramo á otro que se nos pida. Para esto es necesario saber (Fig. 150), que cuando tiramos una diagonal en un paralelógramo, y por al-

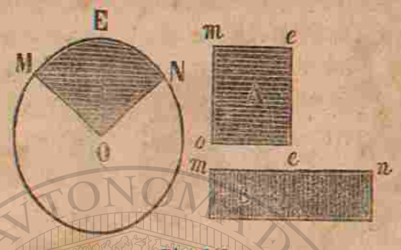


Fig. 148.

medio arco ME, y por altura todo el rayo MO, y tambien será igual al paralelógramo B, cuya base será igual á todo el arco M, E, N, y la altura la mitad del radio MO.

Dijimos en su lugar que el segmento era la parte del círculo comprendida entre la cuerda y el arco; por consiguiente, quitando del valor del sector (Fig. 149) el triángulo A hecho por la cuerda y dos radios, el resto será el valor del segmento.

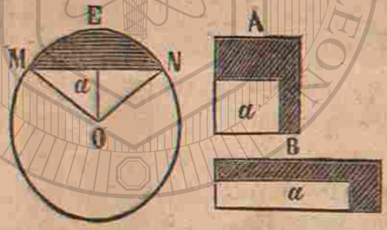


Fig. 149.

Para que esto se haga sensible pongamos los dos paralelógramos AB de la (Fig. 149), á los que reducimos el valor del sector, y reduzcamos ahora sobre ellos el triángulo *a* que está por bajo del segmento; reduzcámosle, digo, á los paralelógramos *a*, *a* para ver lo que resta; y primeramente empezando por el paralelógramo A, reduzcamos el triángulo *a* á un paralelógramo *a*, cuya base sea la mitad de la cuerda, y su altura todo el complemento de la flecha

(esto es, de la altura del segmento). Siguiendo despues en el paralelógramo B, reduzcamos el triángulo *a* á otro paralelógramo *a*, cuya base sea toda la cuerda, y su altura medio complemento de la flecha, como se ve en la figura B. Hecho esto, veremos lo que resta, y eso será el valor del segmento. No hay duda que es una figura irregular; pero se resuelve en dos paralelógramos rectos fáciles de valuar.

Núm. 254. Luego el segmento del círculo es igual al paralelógramo que tiene el valor del sector, menos el paralelógramo que tiene el valor del triángulo hecho por la cuerda y radios, como se ve en la (Fig. 149).

§ IV.

Modo de reducir un paralelógramo á otro.

Núm. 255. De lo dicho al núm. 220 se sigue que podemos reducir cualquier paralelógramo oblicuángulo B (Fig. 158) á otro recto A que le sea igual. Prolongaremos una base B del oblicuángulo, y levantaremos de las estremidades de la otra base RS dos perpendiculares hasta encontrar la línea AB, y quedará el paralelógramo recto igual á B.

Ahora daremos varios métodos para reducir cualquier paralelógramo á otro que se nos pida. Para esto es necesario saber (Fig. 150), que cuando tiramos una diagonal en un paralelógramo, y por algun punto de dicha diagonal O tiramos dos paralelas á los dos lados del paralelógramo, formamos otros dos pequeños paralelógramos AB, que se llaman *complementos*.

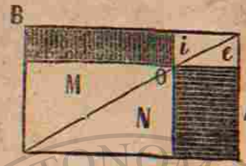


Fig. 150.

Para examinar si estos complementos AB son iguales, es preciso reparar en que la diagonal divide en triángulos iguales, no solo el paralelógramo total, sino tambien los dos paralelógramos parciales cortados por la diagonal; de este modo el triángulo M es igual á N, como el triángulo *i* es igual á *e*: por consiguiente, si del triángulo que está sobre la diagonal sacamos M é *i*, y del triángulo que está debajo de la diagonal quitamos N*e*, los dos rectos AB han de ser iguales,

Núm. 256. Luego los paralelógramos AB, que son complementos, son entre sí iguales. De esta regla general se toma la solucion de varios problemas :

I.

Núm. 257. Dado un paralelógramo A*a* (Fig. 151),

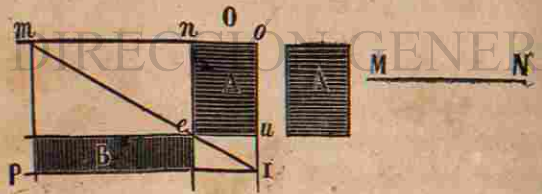


Fig. 151.

si nos piden otro igual que tenga un lado igual á la línea dada MN haremos lo siguiente :

1º Prolongaremos *on*, aumentándole con la dada MN ó *mn* su igual ; y despues prolongaré igualmente *eu*, base inferior de A.

2º Prolongaremos indefinidamente los dos lados *ou* y *ne*, perpendiculares á *no*.

3º Tiraremos una diagonal desde *m* que pase por el ángulo *e* hasta encontrar la línea *ol*.

4º Del punto I, en que se encuentran las dos líneas, tiraré PI paralela, é igual á *mo*, y terminaré el paralelógramo *mo*, PI. Esto hecho, en él se ve que B es paralelógramo igual á A, y de la grandeza que nos le pidieron, porque ambos son complementos (núm. 256).

II.

Núm. 258. Si ademas de esto nos pidieren (Fig. 152) que el nuevo paralelógramo no solamente sea de la grandeza dada OE, sino que sea oblicuo y con un ángulo igual al ángulo M, haremos lo siguiente :

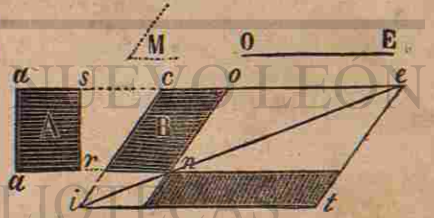


Fig. 152.

Continuaré indefinidamente las dos bases *as*, *ar*, y entre ellas formaré un paralelógramo oblicuángulo B igual á A (núm. 220), como el ángulo M.

Para reducir B á otro que sea igual, y tenga por un lado la línea dada OE, haremos la operacion como en el número precedente, habiendo antes prolongado las dos bases de B y los otros dos lados *ci*, *on*; y tirando despues la diagonal *en* hasta encontrar la línea *ci*, y acabando el paralelógramo *ceit*, se determina la altura del paralelógramo D.

De este modo el paralelógramo D será igual á B, por ser ambos complementos (núm. 256), y porconsiguiente D tambien será igual á A, y tendrá todas las circunstancias que se pidieron.

III.

Núm 239. Demos un campo como la representa la (Fig. 153), de forma que un dueño sea señor de todo el espacio blanco, y otro de todo el espacio oscuro; pídese que sin hacer mediacion alguna de las dos lindes se dé una línea recta *xy* paralela á E*i*, la cual divida los campos en tal forma, que sin perjuicio de los poseedores una sola línea separe sus posesiones. Haremos lo siguiente :

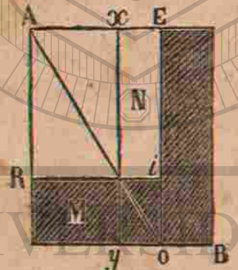


Fig. 153.

1° Prolongaremos la línea E*i* hasta O.

2° Pondremos uno de los dueños en O, y el otro en A.

3° Pasearemos por la línea R*i* hasta que nuestra persona impida el que los dos poseedores se vean,

4° Por el punto *n* en que esten nuestros pies tira-

remos la línea *yx*, la cual dará satisfaccion á lo que se pidió; la razon es porque el paralelógramo M, que el uno pierde de su antigua posesion, es igual á N que adquiere de nuevo, pues MN son *complementos* (núm. 256).

IV.

Núm. 240. Para convertir un paralelógramo cualquiera en un cuadrado igual haremos lo siguiente :

Núm. 241. Debemos traer á la memoria lo que se dijo de las proporcionales (núm. 143), que cuando tres cantidades estaban en progresion, el producto de los estremos era igual al cuadrado del término medio.

Ahora bien, siendo el paralelógramo dado M (Fig. 154), pondré como primer término de la progresion su altura A, y por tercer término su longitud C. Esto hecho, buscaré una media proporcional entre AC, la que será *b*, y este será el lado del cuadrado N que me piden, porque estando en progresion las tres líneas $\div a:b:c$, inferiremos luego $a\times c=b\times b$, ó b^2 (núm. 143), por consiguiente M es igual á N.

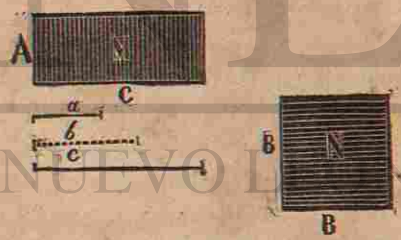


Fig. 154.

V.

Tambien podemos resolver por otro modo el problema del núm. 237 valiéndonos de las proporciones.

Núm. 242. Sea dado (Fig. 155) el paralelógramo

Fig. 155.

A, y pídase otro cuyo lado sea M: ignoramos cual deba ser su altura x para que este paralelógramo sea igual al dado.

Dijimos que estando en proporcion cuatro cantidades el producto de los estremos es igual al de los medios (núm. 141); de aquí se sigue, que si yo pusiere la línea dada M como primer término de la proporcion, la altura y la base del paralelógramo dado A como segundo y tercer término, tendré en el cuarto término x la altura del paralelógramo B, y podré entonces decir si $m : n :: o : x$; luego $m \times x = n \times o$; por consiguiente A formado por $o \times n$ es igual á B hecho $m \times x$.

§ V.

Reduccion de las figuras irregulares á otras tambien irregulares.

Dijimos (núm 224) que los triángulos de la misma base y altura eran iguales; y de esta proposicion se sacan varias consecuencias.

I.

Núm. 243. Si nos dieren un pentágono B (Fig. 156) para reducirle á un cuadrilátero haremos lo siguiente:

1º Tiraremos una diagonal MN, y por el vértice I una paralela á la diagonal.

2º Continuaremos uno de los lados de la porcion inferior hasta encontrar en la paralela O, y tiraremos la línea MO: en este caso el triángulo que hacemos de nuevo MON es igual al que antes habia MIN, por tener la misma base y la misma altura; luego el cuadrilátero EMOA será igual al pantágono que nos habian dado.

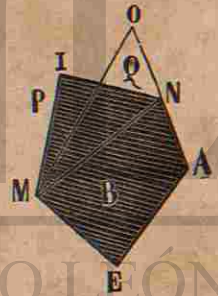


Fig. 156.

II.

Núm 244. Supongamos que quieren reducir (Fig. 157) este ú otro cuadrilátero á un triángulo;

haremos la misma operacion tirando la diagonal MA

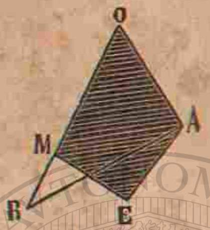


Fig. 157. Fig. 158.

y la paralela RS, y despues la línea RA.

Porque esto hecho, el triángulo antiguo MEA es igual al nuevo MEA; y de este modo el cuadrilátero MEAO será igual al triángulo RAO.

III.

Núm. 245. Si nos dieren un triángulo y pidieren un paralelógramo igual, haremos lo que se dijo al núm. 225.

IV.

Núm. 246. Si nos dieren un triángulo y nos pidieren un cuadrado igual, le reduciré primero á un paralelógramo, conforme á lo dicho (núm. 225), y despues reduciré este paralelógramo á un cuadrado por el método del núm. 241.

§ VI.

De las proporciones de las superficies del mismo nombre, supuesto que sean desemejantes entre sí.

Núm. 246. Conocido el valor de las superficies

conviene saber la razon que tienen entre sí: principiemos por las que tienen el mismo nombre, v. g., paralelógramos entre sí y triángulos entre sí, y para esto hemos de atender ya á sus bases, ya á sus alturas, y ya á todo igualmente.

Siendo la altura de los dos paralelógramos AB (Fig. 158) la misma, si una base entra en la otra tres veces, dividida la base por paralelas aparece A tres veces en B.

Núm. 248. Luego los paralelógramos de la misma altura estan entre sí como sus bases.

Ahora bien, los triángulos son las mitades de sus paralelógramos, y son entre sí como estos (núm. 154).

Núm. 249. Luego los triángulos de la misma altura (Fig. 159) estan entre sí como sus bases.

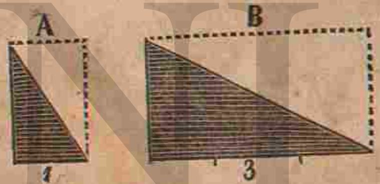


Fig. 159.

Si los paralelógramos AB (Fig. 160) tienen la misma base, en dividiendo la altura del mayor A por paralelas á la base, cuantas veces entra la altura del uno en la del otro, tantas entrará todo el paralelógramo B, que es el pequeño, en el grande A.

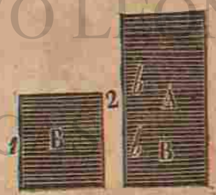


Fig. 160.

Núm. 250. Luego los paralelógramos de la misma base estan entre sí como sus alturas; de suerte que si la altura de A fuere veinte veces mayor que la de B, por la operacion de las paralelas entrará B veinte veces en A.

Ahora bien, los triángulos ó las mitades de los paralelógramos son entre sí como estos.

Núm. 251. Luego los triángulos de la misma base (Fig. 161) estan entre sí como sus alturas, y si B es

Fig. 161.

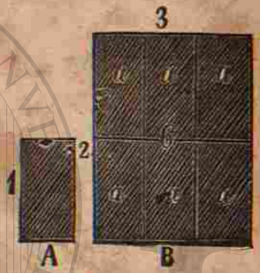


Fig. 162.

duplo de A, la mitad de B será duplo de la mitad de A.

Los paralelógramos pueden juntamente ser diferentes en la base y en la altura; de forma que (Fig. 162) divididas por paralelas las bases y las alturas, A puede entrar en B muchas veces por la cuenta de la base, y muchas por la cuenta de la altura.

Núm. 252. Luego los paralelógramos de diferente base y altura estan entre sí en la razon de sus bases, multiplicada por la razon de las alturas.

Y así si la base de A es tres veces mas pequeña que la de B, por esto solo entra A tres veces en B por el núm. 248; pero como en B la altura es dupla de A, las tres cantidades que ya se contenian en B vuelven á repetirse para formar el paralelógramo

B de altura dupla; por consiguiente B viene á ser seis veces mayor que A, esto es, está en razon de tres de la base multiplicada por dos de altura.

Ahora, pues, hemos dicho muchas veces que los triángulos, por ser la mitad de los paralelógramos, estan entre sí como ellos (núm. 154).

Núm. 253. Luego los triángulos de diversas bases y alturas (Fig. 163) estan entre sí en razon de las

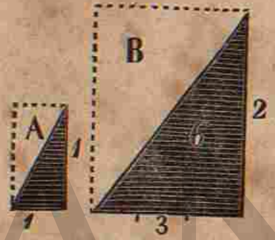


Fig. 163.

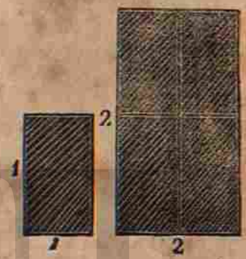


Fig. 164.

bases multiplicada por la de las alturas. Por esta razon completando los paralelógramos AB que les corresponden, se quedan siendo mitades de los paralelógramos que tienen entre sí esta razon.

§ VII.

De la proporcion de las superficies del mismo nombre y semejantes.

Núm. 254. Acabamos de decir que los paralelógramos y triángulos de diferente base y altura estan entre sí en la razon de las bases multiplicada por las alturas.

Pero cuando la razon de las bases y alturas es la misma, multiplicar una por otra es hacer el cuadrado de cualquiera de ellas.

Núm. 255. Luego los paralelógramos semejantes (Fig. 164) están entre sí como los cuadrados de cualquiera de los lados, esto es, si el lado de uno fuere duplo del del otro, el paralelógramo grande será cuadruplo del pequeño. Asimismo (Fig. 165) si el lado de uno vale tres veces el del otro, todo el paralelógramo tendrá el valor del otro nueve veces.

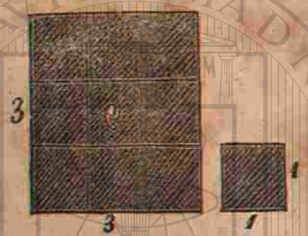


Fig. 165.

Fig. 166.

Los triángulos son mitades de los paralelógramos.

Núm. 256. Luego los triángulos semejantes (Fig. 166) están entre sí como los cuadrados de los lados.

Núm. 257. De los triángulos semejantes podremos formar todas las figuras que fueren semejantes entre sí, y por consiguiente conservarán entre sí la misma razon que tenian los triángulos de que se formaron.

Núm. 258. Luego todas las figuras semejantes (Fig. 167) tienen entre sí la misma razon que los cuadrados de sus lados homólogos.

Núm. 259. Luego todos los polígonos regulares y semejantes están entre sí como los cuadrados de sus lados homólogos. Pero como en los polígonos semejantes los lados están entre sí como los radios que los dividen, ó como los apotemas, esto es, como las líneas Ee que salen del centro perpendiculares á los lados, diremos que los polígonos semejantes son como los cuadrados de los radios ó de los apotemas. De este modo (Fig. 167) el polígono B contiene cuatro veces A, pues el lado es dos.

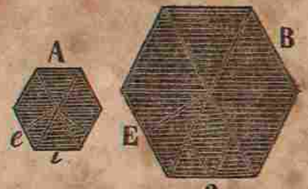


Fig. 167.

Sabemos que los círculos se pueden considerar como polígonos semejantes de infinitos lados, y que en este caso los apotemas se confunden con los radios; y por consiguiente los círculos están entre sí como los polígonos semejantes.

Núm. 260. Luego los círculos están entre sí como los cuadrados de los radios (Fig. 168). Y así si el radio de B es duplo del de A, el círculo B vale cuatro veces A.

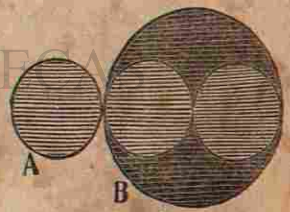


Fig. 168.

Los diámetros son cada uno dos radios, y tienen entre sí la misma razon que ellos.

Núm. 261. Luego los

círculos están entre sí como los cuadrados de los diámetros,

En los paralelógramos semejantes (Fig. 169) el esponente de la razon de las bases es el mismo que el de la razon de las alturas, y cuando se multiplica un esponente por otro se multiplica por sí mismo, y se hace un cuadrado de cualquiera de ellos. Pero lo que se dice de los paralelógramos semejantes se dice de los triángulos y de todas las figuras semejantes entre sí.

Núm. 262. Luego el esponente de figuras semejantes es el cuadrado del esponente de los lados (Fig. 169.

§ VIII.

De la razon que hay entre el círculo y los cuadrados inscrito y circunscrito, y del formado sobre el radio.

Núm. 264. Se llama cuadrado circunscrito aquel que se queda fuera del círculo, tocándole por todos cuatro lados. Este cuadrado precisamente ha de tener por lado el diámetro del círculo (Fig. 170).

Núm. 265. Se llama cuadrado inscrito el que se forma dentro del círculo, tocando la circunferencia con sus cuatro ángulos (Fig. 171).

Se llama cuadrado del radio el que le tiene por lado (Fig. 172).

Núm. 266. Ahora, pues, para conocer la razon que hay entre el círculo y el cuadrado circunscrito haré lo siguiente (Fig. 170).

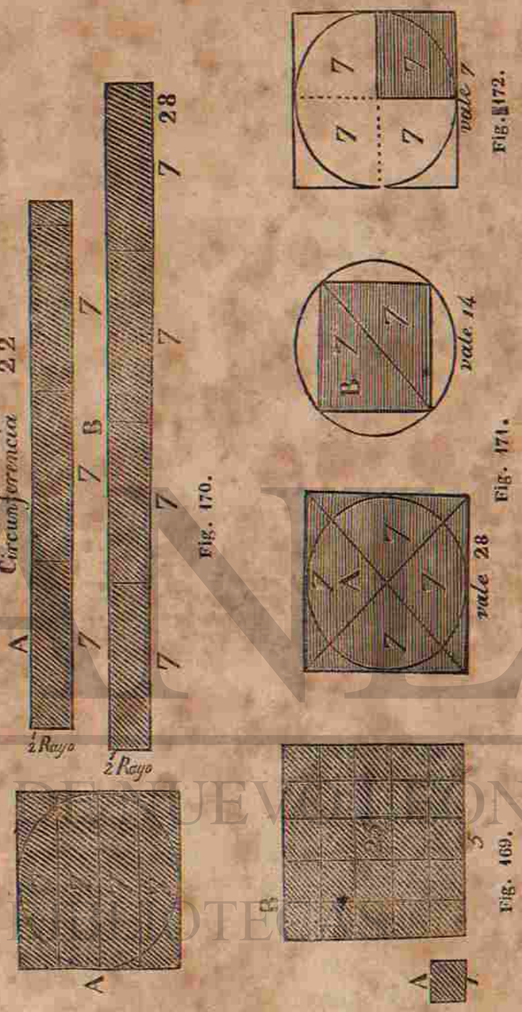


Fig. 169. Fig. 170. Fig. 171. Fig. 172.

I.

Reduciré el círculo á un paralelógramo A, cuya base sea la circunferencia y su altura medio radio (núm. 252): de este modo si el diámetro del círculo vale 7, la circunferencia de él ó grandeza del paralelógramo será 22 (núm. 150).

II.

Dividiré el cuadrado en cuatro paralelógramos iguales, quedando cada uno de ellos con la altura de medio radio y todo lo largo del diámetro; por consiguiente todos cuatro juntos hacen un paralelógramo B de la misma altura que A; pero su grandeza será cuatro veces 7, ó 28. Pero estos dos paralelógramos AB tienen la misma altura, y son como sus bases (núm. 248).

Núm. 267. Luego el círculo es al cuadrado circunscrito como la circunferencia es á cuatro diámetros, lo que viene á ser como 22 á 28.

Si queremos saber la proporcion del círculo con el cuadrado inscrito haremos lo siguiente (Fig. 171).

I.

Dividiremos el cuadrado circunscrito con dos diagonales en cuatro triángulos, y cada uno de ellos tendrá por base el diámetro y por altura el radio.

II.

Dividiré el cuadrado inscrito con una diagonal en dos triángulos, que tambien tendrán por base el diámetro y por altura el radio.

Núm. 268. Luego el cuadrado inscrito es la mitad del circunscrito. Por consiguiente el círculo es respecto del cuadrado inscrito como la circunferencia á dos diámetros, ó como 22 á 14.

Finalmente para saber la razon que hay entre el círculo y el cuadrado de su radio haré lo siguiente:

Dividiré el cuadrado circunscrito (Fig. 172) por dos diámetros en cuatro cuadrados iguales, y cada uno de ellos será cuadrado del radio; por consiguiente si el cuadrado circunscrito vale 28, el cuadrado del radio solamente valdrá 7.

Núm. 269. Luego el círculo es al cuadrado de su radio como la circunferencia á un diámetro, ó como 22 á 7. Luego los tres cuadrados que pertenecen á un círculo son como 7, 14, 28, valiendo el círculo 22.

§ IX.

De la razon que hay entre el cuadrado de la hipotenusa y los cuadrados de los otros dos lados.

Esta proposicion, que es famosísima, se atribuye á Pitágoras, de quien dicen que por haberla hallado sacrificó cien bueyes á las Musas en accion de gracias.

Para conocer, pues, la proporcion que hay entre el cuadrado T de la hipotenusa (Fig. 173) y los dos cuadrados AB, formados sobre los lados del triángulo *ab*, haremos lo siguiente:

I.

Tiraremos una perpendicular desde el vértice del

base sea la circunferencia y su altura medio radio (núm. 232) : de este modo si el diámetro del círculo vale 7, la circunferencia de él ó grandeza del paralelógramo será 22 (núm. 150).

II.

Dividiré el cuadrado en cuatro paralelógramos iguales, quedando cada uno de ellos con la altura de medio radio y todo lo largo del diámetro; por consiguiente todos cuatro juntos hacen un paralelógramo B de la misma altura que A; pero su grandeza será cuatro veces 7, ó 28. Pero estos dos paralelógramos AB tienen la misma altura, y son como sus bases (núm. 248).

Núm. 267. Luego el círculo es al cuadrado circunscrito como la circunferencia es á cuatro diámetros, lo que viene á ser como 22 á 28.

Si queremos saber la proporcion del círculo con el cuadrado inscrito haremos lo siguiente (Fig. 171).

I.

Dividiremos el cuadrado circunscrito con dos diagonales en cuatro triángulos, y cada uno de ellos tendrá por base el diámetro y por altura el radio.

II.

Dividiré el cuadrado inscrito con una diagonal en dos triángulos, que tambien tendrán por base el diámetro y por altura el radio.

Núm. 268. Luego el cuadrado inscrito es la mitad del circunscrito. Por consiguiente el círculo es respecto del cuadrado inscrito como la circunferencia á dos diámetros, ó como 22 á 14.

Finalmente para saber la razon que hay entre el circulo y el cuadrado de su radio haré lo siguiente:

Dividiré el cuadrado circunscrito (Fig. 172) por dos diámetros en cuatro cuadrados iguales, y cada uno de ellos será cuadrado del radio; por consiguiente si el cuadrado circunscrito vale 28, el cuadrado del radio solamente valdrá 7.

Núm. 269. Luego el círculo es al cuadrado de su radio como la circunferencia á un diámetro, ó como 22 á 7. Luego los tres cuadrados que pertenecen á un círculo son como 7, 14, 28, valiendo el círculo 22.

§ IX.

De la razon que hay entre el cuadrado de la hipotenusa y los cuadrados de los otros dos lados.

Esta proposicion, que es famosísima, se atribuye á Pitágoras, de quien dicen que por haberla hallado sacrificó cien bueyes á las Musas en accion de gracias.

Para conocer, pues, la proporcion que hay entre el cuadrado T de la hipotenusa (Fig. 175) y los dos cuadrados AB, formados sobre los lados del triángulo *ab*, haremos lo siguiente:

I.

Tiraremos una perpendicular desde el vértice del

triángulo, la que le dividirá en dos *ab*, los cuales

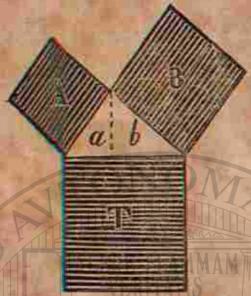


Fig 173.

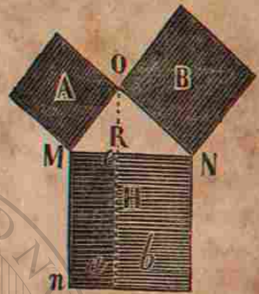


Fig. 174.

son semejantes entre sí y al triángulo total por tener cada uno un ángulo recto.

II.

Debemos tener presente que los triángulos semejantes son entre sí como los cuadrados de sus lados (núm. 256); y así los tres triángulos *ab* y el total son entre sí como los cuadrados ABT.

III.

Observemos que los dos triángulos pequeños *ab* juntos son iguales al grande; luego tambien los dos cuadrados pequeños AB juntos son iguales al grande T.

Núm. 270. Luego el cuadrado de la hipotenusa es igual á los dos cuadrados de sus lados.

Supuesto que es tan famosa esta proposicion, no será desagradable á los principiantes la noticia de algunas otras demostraciones que añadiremos aquí.

Formemos un triángulo rectángulo R (Fig. 174), y sobre sus tres lados formemos los tres cuadrados A, B, H: bajemos desde el vértice del triángulo una perpendicular, que no solo divida la hipotenusa, sino tambien su cuadrado, en dos paralelógramos *ab*.

Pero segun el núm. 195 cuando se baja una perpendicular desde el vértice sobre la hipotenusa, cualquier lado del ángulo recto es media proporcional entre toda la hipotenusa y el segmento cortado por la perpendicular; y por consiguiente tenemos $Me : MO :: MO : MN$; luego multiplicando el primer término por el último haremos un paralelógramo igual al cuadrado del término medio; y así el paralelógramo *a* es igual al cuadrado A. Por la misma razon *b* es igual á B; luego $a+b$, que hacen el cuadrado de la hipotenusa, es igual á $A+B$, cuadrados de los lados.

Tambien se puede demostrar por otro modo (Fig. 175). Tenemos el triángulo rectángulo AEO: queremos probar que el cuadrado de AO es igual al cuadrado de AE junto con el cuadrado de EO.

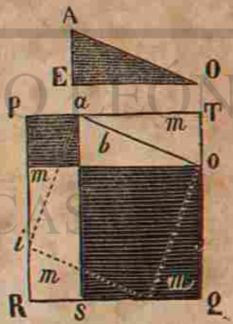


Fig. 175.

Pongamos el triángulo en *b*, y formemos sobre sus lados los dos cuadrados PQ; resultan los dos paralelógramos que se pintan claros, con los cuales se llenaria el cuadrado total de la figura P, T, R, Q.

Formemos ahora el cuadrado de la hipotenusa *ao*, y tendremos el cuadrado *a*, *o*, *i*, *s*. Este cuadrado deja cuatro triángulos *m*, *m*, *m*, *m*. Estos triángulos son iguales entre sí, y tambien iguales á *b*; lo que se conoce advirtiendo que los lados del cuadrado total PTRQ son iguales, y cada uno es igual á un lado pequeño de los triángulos junto con un lado grande, y como todos son rectángulos todos vienen á ser iguales. Pero cada paralelógramo claro vale dos triángulos *m*, *m*: luego tanto valen los dos paralelógramos claros como los cuatro triángulos *m*, *m*, *m*, *m*; pero si quitamos del cuadrado total los dos paralelógramos restan los dos cuadrados P y Q; y si quitamos del cuadrado total los cuatro triángulos quedará solo el cuadrado de la hipotenusa: luego tanto vale el cuadrado de la hipotenusa como los dos que se forman sobre los otros lados del triángulo.

El grande Euclides demuestra esta proposicion del modo siguiente (Fig. 176).

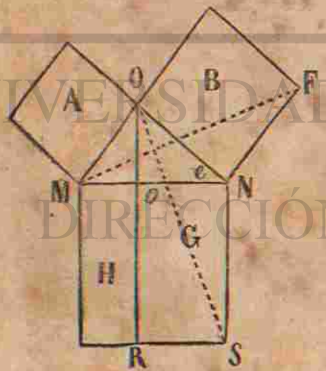


Fig. 176.

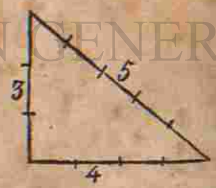


Fig. 177.

Forma el triángulo rectángulo MON, y los tres cuadrados sobre sus lados; tira una perpendicular sobre la hipotenusa, la cual divide su cuadrado en dos paralelógramos, y prueba despues que el paralelógramo G es igual al cuadrado B, así como el paralelógramo H es igual á A, lo que prueba del modo siguiente.

Primeramente los dos triángulos SON, NMF son iguales, pues ambos tienen un lado del cuadrado grande y otro lado del cuadrado B; y el ángulo comprendido entre ellos es compuesto del ángulo comun *e* y de un ángulo recto, lo que basta para ser iguales (núm. 112).

Pero el triángulo SON es la mitad del paralelógramo G, porque tiene el mismo valor que tendria si su vértice estuviese en *e*. Del mismo modo el triángulo NMF es la mitad del cuadrado B, porque tiene el mismo valor que tendria si su vértice M pasase á O: luego si la mitad de G es igual á la mitad de B, el paralelógramo G es igual al cuadrado B que le corresponde.

Del mismo modo se prueba que H es igual á A: luego si H y G hacen el cuadrado de la hipotenusa, será este igual á los dos cuadrados de los lados $A+B$.

Ve aquí las consecuencias de esta proposicion.

I.

Si el triángulo rectángulo (Fig. 177) tuviere un lado del ángulo recto que valga 3 y otro que valga 4, el cuadrado del 1 será 9 y el del otro 16, los cuales juntos hacen 25: así el cuadrado de la hipotenusa será 25, cuya raiz es 5.

Núm. 271. Luego en el triángulo rectángulo si el ángulo recto está hecho por lados del valor de 3 y de 4, la hipotenusa será 5.

II.

Núm. 272. Si quisiéremos levantar una perpendicular en la estremidad de una línea (Fig. 178),

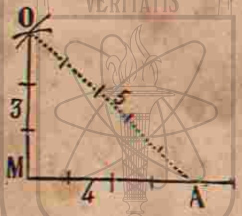


Fig. 178.

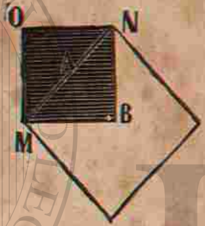


Fig. 179.

cuando el terreno no permite prolongarla ni trabajar mas abajo de ella, lo haremos con el método siguiente:

1º Señalaremos con el compas en la línea dada cinco medidas iguales.

2º Tomaremos tres medidas con el compas, y desde el punto M describiré un arco.

3º Tomaré con el compas cinco medidas, y llegando al punto A, que termina cuatro medidas, describiré otro arco que cortará al primero en O, y desde ese punto bajaré una perpendicular M, la cual sin duda es perpendicular, porque siendo el triángulo formado con lados de 3, 4, 5 medidas, necesariamente será rectángulo.

III.

Núm. 273. Siempre que el triángulo rectángulo fuere isósceles, v. g. como cuando (Fig. 179) dividimos un cuadrado por su diagonal, el cuadrado de la hipotenusa será duplo de cualquiera cuadrado que se forme sobre los lados, porque siendo el de la hipotenusa igual á la suma de los dos cuadrados de los lados, es duplo de las mitades de esa suma; y así,

Si nos dan un cuadrado A (Fig. 179), y nos pidieren otro que sea doble de él, tiraremos una diagonal, y esa será el lado del nuevo cuadrado B, porque es hipotenusa de un triángulo isósceles.

Núm. 274. Luego hay método para formar un cuadrado duplo de otro dado.

IV.

Si en un cuadrado A tiramos las diagonales RM, ON, serán mutuamente perpendiculares (Fig. 180); porque la primera tiene dos puntos RM igualmente distantes de las estremidades de la otra (núm. 32); y del mismo modo la segunda respecto de la primera, y por tener cada una dos puntos igualmente distantes de las estremidades de la otra se cortan por el medio (núm. 33), por consiguiente el triángulo NeM es rectángulo é isósceles.

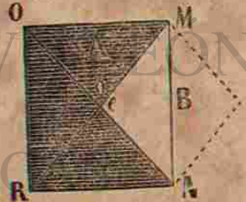


Fig. 180.

Luego el cuadrado de la hipotenusa NM es duplo del cuadrado sobre uno de sus lados *o*M; y por consiguiente el nuevo cuadrado B es la mitad del que nos dieron A.

Núm. 275. Luego tenemos método para formar un cuadrado B que sea la mitad de otro cuadrado que nos hayan dado A.

V.

Núm. 276. Si nos pidieren que reduzcamos á un solo cuadrado dos cuadrados dados AB (Fig. 181), haremos lo siguiente :

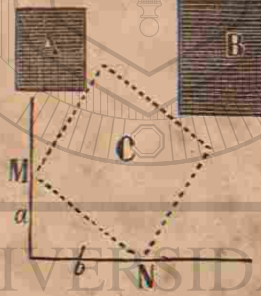


Fig. 181.

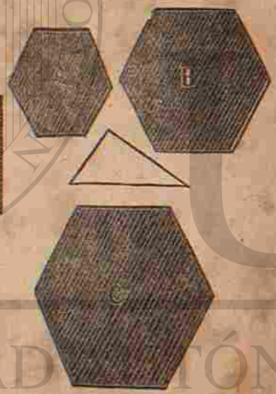


Fig. 182.

1° Formaremos un ángulo recto con lineas indefinidas.

2ª Pondremos de una parte el lado de A y de otra el de B : tiraremos una línea MN, que será hipotenusa, y por lo mismo el cuadrado C que está sobre ella será igual á los dos juntos AB.

§ X.

Aplicacion de la doctrina de la hipotenusa á los polígonos y círculos.

Dijimos al núm. 261 que todas las figuras semejantes eran entre sí como los cuadrados de sus lados correspondientes; pero los polígonos regulares del mismo número de lados son figuras semejantes.

Núm. 277. Luego el polígono regular sobre la hipotenusa es igual á los dos polígonos semejantes sobre los dos lados. Y así el polígono C (Fig. 182) es igual á los dos AB.

Como los círculos se pueden considerar á manera de polígonos regulares, podemos decir de los círculos lo que acabamos de decir de los polígonos.

Núm. 278. Luego el círculo sobre la hipotenusa es igual á los dos círculos sobre los lados (Fig. 183); y así C será igual á B junto con A; y si el triángulo fuere isósceles, el círculo de la hipotenusa será doblado del círculo de cualquiera de los lados (núm. 275).

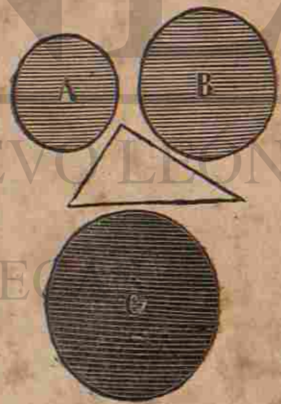


Fig. 183.

De esta definicion se sacan las consecuencias siguientes :

I.

Si nos dieren una corona ó un anillo (Fig. 184),

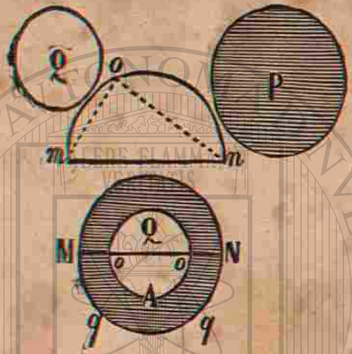


Fig. 184.

Fig. 185.

y nos pidieren un círculo que sea igual al anillo, la operacion se hará de este modo :

1º Tomaré el diámetro esterior del anillo MN para hacer de él una hipotenusa, describiendo sobre ella un medio círculo *mon*.

2º Tomaré el diámetro interior del anillo, y haré de él el lado *mo* del triángulo rectángulo.

3º Acabaré el triángulo con la línea *on*, y esta será el diámetro del círculo P, el cual será igual al anillo dado.

Pues el círculo A de la hipotenusa es igual á los dos PQ, luego A menos Q ha de ser igual á P; pero A menos Q es lo mismo que el anillo, porque el círculo Q es igual al vacío Q, y así lo mismo es decir A menos Q que decir el anillo, y por consiguiente el anillo A es igual á P.

Núm. 279. Luego hay método para reducir un anillo ó corona á un círculo entero.

II.

Si nos dieren (Fig. 185) una luna ó creciente B para reducirla á un círculo entero, procederé como en el caso precedente, porque tanto monta quitar de un círculo grande uno pequeño concéntrico, como sacarle mas de un lado que de otro, lo que hace que en lugar de una corona ó anillo tengamos una especie de luna nueva. No obstante se ha de advertir, que el círculo pequeño A no debe salir del grande en ningun caso para que la demostracion tenga su vigor.

III.

Si nos dieren un círculo A (Fig. 186), y nos pidieren otro que sea duplo de este, lo haré del modo siguiente :

1º Tiraré dos diámetros en ángulo recto y los uniré con una hipotenusa BO.

2º De esta hipotenusa me serviré como de radio para el nuevo círculo B.

En esta suposicion tenemos que B tiene como radio una hipotenusa, y A uno de los lados del triángulo, siendo este isósceles; pero ya dijimos que los círculos eran como los cuadrados por el núm. 260; y por el 277 se dijo que el cuadrado de la hipotenusa era duplo del cuadrado de cualquiera de los lados : luego B será duplo de A.

Fig. 186.

Núm. 280. Luego hay método para hacer un círculo duplo á otro.

IV.

Si nos dieren un círculo A (Fig. 187), y nos pidieren

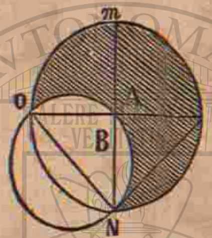


Fig. 187.

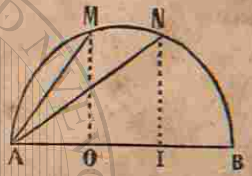


Fig. 188.

ren uno que sea la mitad del que nos dieron, lo haremos del modo siguiente.

Tírense los diámetros en ángulo recto y dos cuerdas *m*O, NO, que hagan con el diámetro un triángulo. Este será rectángulo (número 74); y como los arcos NO, *m*O son iguales, tambien las dos cuerdas lo son por el núm. 5, y queda el triángulo NO*m* isósceles y rectángulo; por consiguiente el círculo A, que tiene por diámetro la hipotenusa *m*N, será duplo del nuevo círculo B, que solo tiene por diámetro uno de los lados NO, como dijimos al núm. 278.

Núm. 281. Luego tenemos método para hacer un círculo B, que sea la mitad de otro dado A.

§ XI.

Modo de formar cuadrados y círculos en cualquiera razon que nos pidieren con respecto á los que nos fueren dados.

Núm. 282. Dijimos al núm. 196, que tirando de la estremidad de un diámetro (Fig. 188) una cuerda AM, esta era media proporcional entre todo el diámetro AB, y su segmento AO, cortado por la perpendicular MO.

Pudiendo entonces decir $\div$ AO : AM : AB; por consiguiente el producto de los estremos ha de ser igual al cuadrado de la cantidad media; esto es, $AO \times AB = AM^2$, que es lo mismo que $AM \times AM$. Del mismo modo (Fig. 188) puedo demostrar que la otra cuerda AN es media proporcional entre el diámetro AB y el segmento AI cortado por la perpendicular NI, pudiendo decirse AI : AN : : AN : AB; y por consiguiente $AI \times AB = AN^2$.

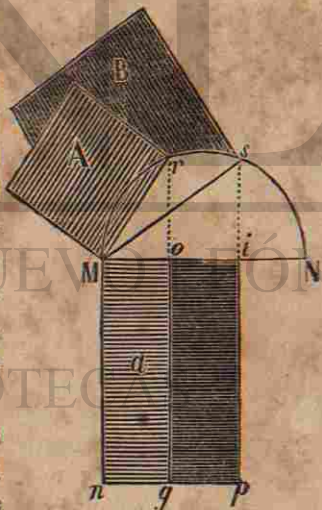


Fig. 189.

Núm. 283. Hacemos esto sensible en la (Fig. 189): las dos cuerdas M*r*, M*s* son

Núm. 280. Luego hay método para hacer un círculo duplo á otro.

IV.

Si nos dieren un círculo A (Fig. 187), y nos pidieren uno que sea la mitad del que nos dieron, lo haremos del modo siguiente.

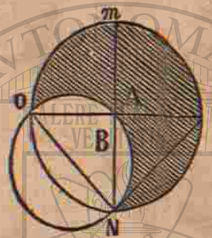


Fig. 187.

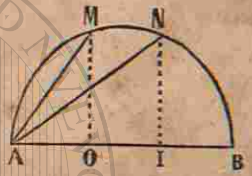


Fig. 188.

Tírense los diámetros en ángulo recto y dos cuerdas *m*O, NO, que hagan con el diámetro un triángulo. Este será rectángulo (número 74); y como los arcos NO, *m*O son iguales, tambien las dos cuerdas lo son por el núm. 5, y queda el triángulo NO*m* isósceles y rectángulo; por consiguiente el círculo A, que tiene por diámetro la hipotenusa *m*N, será duplo del nuevo círculo B, que solo tiene por diámetro uno de los lados NO, como dijimos al núm. 278.

Núm. 281. Luego tenemos método para hacer un círculo B, que sea la mitad de otro dado A.

§ XI.

Modo de formar cuadrados y círculos en cualquiera razon que nos pidieren con respecto á los que nos fueren dados.

Núm. 282. Dijimos al núm. 196, que tirando de la estremidad de un diámetro (Fig. 188) una cuerda AM, esta era media proporcional entre todo el diámetro AB, y su segmento AO, cortado por la perpendicular MO.

Pudiendo entonces decir $\div\div$ AO : AM : AB ; por consiguiente el producto de los estremos ha de ser igual al cuadrado de la cantidad media; esto es, $AO \times AB = AM^2$, que es lo mismo que $AM \times AM$. Del mismo modo (Fig. 188) puedo demostrar que la otra cuerda AN es media proporcional entre el diámetro AB y el segmento AI cortado por la perpendicular NI, pudiendo decirse AI : AN : : AN : AB; y por consiguiente $AI \times AB = AN^2$.

Núm. 283. Hacemos esto sensible en la (Fig. 189): las dos cuerdas M*r*, M*s* son

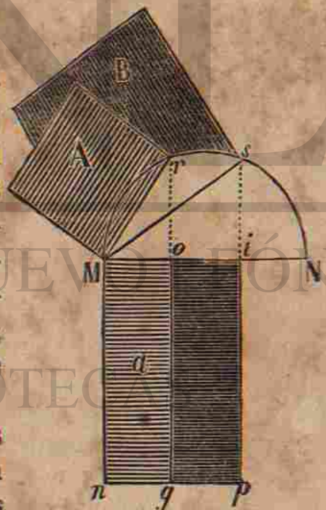


Fig. 189.

medias proporcionales entre el diámetro total MN, y sus dos segmentos Mo Mi; por consiguiente Mo: Mi: :Mr:MN; luego Mo×MN=Mr×Mr.

Pero Mo×MN es el paralelógramo *a*, cuya base es Mo, y su altura es Mn=MN, y Mr×Mr es el cuadrado A : luego el paralelógramo *a* es igual al cuadrado A.

Del mismo modo se prueba que el paralelógramo total Mp es igual al cuadrado mayor B, cuyo lado sea la cuerda Ms.

Pero estos dos paralelógramos Mg, Mp teniendo la misma altura son entre sí como sus bases, esto es, como los segmentos Mo Mi; luego los dos cuadrados que le son iguales entre sí son como los segmentos Mo Mi.

Núm. 284. Luego los cuadrados de las cuerdas tiradas de la estremidad del diámetro son entre sí como los segmentos del diámetro cortados por sus perpendiculares.

De esta regla general se sacan varias consecuencias.

I.

Núm. 285. Si dado un cuadrado A (Fig. 190) nos pidieren á un tiempo otros varios que tengan diversa proporcion con el primero, v. g. 4 veces mayor 6, 9, 13 ó 15½ ó 20, en brevísimo tiempo podemos resolver este problema del modo siguiente.

1º Tírese una línea arbitraria, y descríbase sobre esta un medio círculo.

2º Tómese con el compas *ai*, lado del cuadrado A que nos dieron, y fórmese de él una cuerda *ai*,

que salga de la estremidad del diámetro; y de otra

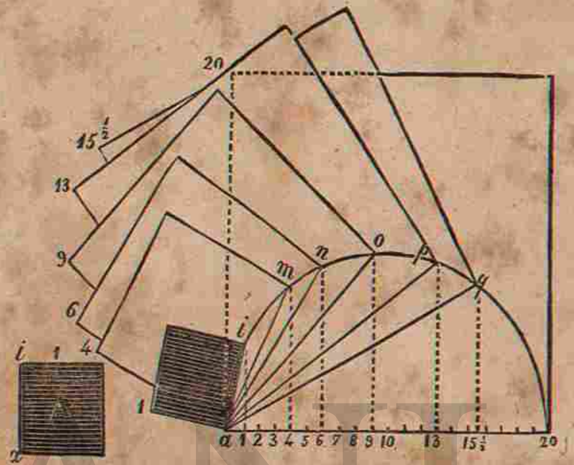


Fig. 190.

estremidad de la cuerda *i* tírese una perpendicular sobre el diámetro.

3º Tómese con el compas ese segmento *a* 1 del diámetro; con esta medida vamos dividiendo todo el diámetro en la forma de la figura.

4º Notaré el número 4, 6, 9, 13, 15½, 20, etc., que corresponden á los cuadrados que me pidieron; levantaré desde ellos perpendiculares, las cuales irán á terminar en los puntos de la circunferencia *m*, *n*, *o*, *p*, *q*, adonde tambien van á parar las cuerdas tiradas desde *a*, que serán los lados de los cuadrados que nos pidieren.

Por cuanto queda ya probado que estos diferentes cuadrados de la figura son entre sí, como los segmentos del diámetro, cortados por las perpendiculares (núm. 284); luego los nuevos cuadrados estan en esta misma proporcion de 4, 6, 9, 13, 15½.

Si acaso el número de los cuadrados que nos pidieren fuere tan largo que no quepa en el diámetro arbitrario que se escogió, tómese otra línea mayor á proporcion de las que faltaren, y repítase para estos la operacion.

Núm. 286. Luego tenemos método para formar con una sola operacion cualesquiera cuadrados en la razon que los pidan.

II.

Dijimos que los círculos estaban entre sí como los cuadrados de sus diámetros al número 261; por consiguiente podemos decir de los círculos, cuyos diámetros fueren las cuerdas (Fig. 191), que ellos

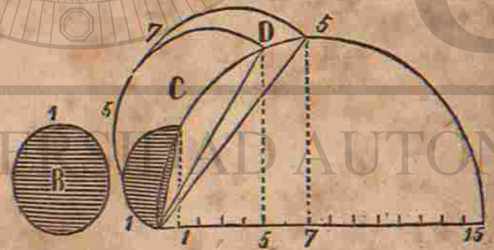


Fig. 191.

tienen entre sí la misma razon de los segmentos de un diámetro, cortados por varias perpendiculares que salen de las otras estremidades de las cuerdas; y así dándonos el círculo B, podremos hacer otros

CD, que sean cinco ó siete veces mayores, ó en cualquiera otra razon que los pidieren.

Núm. 287. Luego tenemos método para formar con una sola operacion los círculos que nos pidieren en cualquiera razon que se quiera respecto de algun círculo dado B.

III.

Núm. 288. Si nos dieren un círculo A (Fig. 192),

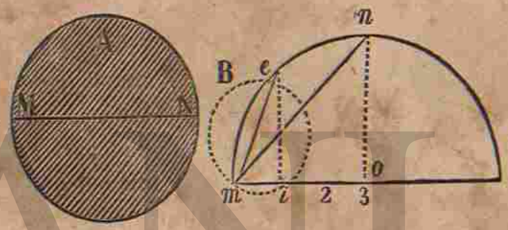


Fig. 192.

y nos pidieren otro que sea la tercera ó quinta parte de él, haremos lo siguiente.

1° Tírese una línea á discrecion, pero que sea mayor que el diámetro del círculo dado, y descríbase sobre ella un semicírculo; últimamente tírese una cuerda *mn* igual al diámetro MN del mismo círculo dado.

2° Tírese desde *n* una perpendicular sobre el diámetro *no*, y divídase este segmento del diámetro *mo* en tres partes iguales: de la division primera levántese una perpendicular, la que irá al punto *e*: desde este tírese la cuerda *em*, que será el diámetro del nuevo círculo B, el cual, por lo que ya que-círculos están entre sí como los cuadrados de los diámetros,

En los paralelógramos semejantes (Fig. 169) el esponente de la razon de las bases es el mismo que el de la razon de las alturas, y cuando se multiplica un esponente por otro se multiplica por sí mismo, y se hace un cuadrado de cualquiera de ellos. Pero lo que se dice de los paralelógramos semejantes se dice de los triángulos y de todas las figuras semejantes entre sí.

Núm. 262. Luego el esponente de figuras semejantes es el cuadrado del esponente de los lados (Fig. 169).

§ VIII.

De la razon que hay entre el círculo y los cuadrados inscrito y circunscrito, y del formado sobre el radio.

Núm. 264. Se llama cuadrado circunscrito aquel que se queda fuera del círculo, tocándole por todos cuatro lados. Este cuadrado precisamente ha de tener por lado el diámetro del círculo (Fig. 170).

Núm. 265. Se llama cuadrado inscrito el que se forma dentro del círculo, tocando la circunferencia con sus cuatro ángulos (Fig. 171).

Se llama cuadrado del radio el que le tiene por lado (Fig. 172).

Núm. 266. Ahora, pues, para conocer la razon que hay entre el círculo y el cuadrado circunscrito haré lo siguiente (Fig. 170).

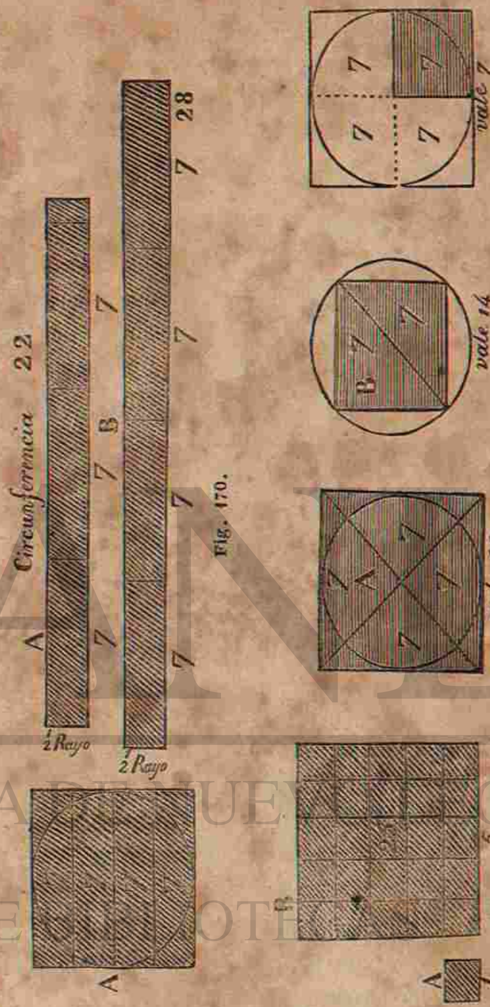


Fig. 169. Fig. 170. Fig. 171. Fig. 172.

I.

Reduciré el círculo á un paralelógramo A, cuya base sea la circunferencia y su altura medio radio (núm. 252): de este modo si el diámetro del círculo vale 7, la circunferencia de él ó grandeza del paralelógramo será 22 (núm. 130).

II.

Dividiré el cuadrado en cuatro paralelógramos iguales, quedando cada uno de ellos con la altura de medio radio y todo lo largo del diámetro; por consiguiente todos cuatro juntos hacen un paralelógramo B de la misma altura que A; pero su grandeza será cuatro veces 7, ó 28. Pero estos dos paralelógramos AB tienen la misma altura, y son como sus bases (núm. 248).

Núm. 267. Luego el círculo es al cuadrado circunscrito como la circunferencia es á cuatro diámetros, lo que viene á ser como 22 á 28.

Si queremos saber la proporcion del círculo con el cuadrado inscrito haremos lo siguiente (Fig. 171).

I.

Dividiremos el cuadrado circunscrito con dos diagonales en cuatro triángulos, y cada uno de ellos tendrá por base el diámetro y por altura el radio.

II.

Dividiré el cuadrado inscrito con una diagonal en dos triángulos, que tambien tendrán por base el diámetro y por altura el radio.

Núm. 268. Luego el cuadrado inscrito es la mitad del circunscrito. Por consiguiente el círculo es respecto del cuadrado inscrito como la circunferencia á dos diámetros, ó como 22 á 14.

Finalmente para saber la razon que hay entre el círculo y el cuadrado de su radio haré lo siguiente:

Dividiré el cuadrado circunscrito (Fig. 172) por dos diámetros en cuatro cuadrados iguales, y cada uno de ellos será cuadrado del radio; por consiguiente si el cuadrado circunscrito vale 28, el cuadrado del radio solamente valdrá 7.

Núm. 269. Luego el círculo es al cuadrado de su radio como la circunferencia á un diámetro, ó como 22 á 7. Luego los tres cuadrados que pertenecen á un círculo son como 7, 14, 28, valiendo el círculo 22.

§ IX.

De la razon que hay entre el cuadrado de la hipotenusa y los cuadrados de los otros dos lados.

Esta proposicion, que es famosísima, se atribuye á Pitágoras, de quien dicen que por haberla hallado sacrificó cien bueyes á las Musas en accion de gracias.

Para conocer, pues, la proporcion que hay entre el cuadrado T de la hipotenusa (Fig. 175) y los dos cuadrados AB, formados sobre los lados del triángulo *ab*, haremos lo siguiente:

I.

Tiraremos una perpendicular desde el vértice del

triángulo, la que le dividirá en dos *ab*, los cuales

Fig 173.

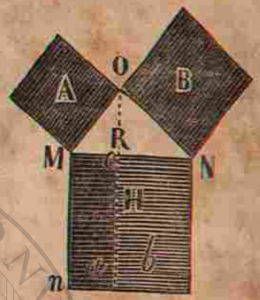


Fig. 174.

son semejantes entre sí y al triángulo total por tener cada uno un ángulo recto.

II.

Debemos tener presente que los triángulos semejantes son entre sí como los cuadrados de sus lados (núm. 256); y así los tres triángulos *ab* y el total son entre sí como los cuadrados ABT.

III.

Observemos que los dos triángulos pequeños *ab* juntos son iguales al grande; luego tambien los dos cuadrados pequeños AB juntos son iguales al grande T.

Núm. 270. Luego el cuadrado de la hipotenusa es igual á los dos cuadrados de sus lados.

Supuesto que es tan famosa esta proposicion, no será desagradable á los principiantes la noticia de algunas otras demostraciones que añadiremos aquí.

Formemos un triángulo rectángulo R (Fig. 174), y sobre sus tres lados formemos los tres cuadrados A, B, H : bajemos desde el vértice del triángulo una perpendicular, que no solo divida la hipotenusa, sino tambien su cuadrado, en dos paralelógramos *ab*.

Pero segun el núm. 195 cuando se baja una perpendicular desde el vértice sobre la hipotenusa, cualquier lado del ángulo recto es media proporcional entre toda la hipotenusa y el segmento cortado por la perpendicular; y por consiguiente tenemos Mc:MO::MO:MN; luego multiplicando el primer término por el último haremos un paralelógramo igual al cuadrado del término medio; y así el paralelógramo *a* es igual al cuadrado A. Por la misma razon *b* es igual á B; luego *a*+*b*, que hacen el cuadrado de la hipotenusa, es igual á A+B, cuadrados de los lados.

Tambien se puede demostrar por otro modo (Fig. 175). Tenemos el triángulo rectángulo AEO : queremos probar que el cuadrado de AO es igual al cuadrado de AE junto con el cuadrado de EO.

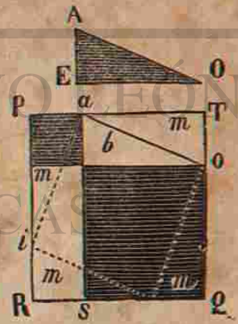


Fig. 175.

Pongamos el triángulo en *b*, y formemos sobre sus lados los dos cuadrados PQ; resultan los dos paralelógramos que se pintan claros, con los cuales se llenaria el cuadrado total de la figura P, T, R, Q.

Formemos ahora el cuadrado de la hipotenusa *ao*, y tendremos el cuadrado *a*, *o*, *i*, *s*. Este cuadrado deja cuatro triángulos *m*, *m*, *m*, *m*. Estos triángulos son iguales entre sí, y tambien iguales á *b*; lo que se conoce advirtiendo que los lados del cuadrado total PTRQ son iguales, y cada uno es igual á un lado pequeño de los triángulos junto con un lado grande, y como todos son rectángulos todos vienen á ser iguales. Pero cada paralelógramo claro vale dos triángulos *m*, *m*: luego tanto valen los dos paralelógramos claros como los cuatro triángulos *m*, *m*, *m*, *m*; pero si quitamos del cuadrado total los dos paralelógramos restan los dos cuadrados P y Q; y si quitamos del cuadrado total los cuatro triángulos quedará solo el cuadrado de la hipotenusa: luego tanto vale el cuadrado de la hipotenusa como los dos que se forman sobre los otros lados del triángulo.

El grande Euclides demuestra esta proposicion del modo siguiente (Fig. 176).

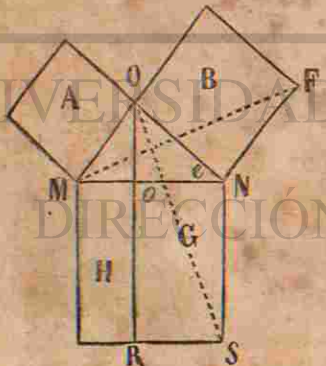


Fig. 176.

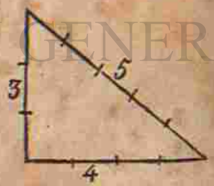


Fig. 177.

Forma el triángulo rectángulo MON, y los tres cuadrados sobre sus lados; tira una perpendicular sobre la hipotenusa, la cual divide su cuadrado en dos paralelógramos, y prueba despues que el paralelógramo G es igual al cuadrado B, así como el paralelógramo H es igual á A, lo que prueba del modo siguiente.

Primeramente los dos triángulos SON, NMF son iguales, pues ambos tienen un lado del cuadrado grande y otro lado del cuadrado B; y el ángulo comprendido entre ellos es compuesto del ángulo comun *e* y de un ángulo recto, lo que basta para ser iguales (núm. 112).

Pero el triángulo SON es la mitad del paralelógramo G, porque tiene el mismo valor que tendria si su vértice estuviese en *e*. Del mismo modo el triángulo NMF es la mitad del cuadrado B, porque tiene el mismo valor que tendria si su vértice M pasase á O: luego si la mitad de G es igual á la mitad de B, el paralelógramo G es igual al cuadrado B que le corresponde.

Del mismo modo se prueba que H es igual á A: luego si H y G hacen el cuadrado de la hipotenusa, será este igual á los dos cuadrados de los lados A+B.

Ve aquí las consecuencias de esta proposicion.

I.

Si el triángulo rectángulo (Fig. 177) tuviere un lado del ángulo recto que valga 3 y otro que valga 4, el cuadrado del 4 será 9 y el del otro 16, los cuales juntos hacen 25: así el cuadrado de la hipotenusa será 25, cuya raiz es 5.

Luego el cuadrado de la hipotenusa NM es duplo del cuadrado sobre uno de sus lados *o*M; y por consiguiente el nuevo cuadrado B es la mitad del que nos dieron A.

Núm. 275. Luego tenemos método para formar un cuadrado B que sea la mitad de otro cuadrado que nos hayan dado A.

V.

Núm. 276. Si nos pidieren que reduzcamos á un solo cuadrado dos cuadrados dados AB (Fig. 181), haremos lo siguiente :

Fig. 181.

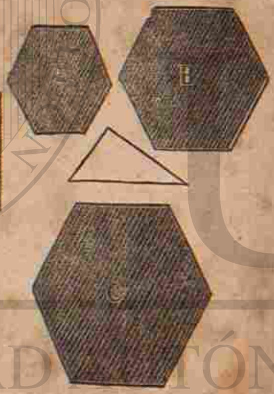


Fig. 182.

1° Formaremos un ángulo recto con líneas indefinidas.

2ª Pondremos de una parte el lado de A y de otra el de B : tiraremos una línea MN, que será hipotenusa, y por lo mismo el cuadrado C que está sobre ella será igual á los dos juntos AB.

§ X.

Aplicacion de la doctrina de la hipotenusa á los polígonos y círculos.

Dijimos al núm. 261 que todas las figuras semejantes eran entre sí como los cuadrados de sus lados correspondientes ; pero los polígonos regulares del mismo número de lados son figuras semejantes.

Núm. 277. Luego el polígono regular sobre la hipotenusa es igual á los dos polígonos semejantes sobre los dos lados. Y así el polígono C (Fig. 182) es igual á los dos AB.

Como los círculos se pueden considerar á manera de polígonos regulares, podemos decir de los círculos lo que acabamos de decir de los polígonos.

Núm. 278. Luego el círculo sobre la hipotenusa es igual á los dos círculos sobre los lados (Fig. 183); y así C será igual á B junto con A; y si el triángulo fuere isósceles, el círculo de la hipotenusa será doblado del círculo de cualquiera de los lados (núm. 275).

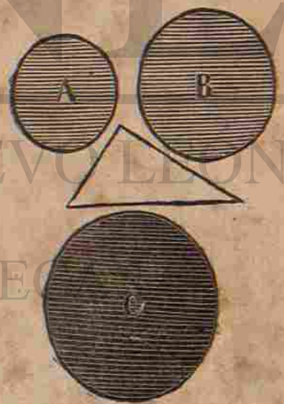


Fig. 183.

De esta definicion se sacan las consecuencias siguientes :

I.

Si nos dieren una corona ó un anillo (Fig. 184),

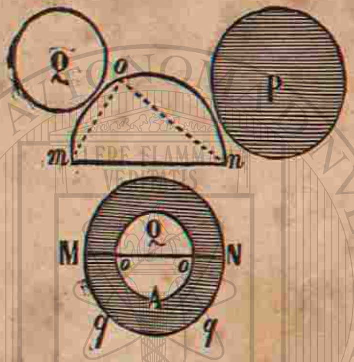


Fig. 184.

Fig. 185.

y nos pidieren un círculo que sea igual al anillo, la operacion se hará de este modo :

1º Tomaré el diámetro esterior del anillo MN para hacer de él una hipotenusa, describiendo sobre ella un medio círculo *mon*.

2º Tomaré el diámetro interior del anillo, y haré de él el lado *mo* del triángulo rectángulo.

3º Acabaré el triángulo con la línea *on*, y esta será el diámetro del círculo P, el cual será igual al anillo dado.

Pues el círculo A de la hipotenusa es igual á los dos PQ, luego A menos Q ha de ser igual á P ; pero A menos Q es lo mismo que el anillo, porque el círculo Q es igual al vacío Q, y así lo mismo es decir A menos Q que decir el anillo, y por consiguiente el anillo A es igual á P.

Núm. 279. Luego hay método para reducir un anillo ó corona á un círculo entero.

II.

Si nos dieren (Fig. 185) una luna ó creciente B para reducirla á un círculo entero, procederé como en el caso precedente, porque tanto monta quitar de un círculo grande uno pequeño concéntrico, como sacarle mas de un lado que de otro, lo que hace que en lugar de una corona ó anillo tengamos una especie de luna nueva. No obstante se ha de advertir, que el círculo pequeño A no debe salir del grande en ningun caso para que la demostracion tenga su vigor.

III.

Si nos dieren un círculo A (Fig. 186), y nos pidieren otro que sea duplo de este, lo haré del modo siguiente :

1º Tiraré dos diámetros en ángulo recto y los uniré con una hipotenusa BO.

2º De esta hipotenusa me serviré como de radio para el nuevo círculo B.

En esta suposicion tenemos que B tiene como radio una hipotenusa, y A uno de los lados del triángulo, siendo este isósceles ; pero ya dijimos que los círculos eran como los cuadrados por el núm. 260; y por el 277 se dijo que el cuadrado de la hipotenusa era duplo del cuadrado de cualquiera de los lados : luego B será duplo de A.

Fig. 186.

Núm. 280. Luego hay método para hacer un círculo duplo á otro.

IV.

Si nos dieren un círculo A (Fig. 187), y nos pidie-

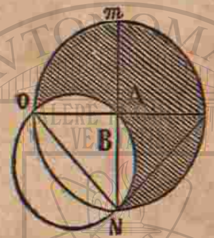


Fig. 187.

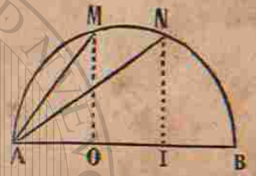


Fig. 188.

ren uno que sea la mitad del que nos dieron, lo haremos del modo siguiente.

Tirense los diámetros en ángulo recto y dos cuerdas *m*O, NO, que hagan con el diámetro un triángulo. Este será rectángulo (número 74); y como los arcos NO, *m*O son iguales, tambien las dos cuerdas lo son por el núm. 5, y queda el triángulo NO*m* isósceles y rectángulo; por consiguiente el círculo A, que tiene por diámetro la hipotenusa *m*N, será duplo del nuevo círculo B, que solo tiene por diámetro uno de los lados NO, como dijimos al núm. 278.

Núm. 281. Luego tenemos método para hacer un círculo B, que sea la mitad de otro dado A.

§ XI.

Modo de formar cuadrados y círculos en cualquiera razon que nos pidieren con respecto á los que nos fueren dados.

Núm. 282. Dijimos al núm. 196, que tirando de la estremidad de un diámetro (Fig. 188) una cuerda AM, esta era media proporcional entre todo el diámetro AB, y su segmento AO, cortado por la perpendicular MO.

Pudiendo entonces decir $\div\!\div$ AO : AM : AB; por consiguiente el producto de los estremos ha de ser igual al cuadrado de la cantidad media; esto es, $AO \times AB = AM^2$, que es lo mismo que $AM \times AM$. Del mismo modo (Fig. 188) puedo demostrar que la otra cuerda AN es media proporcional entre el diámetro AB y el segmento AI cortado por la perpendicular NI, pudiendo decirse AI : AN : : AN : AB; y por consiguiente $AI \times AB = AN^2$.

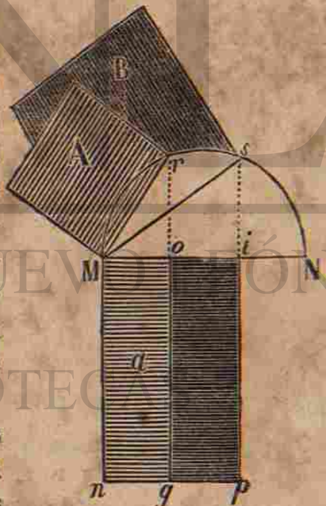


Fig. 189.

Núm. 283. Hacemos esto sensible en la (Fig. 189): las dos cuerdas M*r*, M*s* son medias proporcionales entre el diámetro total MN, y sus dos segmentos Mo Mi; por consiguiente $Mo : Mi :: Mr : MN$; luego $Mo \times MN = Mr \times Mr$.

Pero $Mo \times MN$ es el paralelógramo a, cuya base es Mo, y su altura es $Mn = MN$, y $Mr \times Mr$ es el cuadrado A: luego el paralelógramo a es igual al cuadrado A.

Del mismo modo se prueba que el paralelógramo total Mp es igual al cuadrado mayor B, cuyo lado sea la cuerda Ms.

Pero estos dos paralelógramos Mg, Mp teniendo la misma altura son entre sí como sus bases, esto es, como los segmentos Mo Mi; luego los dos cuadrados que le son iguales entre sí son como los segmentos Mo Mi.

Núm. 284. Luego los cuadrados de las cuerdas tiradas de la estremidad del diámetro son entre sí como los segmentos del diámetro cortados por sus perpendiculares.

De esta regla general se sacan varias consecuencias.

I.

Núm. 285. Si dado un cuadrado A (Fig. 190) nos pidieren á un tiempo otros varios que tengan diversa proporcion con el primero, v. g. 4 veces mayor 6, 9, 15 ó 15½ ó 20, en brevísimo tiempo podemos resolver este problema del modo siguiente.

1º Tírese una línea arbitraria, y descríbase sobre esta un medio círculo.

2º Tómese con el compas ai, lado del cuadrado A que nos dieron, y fórmese de él una cuerda ai,

que salga de la estremidad del diámetro; y de otra

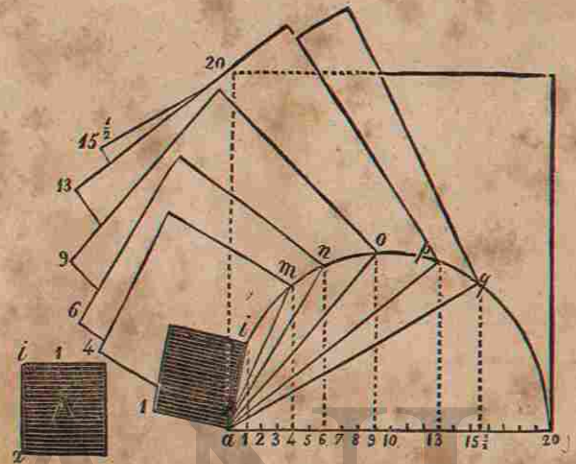


Fig. 190.

estremidad de la cuerda i tírese una perpendicular sobre el diámetro.

3º Tómese con el compas ese segmento a 1 del diámetro; con esta medida vamos dividiendo todo el diámetro en la forma de la figura.

4º Notaré el número 4, 6, 9, 15, 15½, 20, etc., que corresponden á los cuadrados que me pidieron; levantaré desde ellos perpendiculares, las cuales irán á terminar en los puntos de la circunferencia m, n, o, p, q, adonde tambien van á parar las cuerdas tiradas desde a, que serán los lados de los cuadrados que nos pidieren.

Por cuanto queda ya probado que estos diferentes cuadrados de la figura son entre sí, como los segmentos del diámetro, cortados por las perpendiculares (núm. 284); luego los nuevos cuadrados estan en esta misma proporcion de 4, 6, 9, 13, 15½.

Si acaso el número de los cuadrados que nos pidieren fuere tan largo que no quepa en el diámetro arbitrario que se escogió, tómese otra línea mayor á proporcion de las que faltaren, y repítase para estos la operacion.

Núm. 286. Luego tenemos método para formar con una sola operacion cualesquiera cuadrados en la razon que los pidan.

II.

Dijimos que los círculos estaban entre sí como los cuadrados de sus diámetros al número 261; por consiguiente podemos decir de los círculos, cuyos diámetros fueren las cuerdas (Fig. 191), que ellos

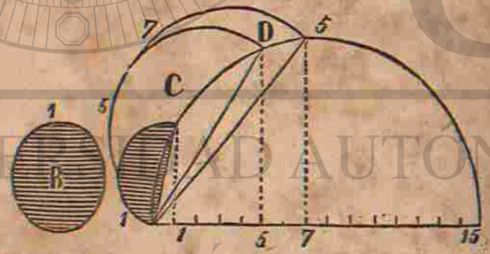


Fig. 191.

tienen entre sí la misma razon de los segmentos de un diámetro, cortados por varias perpendiculares que salen de las otras estremidades de las cuerdas; y así dándonos el círculo B, podremos hacer otros

CD, que sean cinco ó siete veces mayores, ó en cualquiera otra razon que los pidieren.

Núm. 287. Luego tenemos método para formar con una sola operacion los círculos que nos pidieren en cualquiera razon que se quiera respecto de algun círculo dado B.

III.

Núm. 288. Si nos dieren un círculo A (Fig. 192),

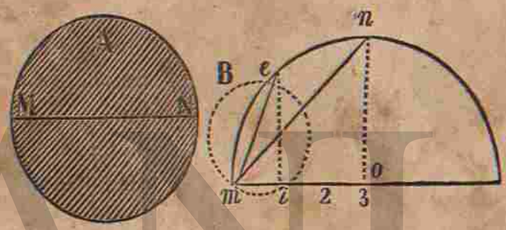


Fig. 192.

y nos pidieren otro que sea la tercera ó quinta parte de él, haremos lo siguiente.

1° Tírese una línea á discrecion, pero que sea mayor que el diámetro del círculo dado, y descríbase sobre ella un semicírculo; últimamente tírese una cuerda *mn* igual al diámetro MN del mismo círculo dado.

2° Tírese desde *n* una perpendicular sobre el diámetro *no*, y divídase este segmento del diámetro *mo* en tres partes iguales: de la division primera levántese una perpendicular, la que irá al punto *e*: desde este tírese la cuerda *em*, que será el diámetro del nuevo círculo B, el cual, por lo que ya queda dicho, será la tercera parte de A, por razon de que los círculos AB estan entre sí como los segmentos del diámetro $m\,1$, $m\,3$.

IV.

Núm. 289. Si habiéndonos dado dos cuadrados ó dos círculos AB (Fig. 193) nos preguntaren en qué razon estan entre sí, haremos lo siguiente.

Fig. 193.

1° Descríbase un semicírculo arbitrario, bien que de forma que su diámetro sea mayor que el de cualquiera de ellos.

2º De los dos diámetros se harán dos cuerdas, ambas nacidas del punto M; y de las otras estremidades de las cuerdas bajaré perpendiculares sobre el diámetro del semicírculo.

3º Veré la proporcion que hay entre los dos segmentos de este diámetro MO, ME, y esa misma será la razon entre los dos círculos dados.

Del mismo modo se puede ejecutar si fueren cuadrados haciendo cuerdas de sus lados.

Núm. 290. Luego hay método para hallar la razon entre muchos cuadrados ó entre muchos círculos dados.

V.

Si nos dieren un círculo A (Fig. 194), y nos pidieren otro que sea, v. g. tres veces mayor, sin valernos de los cuadrados de las cuerdas, como el número 287, podremos hacerlo así.

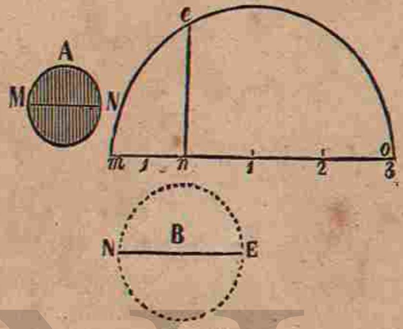


Fig. 194.

1° Pongamos el diámatro *mn* del círculo dado, y continuemos la línea, tomando otras tres porciones iguales.

2º Descríbase sobre esa línea total un semicírculo.

3° Levántese una perpendicular desde el punto *n*, y esta será el diámetro del nuevo círculo B, el que debe ser respecto de A como 3 á 1 : la razon es, porque las tres líneas *mn*, *ne*, *no* estan en proporcion. Luego el cuadrado de la primera línea *mn* es al cuadrado de la segunda *ne*, como la primera línea es á la tercera *no* (núm. 116); y como los círculos estan entre sí como los cuadrados por el núm. 261, el círculo de *mn* es al de *ne*, como la línea de *mn* es á la línea *no*.

Luego tenemos otro método para hacer un círculo en la razon pedida respecto del que nos dieron, sin valernos de las cuerdas de los círculos.

§ XII.

Modo de hallar superficies que sean medias proporcionales entre dos superficies dadas.

Dijimos que cuando se multiplicaba una línea por otra se hacia un paralelógramo, en el que una de las líneas servia de base, y la otra de altura perpendicular (núm. 219); y que los paralelógramos de la misma base eran como las alturas (núm. 250), y los de la misma altura eran como sus bases (núm. 248).

Supongamos ahora que nos dan dos cuadrados AB (Fig. 195), que multiplicamos el lado de uno

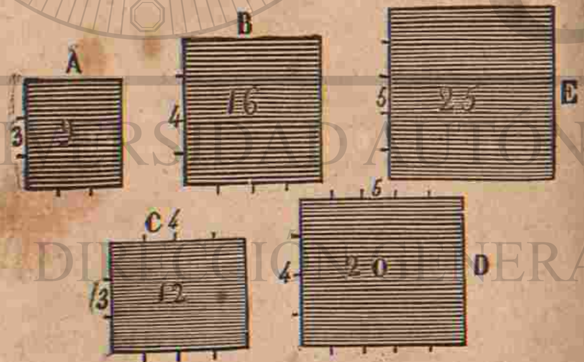


Fig. 195.

por el lado del otro, haremos el paralelógramo C.

Este paralelógramo respecto de A estará en razon de las bases, esto es, de tres á cuatro, y respecto de B, en razon de las alturas, tambien de tres á cuatro; pero como en los cuadrados la razon de las bases es la misma que la de las alturas, se sigue que la misma razon hay entre AC que entre CB; y por consiguiente C es media proporcional entre A y B.

Núm. 291. Luego hay método para hallar un paralelógramo que sea media proporcional entre dos cuadrados dados.

Por el mismo método (Fig. 195) si nos dieren otros dos cuadrados EB, en multiplicando un lado de B por otro de E, haremos el paralelógramo D, que será medio proporcional entre los dos, por la misma razon de arriba. Esto se confirma con los números; porque si A tuviere por lado 3 y B 4 (Fig. 195), A vale 9 y B 16; pero multiplicando 3, lado del 1, por 4, que lo es del otro, tendremos el paralelógramo 12, medio proporcional entre 9 y 16, porque podremos decir: 9:12::12:16, reinando en esta proporcion la razon de 3 y 4.

Del mismo modo si el lado de B vale 4, y el de E vale 5, multiplicando 4 por 5, haremos el paralelógramo, que vale 20, medio proporcional entre B, que vale 16, y E que vale 25, pudiendo decir: 16:20::20:25, pues en ambas partes reina la razon de 4 á 5.

Núm. 292. Si dados dos cuadrados nos piden otro nuevo, que sea medio proporcional entre los dos, haremos la siguiente.

Búsquese una media proporcional entre los la-lo en la razon pedida respecto del que nos dieron, sin valernos de las cuerdas de los círculos.

§ XII.

Modo de hallar superficies que sean medias proporcionales entre dos superficies dadas.

Dijimos que cuando se multiplicaba una línea por otra se hacia un paralelógramo, en el que una de las líneas servia de base, y la otra de altura perpendicular (núm. 219); y que los paralelógramos de la misma base eran como las alturas (núm. 250), y los de la misma altura eran como sus bases (núm. 248).

Supongamos ahora que nos dan dos cuadrados AB (Fig. 195), que multiplicamos el lado de uno

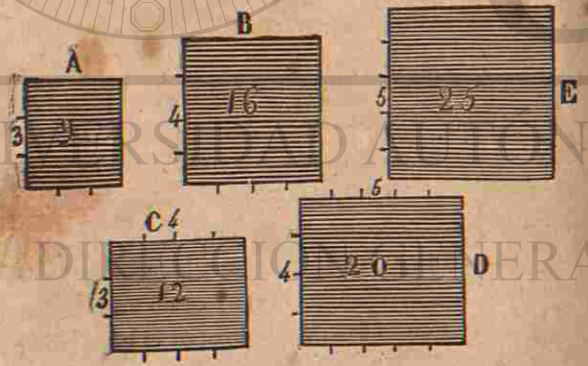


Fig. 195.

por el lado del otro, haremos el paralelógramo C.

Este paralelógramo respecto de A estará en razon de las bases, esto es, de tres á cuatro, y respecto de B, en razon de las alturas, tambien de tres á cuatro; pero como en los cuadrados la razon de las bases es la misma que la de las alturas, se sigue que la misma razon hay entre AC que entre CB; y por consiguiente C es media proporcional entre A y B.

Núm. 291. Luego hay método para hallar un paralelógramo que sea media proporcional entre dos cuadrados dados.

Por el mismo método (Fig. 195) si nos dieren otros dos cuadrados EB, en multiplicando un lado de B por otro de E, haremos el paralelógramo D, que será medio proporcional entre los dos, por la misma razon de arriba. Esto se confirma con los números; porque si A tuviere por lado 3 y B 4 (Fig. 195), A vale 9 y B 16; pero multiplicando 3, lado del 1, por 4, que lo es del otro, tendremos el paralelógramo 12, medio proporcional entre 9 y 16, porque podremos decir: 9:12::12:16, reinando en esta proporcion la razon de 3 y 4.

Del mismo modo si el lado de B vale 4, y el de E vale 5, multiplicando 4 por 5, haremos el paralelógramo, que vale 20, medio proporcional entre B, que vale 16, y E que vale 25, pudiendo decir: 16:20::20:25, pues en ambas partes reina la razon de 4 á 5.

Núm. 292. Si dados dos cuadrados nos piden otro nuevo, que sea medio proporcional entre los dos, haremos la siguiente.

Búsquese una media proporcional entre los lados de los dos cuadrados que nos dieron AB (Fig. 196), y hallaremos la línea *e*, que será el lado del cuadrado pedido E.

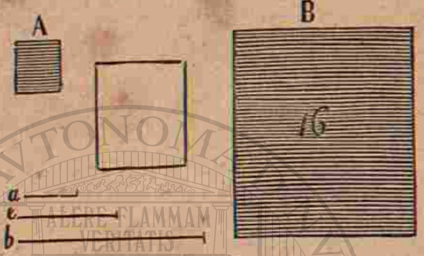


Fig. 196.

Porque si tres cantidades *aeb* estan en progresion, tambien lo estan los cuadrados que se forman de ellas, aunque la razon sea diferente (núm. 259).

Ejemplo ∺ 1 : 2 : 4, el esponente ó la razon que reina en esta progresion es 2, y si hacemos los cuadrados de estas raices tendremos ∺ 1 : 4 : 16, cuyo esponente es 4. Luego si ∺ *a*, *e*, *b* estan en proporcion, tambien lo estarán sus cuadrados ∺ A, E, B.

Ve aquí, amigo Eugenio, un resumen de las proposiciones mas útiles que hallé en la materia de superficies: sé que esto te dará un gusto indecible, por lo que me has escrito en los correos pasados; pues si la doctrina sobre las líneas te interesa tanto, que segun tu espresion andas encantado, mucho mas te encantará la doctrina de las superficies, y aun mucho mas la de los sólidos, que empiezo ya á preparar para enviártela con brevedad.

CARTA VIGÉSIMA.

SOBRE LOS SOLIDOS

§ I.

De la formacion de los sólidos.

Pues me envias á decir, amigo Eugenio, que has entendido bien lo que te dije en la carta antecedente, no dudo que comprenderás fácilmente lo que ahora te diré sobre los sólidos.

En cuanto á su formacion quiero que tengas presente la formacion de las líneas y las superficies; porque así como considerando que un punto se mueve hácia alguna parte formamos idea de que va formando la línea, y considerando que una línea se va moviendo puesta de lado, nos formamos la idea de la superficie, acomodando á la línea la idea de sola la longitud, y á la superficie la de anchura ó latitud, así tambien.

dos de los dos cuadrados que nos dieron AB (Fig. 196), y hallaremos la línea *e*, que será el lado del cuadrado pedido E.

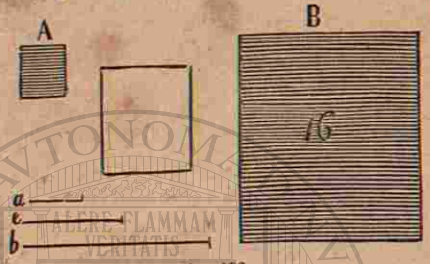


Fig. 196.

Porque si tres cantidades *aeb* estan en progresion, tambien lo estan los cuadrados que se forman de ellas, aunque la razon sea diferente (núm. 259).

Ejemplo $\div 1 : 2 : 4$, el esponente ó la razon que reina en esta progresion es 2, y si hacemos los cuadrados de estas raices tendremos $\div 1 : 4 : 16$, cuyo esponente es 4. Luego si $\div a, e, b$ estan en proporcion, tambien lo estarán sus cuadrados $\div$ A, E, B.

Ve aquí, amigo Eugenio, un resumen de las proposiciones mas útiles que hallé en la materia de superficies: sé que esto te dará un gusto indecible, por lo que me has escrito en los correos pasados; pues si la doctrina sobre las líneas te interesa tanto, que segun tu espresion andas encantado, mucho mas te encantará la doctrina de las superficies, y aun mucho mas la de los sólidos, que empiezo ya á preparar para enviártela con brevedad.

CARTA VIGÉSIMA.

SOBRE LOS SOLIDOS

§ I.

De la formacion de los sólidos.

Pues me envias á decir, amigo Eugenio, que has entendido bien lo que te dije en la carta antecedente, no dudo que comprenderás fácilmente lo que ahora te diré sobre los sólidos.

En cuanto á su formacion quiero que tengas presente la formacion de las líneas y las superficies; porque así como considerando que un punto se mueve hácia alguna parte formamos idea de que va formando la línea, y considerando que una línea se va moviendo puesta de lado, nos formamos la idea de la superficie, acomodando á la línea la idea de sola la longitud, y á la superficie la de anchura ó latitud, así tambien.

Núm. 293. Considerando el movimiento de una superficie, v. g. (Fig. 197) AM, que va siempre pa-

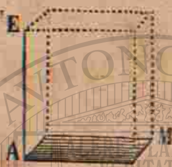


Fig. 197.

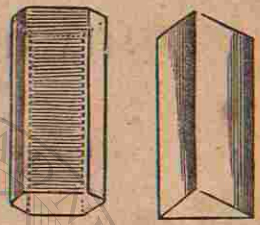


Fig. 198.

ralela á sí misma, y siguiendo una línea recta AE, haremos la idea de un *sólido*: este sólido así formado se llama con nombre general *prisma*.

Núm. 294. Si la superficie que se supone moverse es un paralelógramo como AM (Fig. 197), el *sólido* ó *prisma* que forma se llama paralelipípedo, esto es, sólido comprendido entre superficies paralelas.

Si la superficie movil es un triángulo ó polígono (Fig. 198), el prisma que se forma es *triangular* ó *poligónico* [1].

Núm. 295. Si el plano que se supone que se va moviendo es O subiendo un círculo, el sólido que resulta se llama cilindro, como la (Fig. 199).

Núm. 296. Si el plano ó superficie que se movió

[1] Esta voz poligónico no conviene á los sólidos, porque polígono es figura plana de muchos ángulos: la voz propia es poliedro, que es un cuerpo que tiene asiento por muchas caras, ó es un sólido de muchas superficies.

no solamente va siempre paralelo á sí mismo, sino

Fig. 199.

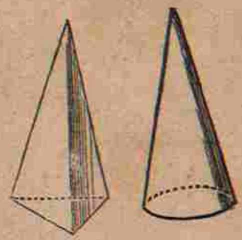


Fig. 200.

que á proporcion que se mueve va disminuyendo por todos los lados proporcionalmente hasta acabar en un punto, el sólido que de aquí resulta se llama pirámide si el plano era figura rectilinea, y si era un círculo se llama cono (Fig. 200).

Núm. 297. El movimiento del plano debe seguir una línea recta, v. g. AE (Fig. 197), la cual se llama *directriz*.

Si la directriz se eleva perpendicular sobre el plano como en las (Fig. 197, 198, 199 y 200) el *prisma*, *cilindro*, pirámide ó *cono* se llaman rectos; pero si la directriz se inclina mas á una parte del plano que á otra, el sólido se llama *oblicuo*, como la (Fig. 201 y 202).

Núm. 298. Si la superficie movil era un cuadrado, y la directriz igual á los lados de este y perpendicular, el sólido se llama cubo, como la (Fig. 203).

Núm. 299. El movimiento de su círculo que anda alrededor de su diámetro forma una esfera (Fig. 204).

Núm. 300. El movimiento de un sector ó de un

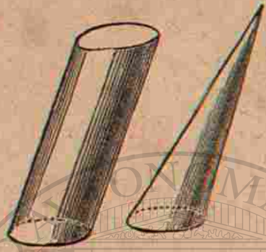


Fig. 201.

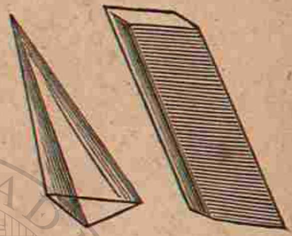


Fig. 202.

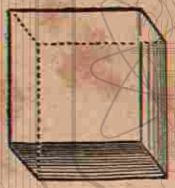


Fig. 203.

Fig. 204.

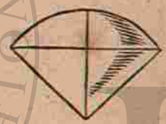


Fig. 205.

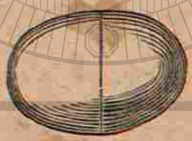


Fig. 206.

Fig. 207.

segmento de círculo, andando alrededor de su eje, hace el sector ó el segmento de la esfera (Fig. 205 y 206).

Núm. 301. El movimiento de una superficie oval, andando alrededor de su menor diámetro, forma una esferoide abatida (Fig. 207) ó chata.

Núm. 302. Pero si anduviere alrededor de su

mayor diámetro hace una esferoide oblonga (Fig. 208).

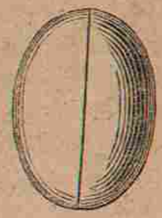


Fig. 208.

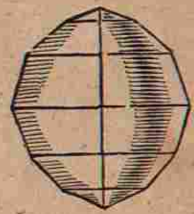


Fig. 209.

Núm. 303. Si un polígono regular anduviere alrededor de su diámetro hace una esferoide multilátera (Fig. 209), ó un poliedro, que quiere decir de muchas caras ó asientos que algunos llaman poligónica aunque impropiamente, porque el polígono es figura plana, y el poliedro es sólida.

De estas simples formaciones de los sólidos se sacan varias consecuencias.

I.

Núm. 304. La base inferior es la misma que por el movimiento viene á ser la base superior. Luego en cualquier prisma la base superior es igual á la inferior.

II.

Núm. 305. Por cualquier parte que se corte el prisma siendo la seccion paralela á la base inferior, esta seccion será base superior. Luego toda seccion del prisma paralela á la base es igual á esta.

III.

Dijimos que la base de la pirámide, moviéndose paralela á sí misma, y disminuyendo en proporcion por todos sus lados á medida que sube, formaba la pirámide, y lo mismo se dijo del *cono*.

Núm. 506. Luego toda seccion de la pirámide ó cono siendo paralela á la base es un plano semejante á ella.

IV.

En el círculo que por su movimiento alrededor del diámetro engendró la esfera (Fig. 210) se pueden considerar muchas cuerdas perpendiculares al diámetro ó eje, cuyas mitades *ao*, *ei* son radios que andando circulares alrededor de una estremidad fija describen otros tantos círculos.

Fig. 210.

Pero hecha cualquiera seccion por un plano en la esfera, se puede considerar como un plano perpendicular al diámetro del círculo generante, formado por la revolucion de alguna media cuerda.

Núm. 507. Luego toda seccion en la esfera es un círculo.

Pero si tiramos en el círculo generante muchas líneas perpendiculares á su diámetro ó eje, la línea que pasare por el centro (Fig. 210) es la máxima de todas, porque es la única que llega á la tangente *min*, siendo todas las demas terminadas por la circunferencia que se aparta de la tangente.

Núm. 508. Luego en toda seccion de la esfera sola la que pasa por el centro es el círculo máximo como engendrado por el radio máximo, y toda otra seccion será círculo menor que ella.

Pero la línea *ei* (Fig. 210), perpendicular al eje del círculo generante que toca en el centro, siempre es el radio de este círculo, igual siempre en todos casos.

Núm. 509. Luego la seccion central de la esfera siempre es igual.

§ II.

De las superficies de los prismas y cilindros.

En las superficies de los prismas, amigo Eugenio, solo se consideran los lados que le cortan alrededor con abstraccion, ó prescindiendo de las bases. Lo mismo se dice de los cilindros, prismas, etc.

Pero dijimos al número 219 que la superficie de cualquier paralelógramo recto era igual á la base multiplicada por la altura perpendicular, y vemos en la (Fig. 211), que los lados del prisma recto B es-

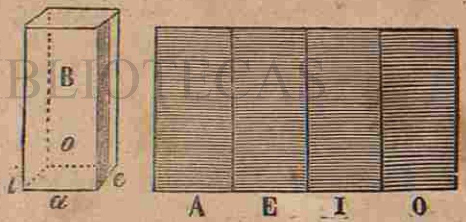


Fig. 211.

tendidos son los paralelógramos tambien rectos A, E, I, O, en los que el circuito de la base *a*, *e*, *i*, *o* se multiplica por la altura.

Núm. 510. Luego la superficie del prisma recto (Fig. 211) es igual al circuito de la base *a*, *e*, *i*, *o* multiplicado por la altura.

En cuanto á la superficie del cilindro recto D (Fig. 212) sabemos que es igual, ó se puede confundir con la del prisma de infinitos lados; y así podemos decir de la una lo que de la otra.

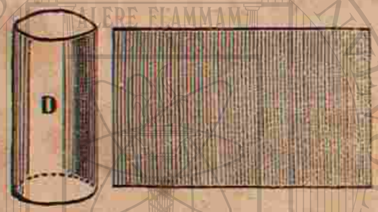


Fig. 212.

Núm. 511. Luego la superficie del cilindro recto es igual á la base multiplicada por la altura (Fig. 212).

Tambien se dijo al número 221 que cuando el paralelógramo era oblicuo (Fig. 213) le habiamos de

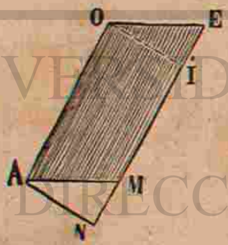


Fig. 213.

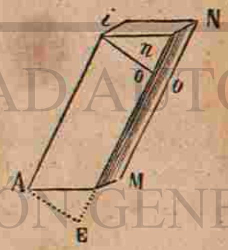


Fig. 214.

reducir á recto para valuarle, multiplicando la línea AO, no por la oblicua OE, sino por la perpendicular OI ó AN.

Núm. 512. Luego la superficie del prisma oblicuo (Fig. 214) no se debe valuar, multiplicando la línea de su longitud, A*i* por el circuito de la base AM, ó bien IN, sino por el circuito de la seccion perpendicular *io*.

Porque el prisma oblicuo tiene la superficie compuesta de algunos paralelógramos oblicuos, y esto se hace cortando la porcion triangular *ion* de la parte superior, y añadiéndola de la parte de abajo, pues en este caso el prisma se convierte de oblicuo en recto, y su superficie por el número precedente se compone de la línea de su largo A*i*, multiplicada por el circuito de la seccion perpendicular *io*. Ya hemos dicho muchas veces que los cilindros se confunden con los prismas de infinitos lados.

Núm. 513. Luego la superficie del cilindro oblicuo es igual á la línea de la longitud AE (Fig. 215) multiplicada, no por el circuito de la base EN ó AM, sino por el circuito de la seccion perpendicular EO; lo que tambien se hará visible cortando la porcion superior EON para ponerla en el lugar inferior AIM.

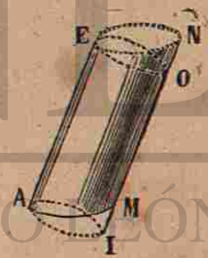


Fig. 216.

§ III.

De las superficies de las pirámides y conos enteros y truncados.

Dijimos al núm. 225 que los triángulos eran iguales á sus bases multiplicadas por la mitad de la altura, ó bien á las alturas multiplicadas por la mitad de la base.

Luego es preciso para medir las superficies de las pirámides compuestas de triángulos, como se manifiesta en B (Fig. 216), atender á sus bases y alturas.

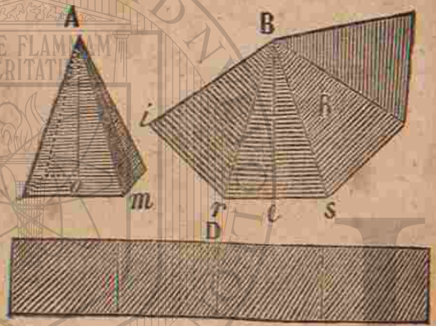


Fig. 216.

Adviértase no obstante que no es lo mismo la altura de una pirámide y la altura de los triángulos que componen su superficie, pues A*o*, altura de la pirámide, se toma en la perpendicular que va desde su vértice A hasta la base *o*, ó á continuacion de ella si la pirámide fuere inclinada; pero la altura de los triángulos es la línea A*m*, que va por la superficie abajo mas perpendicularmente á la línea del circuito de la base. Esta altura de los triángulos tambien se llama apotema.

Núm. 514. Luego la superficie de las pirámides recta y regular (compuesta de triángulos, como lo vemos en B) es igual al circuito de la base multi-

plicado por medio apotema, como se ve en D, ó á todo el apotema B*e* multiplicado por medio circuito de la base *irs*.

En la pirámide oblicua é irregular como los apotemas son diferentes no es tan facil la reduccion; pero se debe hacer separadamente la reduccion de cada triángulo.

Así como el cilindro se puede confundir con el prisma de infinitos lados, tambien el cono se puede confundir con la pirámide de infinitos lados. Y así la superficie verdadera del cono que se ve en M (Fig. 217) se puede considerar como si fuese una

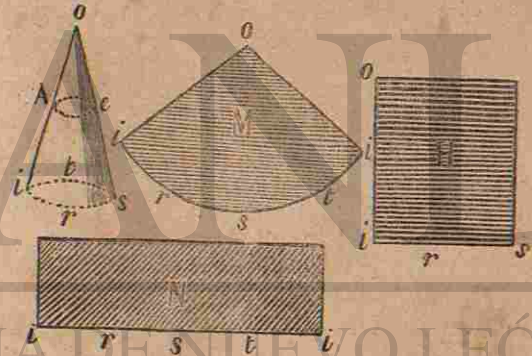


Fig. 217.

coleccion de triángulos de bases infinitamente pequeñas; pero que juntos igualasen el circuito de la base del cono, y tuviesen por altura su apotema *oi*.

Núm. 515. Luego la superficie del cono recto A (Fig. 217) es igual á un paralelógramo N, en el cual el circuito de la base *irst* se multiplica por medio apotema, ó al paralelógramo H, en que se multiplica medio circuito de la base por todo el apotema.

Núm. 516. La superficie de la pirámide truncada P (Fig. 218) se compone de muchos trapecios, los cuales juntos hacen la figura B; pero reduciendo los trapecios á paralelógramos (núm. 226), esto es, multiplicando su altura *ma* por las medias paralelas *no*, todos ellos hacen un paralelógramo M, cuya base es la media paralela de los trapecios, y cuya altura es el apotema.

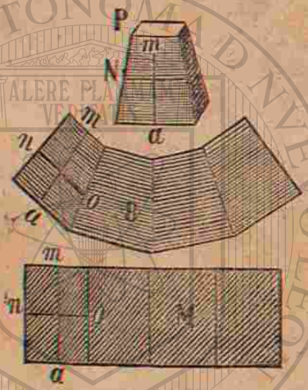


Fig. 218.

Núm. 517. Luego la superficie de una pirámide truncada P es igual á un paralelógramo M, cuya base es el circuito medio de la pirámide, y cuya altura sea todo el apotema.

Por la misma razon que confundimos el cono entero con la pirámide, debemos reputar el cono truncado por una pirámide truncada tambien y de infinitas caras.

Núm. 518. Luego la superficie del cono truncado E (Fig. 219) es igual al paralelógramo H, en el cual la base es el circuito medio del cono *ai*, y la altura todo su apotema *mn*.

Núm. 519. Si al cono entero le quitamos, aunque sea un solo punto del vértice, quedará truncado, y entonces no merece atencion la diferencia que solo procede de un punto. En este caso se puede reputar el uno como el otro, y discurrir de la superficie del uno como de la del otro, y así reducir la superficie del cono entero (Fig. 218) á un paralelógramo, cuya base sea el medio circuito A*e*, y su altura todo el apotema, como se ve en H.

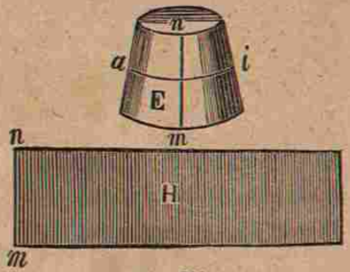


Fig. 219.

§ IV.

De la superficie de la esfera, y de los segmentos de esta.

Núm. 520. Así como podemos considerar un círculo como un polígono de infinitos lados, así tambien podemos confundir la esfera formada por un círculo, que da vuelta alrededor de su eje, como una esferoide formada por un polígono, que anda alrededor de su mismo diámetro (Fig. 220).

Por consiguiente para medir la superficie de la esfera bastará medir la superficie de la esferoide poligónica ó poliedro esferoide, no obstante que esta medio apotema, ó al paralelógramo H, en que se multiplica medio circuito de la base por todo el apotema.

Núm. 516. La superficie de la pirámide truncada P (Fig. 218) se compone de muchos trapecios, los cualesjuntos hacen la figura B; pero reduciendo los trapecios á paralelógramos (núm. 226), esto es, multiplicando su altura *ma* por las medias paralelas *no*, todos ellos hacen un paralelógramo M, cuya base es la media paralela de los trapecios, y cuya altura es el apotema.

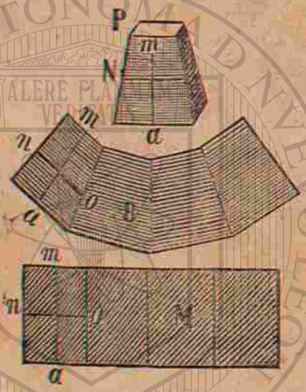


Fig. 218.

Núm. 517. Luego la superficie de una pirámide truncada P es igual á un paralelógramo M, cuya base es el circuito medio de la pirámide, y cuya altura sea todo el apotema.

Por la misma razon que confundimos el cono entero con la pirámide, debemos reputar el cono truncado por una pirámide truncada tambien y de infinitas caras.

Núm. 518. Luego la superficie del cono truncado E (Fig. 219) es igual al paralelógramo H, en el cual la base es el circuito medio del cono *ai*, y la altura todo su apotema *mn*.

Núm. 519. Si al cono entero le quitamos, aunque sea un solo punto del vértice, quedará truncado, y entonces no merece atencion la diferencia que solo procede de un punto. En este caso se puede reputar el uno como el otro, y discurrir de la superficie del uno como de la del otro, y así reducir la superficie del cono entero (Fig. 218) á un paralelógramo, cuya base sea el medio circuito A*e*, y su altura todo el apotema, como se ve en H.

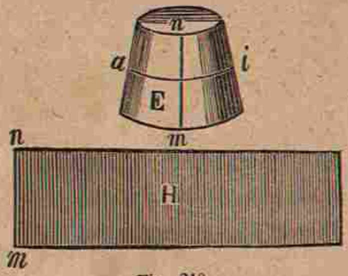


Fig. 219.

§ IV.

De la superficie de la esfera, y de los segmentos de esta.

Núm. 520. Así como podemos considerar un círculo como un polígono de infinitos lados, así tambien podemos confundir la esfera formada por un círculo, que da vuelta alrededor de su eje, como una esferoide formada por un polígono, que anda alrededor de su mismo diámetro (Fig. 220).

Por consiguiente para medir la superficie de la esfera bastará medir la superficie de la esferoide poligónica ó poliedro esferoide, no obstante que esta es de pocas caras, por cuanto esa misma doctrina se aplica á la de infinitas caras, y de esta se pasa á la esfera.

Para medir, pues, la superficie de esta esferoide haremos lo siguiente.

I.

Dividamos la esferoide (Fig. 220) en conos truncados, cortándola por las secciones *e*, *r*, *s*, *t*, etc.

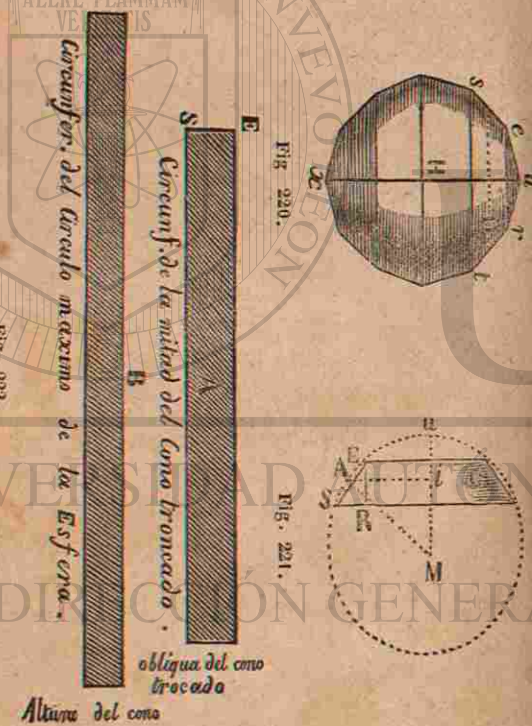


Fig. 220.

Fig. 221.

Fig. 222.

Ahora bien, supuesto lo dicho en el párrafo pre-

cedente podemos reducir la superficie de cada uno de estos conos truncados *s e* (Fig. 220), ó SE (Fig. 221) á un paralelógramo A (Fig. 222), en que la circular media sea la base, y los apotemos sean las alturas (núm. 518).

Mas como cada cono tiene su particular media circular y su especial apotema, es preciso que se procure reducir todas estas líneas á otras que sean de menos confusion; y para esto

II.

Tomemos uno de estos conos truncados *e*, *r*, *s*, *t*, que componen la esferoide, y pongámosle aparte (Fig. 221). Tírese una media paralela por la superficie de él, la que hará una circular, que debe tener su radio A*i*, que sale de M*u* eje del cono, y llega hasta A.

III.

Tírese desde el mismo punto A una línea hasta M, centro de la esferoide que se supone, y con la parte del eje M*i* completemos un triángulo de puntitos MA*i*.

IV.

Del punto E, en que termina el apotema del cono SE, bajaremos una perpendicular ER sobre su base.

V.

Dispuesto todo así tenemos dos triángulos, uno mayor MA*i*, otro menor SER.

Para probar, pues, que son semejantes, basta probar que los lados del uno son perpendiculares á los lados del otro, por cuanto la línea MA, que pasa por el centro y por medio de la cuerda SE, le es perpendicular (núm. 52). Y ademas de esto ER corta perpendicularmente á A*i*, porque es perpendicular sobre la base del cono, paralela de A*i*: y últimamente SR continuada va á cortar perpendicularmente á M*i* por ser parte del eje. Luego los dos triángulos son semejantes (núm. 178), y sus lados respectivos proporcionales; y así podemos decir : MA á A*i*, como SE á ER.

Pero sabemos que la circunferencia del radio A*i* será á la circunferencia del radio AM, como los dos radios son entre sí (núm. 205); por consiguiente en lugar de los dos radios podemos poner las dos circunferencias sin perder la proporcion, y así la circunferencia de MA es á la circunferencia de A*i*, como SE á ER, y podremos decir : circ. MA es á la circ. A*i*, como SE es á ER.

Luego multiplicando el primer término por el último tendremos el mismo producto que multiplicando el segundo por el tercero (número 141); y así la circunferencia MA multiplicada por ER, igual á la circunferencia A*i*, multiplicada por SE. Pero la circunferencia MA se diferencia de la circunferencia del círculo máximo de la esfera á proporcion que la línea MA, que hallamos en la esferoide, se diferencia del radio de la esferoide : por tanto, considerando la esferoide compuesta de infinitos conos truncados, ó como polígono general de infinitos lados, podremos confundir la esferoide con la esfera, y la línea MA con el radio de la esfera, la cuerda SE con el arco SE, y la circunferencia de MA será lo mismo que la circunferencia del círculo máximo de la esfera; y podremos decir por consiguiente :

La circunferencia del círculo máximo de la esfera, multiplicada por la línea ER, es igual á la circunferencia de A*i* multiplicada por SE, y el paralelógramo A (Fig. 222) es igual á B.

Para hacer esto visible, pongamos B, cuya base es la circunferencia del círculo máximo de la esfera, y su altura la altura del cono, y tambien el paralelógramo A, cuya base es la circunferencia de A*i*, su altura la línea SE.

Núm. 521. Luego si la superficie del cono es igual al paralelógramo A, tambien lo es al paralelógramo B.

Por la misma razon, todos los demas conos truncados de que se compone la esferoide tendrán la superficie igual á los paralelógramos que tengan por base la circunferencia del círculo máximo de la esfera, y por altura las alturas de los conos.

Núm. 522. Luego la superficie de la esferoide de muchos lados ó poliedra es igual á un paralelógramo que tenga por base la circunferencia del círculo máximo, y por altura todas las alturas de los conos, ó el diámetro de la esferoide.

Mas como podemos confundir esta esferoide con la esfera se podrá decir.

Núm. 523. Luego la superficie de la esfera A (Fig. 223) es igual á un paralelógramo B, en el cual la circunferencia del círculo máximo de la esfera es la base, y el diámetro la altura.

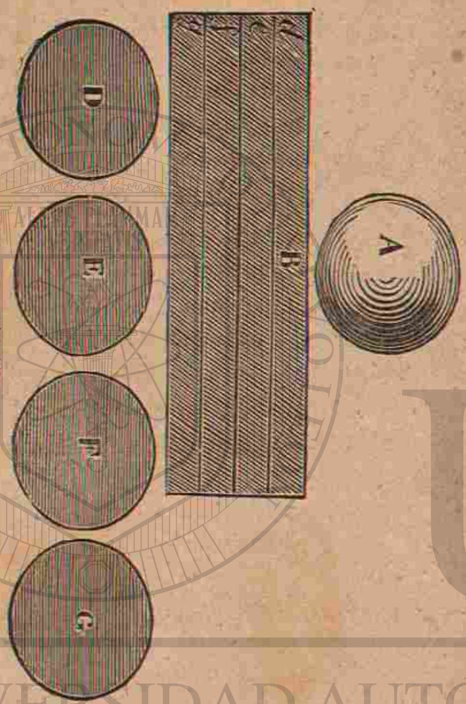


Fig. 223.

De estas verdades se deducen varias consecuencias.

I.

Núm. 524. Divídase este paralelógramo en cuatro paralelógramos iguales *d*, *e*, *f*, *g*, cada uno de ellos será igual á un círculo máximo de la esfera (núm. 252), por tener por base la circunferencia y por al-

tura el medio radio. Luego todo el paralelógramo B es igual á cuatro círculos máximos D, E, F, G.

Luego la superficie de la esfera A es igual á la de cuatro círculos máximos.

II.

Núm. 525. Como los cuatro círculos máximos son iguales á uno que tenga el diámetro duplo (núm. 264), se sigue (Fig. 224) : luego la superficie de la

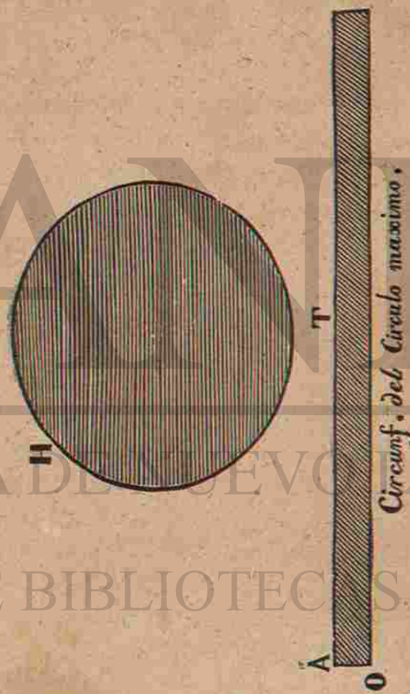


Fig. 224.

esfera A es igual á un círculo H que tenga por radio el diámetro de ella.

III.

Núm. 526. Luego (Fig. 225) la superficie convexa de una media esfera es dupla de su superficie plana; porque la superficie convexa de la media esfera vale dos círculos máximos, y la superficie plana solamente es uno.

Fig. 225.

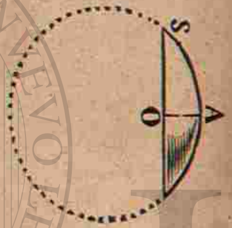


Fig. 227.

Fig. 226.

IV.

Cualquier segmento de la esfera se puede conside-

rar compuesto de varios conos truncados unos sobre otros, como se dijo de la esferoide, cuyas superficies juntas son iguales á un paralelógramo, que tenga por base la circunferencia del círculo máximo de la esfera, y por altura la flecha AO (Fig. 226), ó la altura del segmento.

Núm. 527. Luego la superficie del segmento S es igual á un paralelógramo T, cuya base sea la circunferencia del círculo máximo de la esfera, y su altura la flecha.

V.

Ya dijimos que la superficie del cilindro circunscrito E (227) era igual á un paralelógramo B, cuya base fuese la circunferencia del cilindro ó la de la esfera, que es la misma, y cuya altura fuese la del cilindro ó el diámetro de la esfera (núm. 511).

Luego el mismo paralelógramo B, hecho por la circunferencia del círculo máximo de la esfera y su diámetro, medirá la superficie de la esfera A, y la del cilindro circunscrito E; y así podemos decir.

Núm. 528. Luego la superficie del cilindro circunscrito es igual á la de la esfera (Fig. 227), y por consiguiente será igual á cuatro círculos máximos.

Ya se dijo arriba de la superficie de los prismas y cilindros, que solo se atendia á la superficie que los rodea, prescindiendo de las dos bases superior é inferior. Por consiguiente si contamos la superficie total del cilindro circunscrito será igual á seis círculos máximos, siendo la superficie de la esfera igual á cuatro solamente.

§ V.

De la solidez ó valor de los prismas y de los cilindros.

Núm. 529. Toda medida, amigo Eugenio, es una repeticion ó multiplicacion de la unidad primitiva, y debe ser del mismo género que la cantidad que por ella se ha de medir ó valuar; y así si queremos medir líneas, esto es, distancias ó longitudes, la unidad debe ser línea ó distancia pura, como palmo, vara ó legua; pero si queremos medir superficies ó areas, la medida debe ser superficie, v. g. palmo cuadrado, vara cuadrada ó cosa semejante; por último, debe significar superficie ó espacio.

Finalmente, si queremos valuar sólido ó volumen, esto es, cosa que tenga las tres dimensiones de longitud, latitud y profundidad ó altura, la unidad debe ser tambien un sólido que las tenga, v. g. palmo cúbico, pulgada cúbica ó cosa semejante.

Núm. 530. Ademas de esto dijimos en la multiplicacion de una línea por otra para valuar las superficies, que la línea movil no se consideraba como línea matemática sin cuerpo, sino como una serie de partes ó unidades cuadradas, que se multiplicaban por el número de unidades que se consideran en la línea directriz. Así tambien cuando se quiere valuar el volumen de los sólidos no se ha de considerar la base movil como una superficie matemática sin grueso alguno, sino como una cantidad de

unidades sólidas, que puestas unas al lado de otras ocupan la base; y esta coleccion de unidades, que forman el primer orden de ellas, se debe multiplicar por el número de unidades que se consideran en la altura, haciendo de estas varias órdenes, como que todas llenan el espacio del sólido.

En esta suposicion para medir el volumen de cualquier sólido debemos valuar primero su base, y despues multiplicarla por el valor de la altura, lo que dará el valor del prisma.

Pongamos por ejemplo la (Fig. 228). El sólido A tiene en la anchura cuatro veces la de B. que le sirve de medida: tiene de profundo dos veces el sólido B; luego multiplicando 4 por 2 tenemos que la base de A está compuesta de ocho veces B; pero A tiene triple altura de B, y así es preciso repetir tres veces las ocho medidas B que se hallan en la primera orden de A; y así para formar el volumen de A son precisos 24 volúmenes de B.

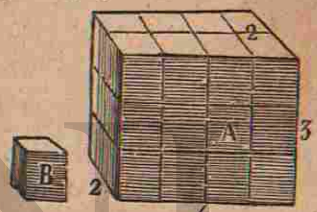


Fig. 228.

Núm. 531. Luego para valuar cualquier prisma recto, cuya base sea un paralelógramo recto, bastará multiplicar las tres dimensiones, longitud, latitud y profundidad; porque multiplicando la longitud por la latitud tenemos la base, y despues multiplicando la base por la profundidad tenemos el volumen; luego multiplicando las tres dimensiones sabremos el valor del sólido.

Advierto que podemos considerar cualquier lado del prisma como si fuese base, colocándole sobre él; y así podemos variar el modo de multiplicar estas tres dimensiones, y siempre tendremos el mismo producto 24, porque podemos decir como arriba,

$4\times2=8,\ \times3=24$;

ó de este modo: $4\times3=12,\ \times2=24$,

ó tambien $3\times2=6,\ \times4=24$;

y lee de este modo: 4 multiplicado por 2 es igual á 8, y este 8 multiplicado todavía por 3 es igual á 24.

Asimismo advierto que si la base del prisma fuere paralelógramo oblicuángulo no se debe multiplicar el un lado de esta por el otro para valuar la base, sino un lado por su perpendicular, como dijimos al núm. 221, reduciéndole á rectángulo, y despues este paralelógramo reducido á rectángulo multiplíquese por la altura perpendicular.

Núm. 332. Luego si la base de uno ó de muchos prismas fuere igual á la del otro, y su altura la misma, el valor será el mismo.

Dijimos que el triángulo tenia la mitad del valor de su paralelógramo (núm. 216); luego cuando quisiéremos valuar la base de un prisma triangular (Fig. 229) bastará contar con la base del prisma G, que sea un paralelipípedo, y contar solamente la mitad de la base para multiplicarla por su altura.

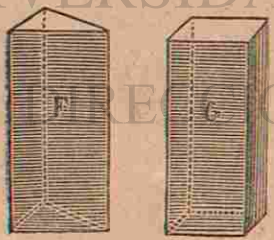


Fig. 229.

Núm. 333. Luego el

valor del prisma triangular F es la mitad del valor de su paralelipípedo correspondiente G.

Los polígonos dijimos que se podian dividir en triángulos; por consiguiente los prismas multiláteros, divididas sus bases en triángulos, y continuadas estas divisiones desde una hasta otra base, quedarán divididos en prismas triangulares; por consiguiente podemos decir de los unos lo que acabamos de decir de los otros.

Núm. 334. Luego para valuar los prismas multiláteros hemos de multiplicar el valor de sus bases por su altura perpendicular.

Hemos dicho muchas veces que el círculo se puede confundir con el polígono, considerándole como uno de infinitos lados; de lo que se infiere que podemos confundir el cilindro con un prisma de una infinidad de lados, y proceder en la valuacion del cilindro como en el valor de los prismas.

Núm. 335. Luego valuada la base del cilindro y multiplicada por la altura tenemos su valor.

Núm. 336. Luego si las bases de muchos cilindros fueren iguales á la de uno solo, y la altura fuere la misma, el valor será el mismo.

Núm. 337. Luego si la base de uno ó muchos cilindros fuere igual á la de uno ó muchos prismas, y la altura la misma, el valor ha de ser el mismo.

§ VI.

De la comparacion de los prismas y cilindros rectos con los oblicuos

Dijimos que el paralelógramo rectángulo era igual al oblicuángulo cuando los dos tenian la misma base y la misma altura (núm. 220). Ahora para saber si tambien el prisma recto y el oblicuo son iguales cuando tienen la misma base y altura conviene hacer lo siguiente (Fig. 250).

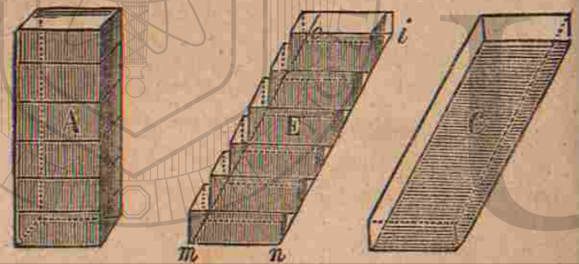


Fig. 250.

I.

Pongamos un paralelipípedo recto A, cuya base sea un rectángulo, y divídase la altura en partes iguales por secciones paralelas á la base.

II.

Pónganse estas partes unas sobre otras, no á plomo, sino en la forma que se representan en E.

III.

Tírense dos líneas desde las estremidades de la base *mn* hasta *oi*, y córtense segun la linea *mo* todos los prismas triangulares que hay desde *m* hasta *o* para ponerlos por la otra parte desde *n* hasta *i*, como hicimos hablando de los paralelógramos (núm. 219) (Fig. 157), y veremos que los claros desde *n* hasta *i* se llenarán por la razon que allí dimos; y de este modo el cuerpo E se muda en el paralelipípedo oblicuo C.

Núm. 538. Luego los paralelipipedos AC de la misma base y altura tienen el mismo valor, aunque el uno sea recto y el otro oblicuo.

Pero los prismas que tuvieren por base paralelógramos oblicuos se pueden reducir á rectos, y por consiguiente daremos de ellos la misma doctrina.

Pero dividiendo los paralelipípedos recto y oblicuo, segun las diagonales tiradas en sus dos bases, quedarán prismas triangulares, que serán entre sí como los paralelipípedos.

Núm. 539. Luego los prismas triangulares recto y oblicuo de la misma base y altura son iguales.

Pero en los dos prismas triangulares juntos entre sí hallamos toda la cualidad de prismas, y por consiguiente diremos de los prismas de muchos lados y compuestos lo que dijimos de los triangulares y simples.

Núm. 540. Luego todos los prismas que tuvieren la misma base y altura serán iguales.

Así como podemos confundir un círculo con un polígono de infinitos lados, así tambien podemos confundir un cilindro con un prisma multilátero de infinitos lados, y decir del cilindro lo que se dice del prisma.

Núm. 541. Luego el cilindro recto y el oblicuo de igual base y altura son iguales (Fig. 251).

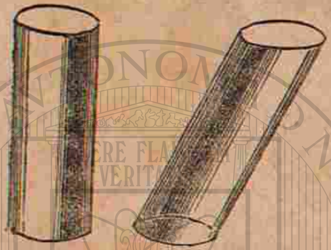


Fig. 251.

Adviértase que no es lo mismo un cilindro oblicuo que un cilindro inclinado, porque cilindro inclinado es aquel que salió de su plomo, en el cual toda seccion que sea perpendicular á su longitud es un círculo; mas el cilindro oblicuo es un sólido, cuya base es un círculo que va subiendo siempre paralelo á sí mismo, pero siempre siguiendo una línea directriz inclinada á la base; y así para ser circular la seccion en el cilindro oblicuo debe ser paralela á la base, porque si fuere perpendicular á la longitud entonces será oval ó elíptica.

§ VII.

De la comparacion de las pirámides y conos rectos con los oblicuos.

En cuanto á las pirámides podemos considerar primero (Fig. 252) un sólido piramidal A, compuesto de varios prismas de igual altura y de bases semejantes, cuyos lados homólogos van disminuyendo

en progresion aritmética, y se ponen á plomo unos sobre otros.

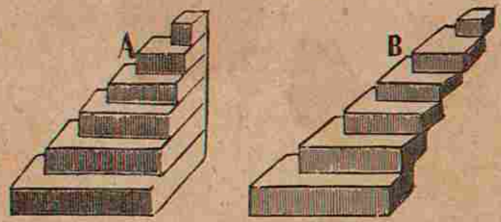


Fig. 252.

Consideremos ahora que vamos sucesivamente apartando hácia un lado estos mismos prismas ú otros iguales, huyendo siempre del plomo, como en B, y siguiendo una línea directriz inclinada á la base. En este caso es evidente que en A y en B no solo son iguales la base y la altura, sino que tambien lo es el valor.

Ahora bien, podemos con la consideracion aumentar cuanto se quiera el número de los prismas, y disminuir la altura de cada uno de ellos; y cuanto mas se disminuya esta, mas se llegarán estos sólidos á las pirámides que imitan; siendo siempre verdad que cuando la base y altura son iguales serán compuestas de los mismos ó iguales prismas, bien que puestos de diferente modo, y por consiguiente que es igual el valor de los sólidos: de este modo podemos confundir estos sólidos piramidales con las pirámides, y decir de ellas lo que acabamos de decir, que siendo la base igual é igual la altura el valor será igual.

Núm. 542. Luego las pirámides que tienen la base confundir un cilindro con un prisma multilátero de infinitos lados, y decir del cilindro lo que se dice del prisma.

Núm. 541. Luego el cilindro recto y el oblicuo de igual base y altura son iguales (Fig. 251).

Fig. 251.

Adviértase que no es lo mismo un cilindro oblicuo que un cilindro inclinado, porque cilindro inclinado es aquel que salió de su plomo, en el cual toda seccion que sea perpendicular á su longitud es un círculo; mas el cilindro oblicuo es un sólido, cuya base es un círculo que va subiendo siempre paralelo á sí mismo, pero siempre siguiendo una línea directriz inclinada á la base; y así para ser circular la seccion en el cilindro oblicuo debe ser paralela á la base, porque si fuere perpendicular á la longitud entonces será oval ó elíptica.

§ VII.

De la comparacion de las pirámides y conos rectos con los oblicuos.

En cuanto á las pirámides podemos considerar primero (Fig. 252) un sólido piramidal A, compuesto de varios prismas de igual altura y de bases semejantes, cuyos lados homólogos van disminuyendo

en progresion aritmética, y se ponen á plomo unos sobre otros.

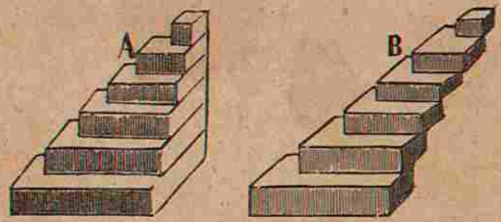


Fig. 252.

Consideremos ahora que vamos sucesivamente apartando hácia un lado estos mismos prismas ú otros iguales, huyendo siempre del plomo, como en B, y siguiendo una línea directriz inclinada á la base. En este caso es evidente que en A y en B no solo son iguales la base y la altura, sino que tambien lo es el valor.

Ahora bien, podemos con la consideracion aumentar cuanto se quiera el número de los prismas, y disminuir la altura de cada uno de ellos; y cuanto mas se disminuya esta, mas se llegarán estos sólidos á las pirámides que imitan; siendo siempre verdad que cuando la base y altura son iguales serán compuestas de los mismos ó iguales prismas, bien que puestos de diferente modo, y por consiguiente que es igual el valor de los sólidos: de este modo podemos confundir estos sólidos piramidales con las pirámides, y decir de ellas lo que acabamos de decir, que siendo la base igual é igual la altura el valor será igual.

Núm. 542. Luego las pirámides que tienen la base y la altura iguales son iguales en el valor (Fig. 233).

Los conos se pueden comparar á las pirámides de infinitos lados.

Núm. 543. Luego los conos de la misma base y altura son iguales (Fig. 234).

Si una pirámide se dividiera desde el vértice hasta la base, en lugar de una tendriamos muchas, y todas juntas igualarian el valor de la total.

Núm. 544. Luego cuando las bases de muchas pirámides fuesen iguales á la de una sola, y la altura fuese la misma, el valor seria el mismo.

Núm. 545. Luego cuando las bases de muchos conos fuesen iguales á la de uno solo, siendo la altura la misma seria el mismo el valor por la misma razon.

§ VIII.

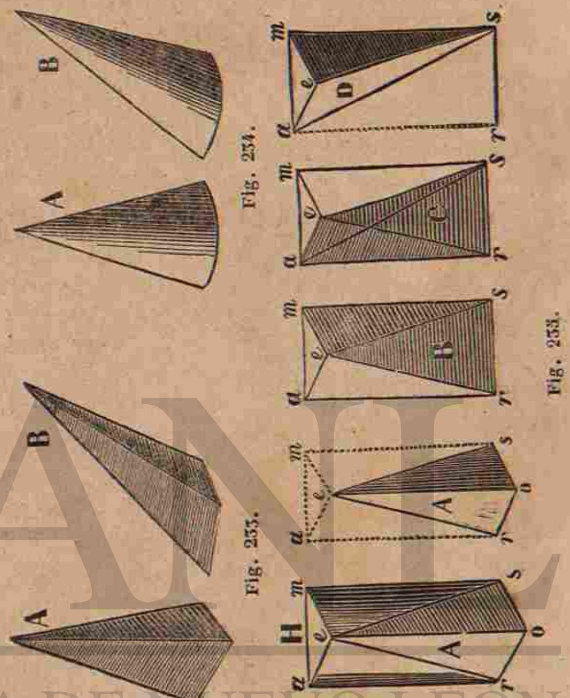
Modo de conocer el valor de las pirámides y de los conos.

Para conocer, amigo Eugenio, el valor de los triángulos dijimos que bastaba conocer el paralelógramo que les correspondia, y del cual el triángulo es solamente la mitad. Pero no sucede asi en las pirámides respecto de los prismas, para conocer el valor de la solidez de ellas haremos lo siguiente (Fig. 235).

I.

Tomemos un prisma triangular recto H, y del ángulo *e* tiremos dos diagonales por los dos lados

er, *es*, y cortemos el prisma siguiendo esas líneas; de este modo queda separada la pirámide A, cuyo



vértice está en *e*, y la base es la misma del *ros*, siendo su altura *eo*, que es tambien la del prisma.

II.

Separemos esta pirámide A, queda el prisma antiguo mutilado; y hace la figura que vemos en B: entonces podemos arrojar sobre la mesa este cuerpo B, de forma que el paralelógramo *arms* sea la base de cuatro lados, y el punto *e* sea el vértice de una pirámide de cuatro lados.

III.

Tírese en la base de esta pirámide B una diagonal *as*, y desde el vértice *e* dividamos la pirámide de cuatro lados en dos triangulares, siguiendo la direccion de la diagonal, y tendremos las pirámides C y D.

Estas dos pirámides tienen las bases iguales entre sí, porque cada una de ellas es mitad del paralelógramo *amrs*, y ambas hacian la base de la pirámide B, y el vértice es comun por ser el punto *e*; luego las dos pirámides CD tienen igual la base y la misma altura, por consiguiente son iguales por el núm. 542.

Pero la pirámide D necesariamente es igual á la pirámide A, porque una tiene por base el plano ó base inferior del prisma *ros*, y la otra si la volvieren puede tener por base el plano superior del prisma *aem* igual al inferior.

Ademas de esto la pirámide A tiene por altura la esquina del prisma *eo*, y la pirámide D tiene por altura la otra esquina igual del prisma *ms*; y así si la base es la misma y la altura tambien, las pirámides AD son iguales por el núm. 542; y como ya sabemos que la pirámide D era igual á C, se sigue que las tres pirámides ACD en que el prisma triangular recto se dividió son iguales.

Núm. 546. Luego el prisma triangular recto tiene el valor de tres pirámides que tengan la misma base y altura que él.

Pero todo prisma que no fuere recto se puede reducir á uno que lo sea, y tenga la misma base y altura, como tambien las pirámides; por consiguiente podremos decir de todos los prismas triangulares oblicuos lo que dijimos de los rectos.

Núm. 547. Luego toda la pirámide triangular B (Fig. 256) solo vale el tercio del prisma A que tenga la misma base y altura.

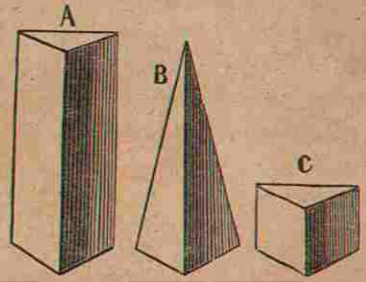


Fig. 256.

Núm. 548. Luego toda la pirámide triangular es igual á un prisma C de la misma base y de la tercera parte de su altura (Fig. 256).

El cubo (Fig. 257) es un prisma, cuya division en pirámides tiene una propiedad singular, porque se divide en tres pirámides iguales y semejantes, lo que no sucede en ninguna otra especie de prismas.

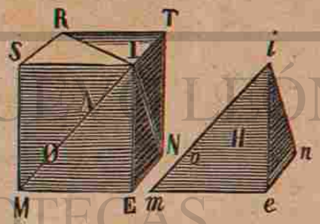


Fig. 257.

El cubo tiene seis lados: tres se representan en la estampa, y los otros tres opuestos que no se ven se suponen: uno que es la base M, O, N, E, otro es el lado posterior R, T, O, N, otro es la cara del lado S, R, M, O.

En los tres lados que se ven tiremos tres diagonales desde el mismo ángulo I, que son IR, IM, IN, y del mismo ángulo I tiremos otra diagonal que pase por el centro del cubo y vaya á parar al ángulo opuesto O : si por estas diagonales se hiciere la division tendremos una pirámide cuadrilátera H, cuyo vértice caerá al ángulo de las diagonales I, y cuya base es la base del cubo *m, o, n, e*, esta es la primera pirámide.

Tenemos otra cuya base es el lado posterior R, T, O, N, y cuyo vértice viene á estar en el ángulo de las diagonales I.

La tercera pirámide tiene por base la cara lateral S, R, M, O, que no se ve, y el vértice está en el ángulo de las diagonales I.

Ahora, pues, como todos los lados en el cubo son iguales y semejantes, y todos los ángulos iguales, se sigue que todas estas pirámides tienen base igual y semejante como tambien la misma altura, por consiguiente todas son iguales y semejantes.

Núm. 549. Luego el cubo se divide en tres pirámides iguales y semejantes, cada una de la misma base y altura del cubo, y cada pirámide, aunque de la misma base y altura del cubo, solo es la tercera parte de él.

Para examinar qué proporcion tiene un prisma multilátero con la pirámide de la misma base y altura (Fig. 258), dividamos así el prisma multilátero, como tambien su pirámide de la misma base y altura, en prismas triangulares y en pirámides triangulares. Esto hecho cada pirámide será el tercio de su prisma por el núm. 547. Luego la suma de las pirámides ó la pirámide total B será el tercio de la suma de los prismas, esto es, será el tercio el prisma total A.

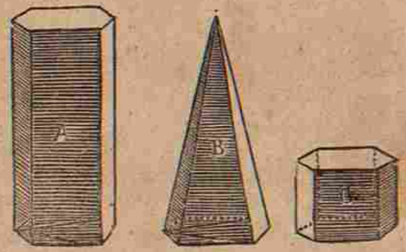


Fig. 258.

Núm. 550. Luego la pirámide multilátera B es igual á un prisma C (Fig. 258) de la misma base, y de la tercera parte de altura.

Supuesto lo que hemos dicho acerca de poder confundir el cilindro con un prisma de infinitos lados, y el cono con la pirámide correspondiente, podemos inferir :

Núm. 551. Luego el cilindro A vale tres conos B de la misma base y altura del cilindro (Fig. 259).

Núm. 552. Luego el cono B vale un cilindro C de la misma base, y de la tercera parte de la altura del cono.

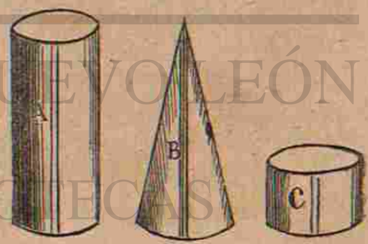


Fig. 259.

§ IX.

Del valor de la pirámide y cono truncado.

Núm. 353. Como la pirámide truncada A (Fig. 240) es una pirámide entera, menos la pequeña pirámide *e*, para conocer el valor de la truncada es preciso valuar la total, y despues valuar la pequeña imaginaria *e* para descontarla de la total, y el resto será el valor de la pirámide truncada.

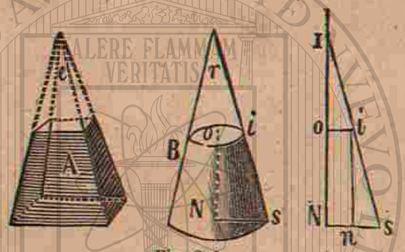


Fig. 240.

Del mismo modo como el cono truncado B es un cono entero, menos la parte que se supone cortada *r* (Fig. 240), valuado el total y descontado el cono imaginario *r*, el resto será el valor del cono truncado B.

Núm. 354. La dificultad está en conocer por el cono truncado cual seria la altura del cono si estuviese entero, para lo que haremos lo siguiente, y es una operacion que se puede aplicar á la pirámide.

I.

Tírese una línea indefinida NI (Fig. 240).

II.

Señálese en esta línea la altura del cono truncado *io*.

III.

Póngase en N el radio de la base inferior del cono N*s*, y en *o* el radio de la base superior *oi*, siendo ambas líneas perpendiculares á NI.

IV.

Bajemos de *i* una paralela á N*o*.

V.

Tiremos por las dos estremidades de los radios *is* una oblicua, que irá á cortar la indefinida en I.

Esto hecho, las dos paralelas *o*N, *in* hacen que sean semejantes los dos triángulos *nis*, NI*s*; y así *ns* á N*s* como *ni* á NI.

Esto es, la pequeña base es á la grande como la pequeña altura es respecto de la grande. En esta proporcion, los tres primeros términos son conocidos, porque *ns* es el esceso del radio de la base inferior N*s* sobre el radio superior *oi*. Tambien es conocida la línea N*s* radio inferior. Tambien es conocida *ni* altura del cono: luego hallamos NI altura del cono total, y así será tambien conocida la línea *o*I, altura del cono imaginario *r*, el cual si fuese verdadero seria complemento del total.

Núm. 355. Luego dado cualquier cono truncado, en conociendo los radios de la base inferior y superior, y la altura del cono truncado, haremos esta proporcion.

Núm. 556. La diferencia de los radios es, respecto del radio grande, como la altura del cono truncado es á la altura del entero.

§ X.

Del valor de la esfera.

Núm. 557. Consideremos la esfera dividida muchas veces, mas siempre por el centro, y quedarán muchas pirámides, cuyas bases juntas hacen la superficie de la esfera, cuyo vértice será el centro, y la altura será el radio de esta misma esfera (Fig. 241).

Fig. 241.

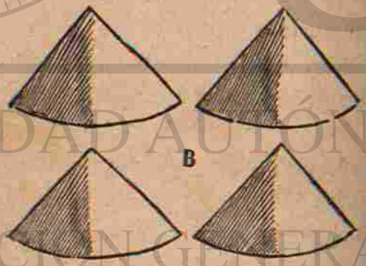


Fig. 242.

De este modo la esfera A es una coleccion de estas pirámides unidas por sus lados.

Pero como la superficie de la esfera A es igual á

cuatro círculos máximos por el número 525, si en lugar de esta coleccion de pirámides que componen la esfera ponemos cuatro conos (Fig. 242), cada uno de los cuales tenga por base un círculo máximo, y por altura el radio de la esfera, el valor de estos cuatro conos será igual al de la coleccion de pirámides que dijimos (núm. 543) ó al de la esfera.

Estos conos B son iguales á cuatro cilindros D (Fig. 243) de la misma base, y de la tercera parte de la altura de los conos (núm. 552). Por consiguiente tambien la esfera será igual á cuatro cilindros D, siendo la base de cada uno un círculo máximo, y la altura un tercio del radio; pero estos cuatro cilindros D puestos unos sobre otros hacen un cilindro E, cuya base es un círculo máximo, y cuya altura es la de los cuatro juntos, esto es, cuatro tercios de radio ó dos tercios de diámetro.

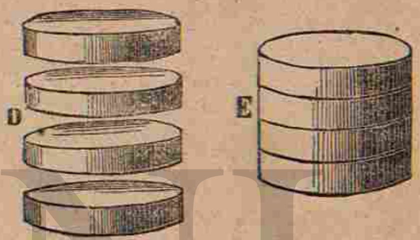


Fig. 243.

Núm. 558. Luego la esfera tambien es igual á un cilindro E (Fig. 243), cuya base sea un círculo máximo, y cuya altura sea cuatro tercios de radio ó dos tercios de diámetro.

Pero los cuatro cilindros D de la (Fig. 243) tienen la misma base que uno solo (Fig. 244), cuya base sea un círculo que tenga por radio el diámetro de la esfera y la altura misma de un tercio de radio.

Núm. 359. Luego la solidez de la esfera A tambien es igual á un cilindro F, cuyo radio sea el diámetro de la esfera, y su altura un tercio del radio de esta.

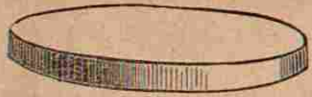


Fig. 244.

Tambien los cuatro conos B de la (Fig. 242) son iguales á uno solo G de la (Fig. 245), cuya altura sea el radio y cuya base sea un círculo que tenga por radio el diámetro de la esfera (núm. 260).

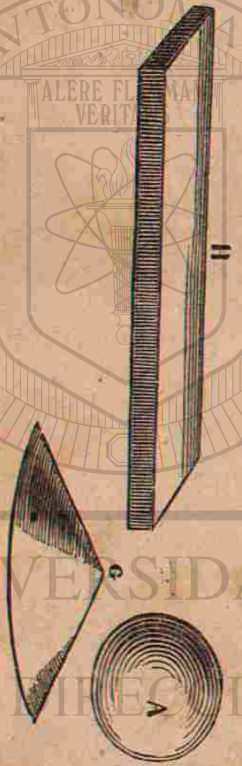


Fig. 245.

Núm. 360. Luego la esfera A (Fig. 245) tambien es igual á un cono G, cuya altura sea el radio, y cuya base sea el círculo formado por el diámetro como radio.

Como la superficie de la esfera es igual á un paralelógramo que tenga por altura el diámetro de la esfera, y por base la circunferencia de su círculo máximo por el núm. 325, dando á este paralelógramo H (Fig. 245) la misma altura que dimos á los cuatro cilindros D, esto es, un tercio del radio, será este

prisma igual á los cuatro cilindros D (Fig. 245), y por consiguiente á la esfera A.

Núm. 361. Luego la esfera A es igual á un prisma, cuya base sea un paralelógramo hecho por el diámetro de la esfera y por la circunferencia de su círculo máximo, y cuya altura sea un tercio del radio.

§ XI.

De la razon que tienen los sólidos entre sí.

Valuados los prismas, los cilindros, las pirámides, los conos y las esferas, conviene que sepamos la razon que estos cuerpos tienen entre sí: empecemos, pues, por los sólidos de la misma especie.

Dijimos en el núm. 155 que cuando una cantidad se multiplica por dos está en la misma razon que ellas tenian; y tambien dijimos al núm. 293 que en la formacion del prisma se multiplicaba la base por la altura; y así cuando la misma base se multiplicare por alturas diversas los prismas serán como las alturas.

Núm. 362. Luego los prismas de la misma base son entre sí como las alturas, y por esto (Fig. 246) los prismas AB estan en razon cuadrupla, porque esta es la razon de sus alturas.

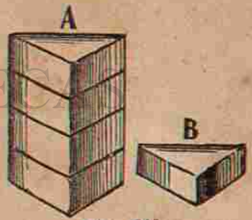


Fig. 246.

Tambien dijimos al núm. 152 que cuando dos cantidades se multiplicaban por una quedaban entre sí en la razon que antes tenian ; y así diversas bases multiplicadas por la misma altura se quedan entre sí como estaban antes.

Núm. 563. Luego los prismas de la misma altura son entre sí como las bases ; y de este modo (Fig. 247) AB, estan entre sí en razon triple, porque sus bases tienen entre sí esta razon.

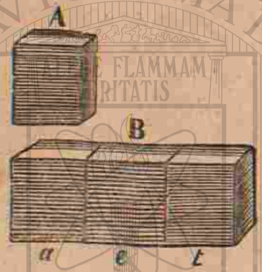


Fig. 247.

Núm. 564. Luego cuando la altura es diversa y tambien es diversa la base, los prismas estan entre sí en razon compuesta de la razon de las bases, multiplicada por la razon de las alturas (Fig. 248).

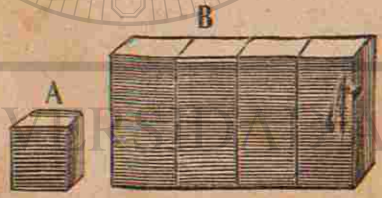


Fig. 248.

Por cuanto si la altura de A y B fuese la misma, y la base en B fuese cuadrupla de A, por solo esto B tendria cuatro veces el valor de A. Supongamos que ponemos encima de B otro cuerpo semejante B para que en él fuese dupla la altura de A ; esta segunda porcion superior B seria igual á la inferior, y por esto tendria en sí misma cuatro veces el valor de A : por

consiguiente el prisma total B tendria ocho veces el valor de A, que viene á ser lo mismo que la razon de cuatro de la base multiplicada por la razon segunda de la altura.

De esta regla general se sacan varias consecuencias :

I.

Como las partes proporcionales de varias cantidades estan entre sí en la misma razon que tienen las cantidades totales (núm. 154), y las pirámides son los tercios de sus prismas (núm. 546), inferimos :

Núm. 565. Luego las pirámides de la misma base (Fig. 249) estan entre sí como sus alturas ; y de este modo B es dupla de A, porque la altura tambien es dupla.

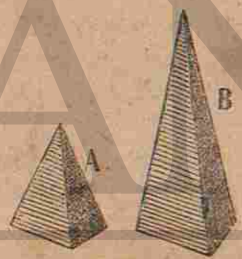


Fig. 249.

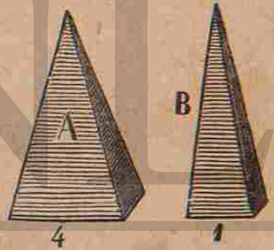


Fig. 250.

Núm. 566. Luego las pirámides de la misma altura estan entre sí como sus bases ; y así (Fig. 250) A:B::1:4, porque las bases estan en esa razon.

Núm. 567. Luego las pirámides de diferente base y altura estan entre sí en razon de sus bases multiplicada por la razon de las alturas (Fig. 251); y así

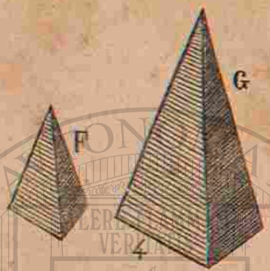


Fig. 251.

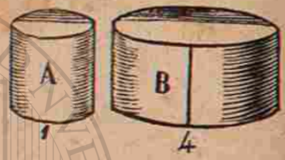


Fig. 252.

F:G::1:8, porque la razon de las alturas es 2 y la de las bases es 4: luego la razon de las pirámides es 8, ó 2×4.

II.

Ademas de esto como los cilindros se confunden con los prismas de infinitos lados, ó son como prismas de infinitos lados, podemos decir:

Núm. 568. Luego los cilindros de la misma altura estan entre sí como las bases (Fig. 252); y así A:B::1:4, porque las bases estan en esa razon.

Luego los cilindros de la misma base estan entre sí como sus alturas (Fig. 253); y así E:F::1:2, porque esta es la razon en que estan sus alturas.

Luego los cilindros de la base diversa y de diversa altura estan entre sí en la razon de las bases multiplicada por la de las alturas (Fig. 254): y así A:B::1:8, porque las bases son como 1:4, y las alturas

como 1:2; luego los cilindros son como 1:8, esto es, como 2×4.

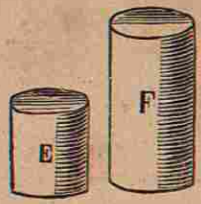


Fig. 253.

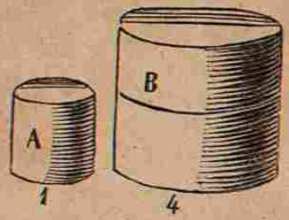


Fig. 254.

III.

Como los conos son los tercios de los cilindros debemos decir:

Núm. 569. Luego los conos de la misma altura estan entre sí como sus bases.

Luego los conos de la misma base estan entre sí como sus alturas.

Luego los conos de diferente base y diferente altura estan entre sí en la razon de las bases multiplicada por la de las alturas.

§ XII.

De la razon que tienen entre sí los sólidos semejantes.

Ya dijimos en su propio lugar que los sólidos se formaban por el movimiento de una superficie, y que de la diversidad de la superficie movil ó *generante* juntamente con la diversidad de la línea que y altura estan entre sí en razon de sus bases multiplicada por la razon de las alturas (Fig. 251); y así

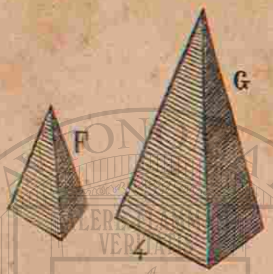


Fig. 251.

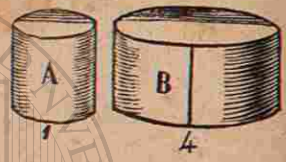


Fig. 252.

$F:G::1:8$, porque la razon de las alturas es 2 y la de las bases es 4: luego la razon de las pirámides es 8, ó 2×4.

II.

Ademas de esto como los cilindros se confunden con los prismas de infinitos lados, ó son como prismas de infinitos lados, podemos decir:

Núm. 568. Luego los cilindros de la misma altura estan entre sí como las bases (Fig. 252); y así $A:B::1:4$, porque las bases estan en esa razon.

Luego los cilindros de la misma base estan entre sí como sus alturas (Fig. 253); y así $E:F::1:2$, porque esta es la razon en que estan sus alturas.

Luego los cilindros de la base diversa y de diversa altura estan entre sí en la razon de las bases multiplicada por la de las alturas (Fig. 254): y así $A:B::1:8$, porque las bases son como $1:4$, y las alturas

como $1:2$; luego los cilindros son como $1:8$, esto es, como 2×4.

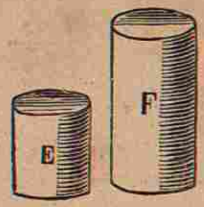


Fig. 253.

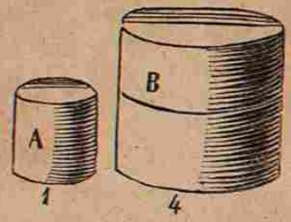


Fig. 254.

III.

Como los conos son los tercios de los cilindros debemos decir:

Núm. 569. Luego los conos de la misma altura estan entre sí como sus bases.

Luego los conos de la misma base estan entre sí como sus alturas.

Luego los conos de diferente base y diferente altura estan entre sí en la razon de las bases multiplicada por la de las alturas.

§ XII.

De la razon que tienen entre sí los sólidos semejantes.

Ya dijimos en su propio lugar que los sólidos se formaban por el movimiento de una superficie, y que de la diversidad de la superficie movil ó *generante* juntamente con la diversidad de la línea que dirije el movimiento, y se llama directriz, nacian las diferentes especies y calidades de sólidos.

Ahora decimos que cuando las superficies generantes son semejantes y semejante su movimiento, en tal forma que los ángulos sean iguales y todas las líneas en proporcion, los sólidos que de aquí resultan se llaman *sólidos semejantes*.

Se dijo que los paralelógramos, triángulos y demas figuras planas que se forman de ellos estaban en la razon compuesta de la razon de las bases, multiplicada por la razon de las alturas de la figura plana.

Pero los sólidos, como acabamos de decir, estan en razon compuesta de la razon de las superficies, que les sirven de base, multiplicada par la razon de las líneas que les miden su altura; y de este modo los sólidos estan entre sí en una razon compuesta de tres, esto es, de dos razones que hay en la base generante, y otra en las alturas del sólido.

Núm. 570. Luego la razon de los prismas entre sí es compuesta de tres razones, dos que hay en la superficie generante ó base del prisma, y una que hay en su altura.

Pero cuando las bases de los prismas son semejantes, las dos razones que hay en ellas son iguales; de forma que una razon multiplicada por otra es lo mismo que multiplicada por sí misma; y así el esponente de esta razon compuesta es un cuadrado de la razon simple (núm. 262).

Si los prismas son semejantes, la misma razon que hay entre cualesquiera lados correspondientes de la base la ha de haber tambien en las alturas; y por consiguiente cuando la base se multiplica por

la altura, para formar el prisma la razon de la base, que es un cuadrado de la razon simple de los lados, se multiplica de nuevo por esa razon simple ú otra igual, lo cual es una razon compuesta de tres razones semejantes.

Núm. 571. Luego los prismas semejantes estan entre sí en la razon compuesta de tres razones iguales.

Núm. 572. Luego el esponente de los prismas semejantes es el producto de la razon simple de cualquier lado, multiplicada por sí misma una vez para hacer un cuadrado, y multiplicada otra vez por la raiz para hacer un cubo.

Núm. 573. Luego los prismas semejantes estan entre si como los cubos de cualquiera de sus lados correspondientes.

Pero las pirámides son los tercios de los prismas por el núm. 546, y las partes proporcionales estan entre sí como sus todos por el núm. 454.

Núm. 574. Luego las pirámides semejantes estan entre sí como los cubos de sus lados.

Tambien dijimos que los cilindros se podian considerar como prismas de lados infinitos, y los conos como pirámides de una infinidad de lados.

Núm. 575. Luego los cilindros semejantes y los conos semejantes estan entre sí como los cubos de sus lados homólogos.

Ya hemos considerado la esfera como compuesta de infinitas pirámides que tienen el vértice en su centro.

Núm. 576. Luego las esferas son entre sí como los cubos de sus diámetros. De modo que si una esfera tiene el diámetro duplo de la otra, su valor es ocho veces mayor, porque $2 \times 2 \times 2 = 8$; y si el diámetro fuere triple, su valor es veinte y siete veces mayor, porque $3 \times 3 \times 3 = 27$; y lo mismo se dice de todos los otros sólidos semejantes.

§ XIII.

De la proporcion que se halla entre el valor de la esfera y el del cilindro, cubo y cono que tuviesen la misma altura y profundidad de la esfera.

Núm. 377. Llamamos cilindro circunscrito á la esfera á aquel que tiene por base un círculo máximo de la esfera, y por altura su diámetro (Fig. 255), y

Fig. 255.

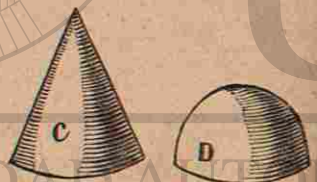


Fig. 256.

por consiguiente toca á la esfera por el punto superior, por el inferior y por el circuito.

Acabamos de decir en el núm. 358 que la esfera A es igual al cilindro que tiene por base un círculo máximo, y por altura dos tercios del diámetro, y que el cilindro circunscrito B (Fig. 255) tiene la mis-

ma base del cilindro L (Fig. 259), y tres tercios del diámetro por altura. Luego estos dos cilindros B, L (Fig. 255 y 259) son entre sí como las alturas, esto es, como dos tercios á tres.

Núm. 378. Luego tambien la esfera A (Fig. 255) es á su cilindro circunscrito B como dos á tres; esto es, si la esfera pesa 22 onzas el cilindro pesará 33.

Vale, pues, la esfera dos tercios del cilindro circunscrito. Pero el cono que tuviere esa misma base y esa misma altura del cilindro vale solamente una tercera parte de él; esto es, si el cilindro B pesa 33 onzas, el cono C (Fig. 256) pesará solas 11.

Núm. 379. Luego el cono (Fig. 256) que tiene por base un círculo máximo de la esfera, y por altura su diámetro, vale la mitad de la esfera, de modo que si la esfera vale 22, el cono valdrá 11.

Y así el cono C que tuviere por base un círculo máximo, y por altura el diámetro de la esfera, es igual á media esfera ó al hemisferio D (Fig. 256).

Núm. 380. Luego el cono, la esfera y el cilindro que tienen la misma altura y profundidad, son como 1, 2, 3, ó como 11, 22, 33 (Fig. 257).

Cuanto al cubo circunscrito

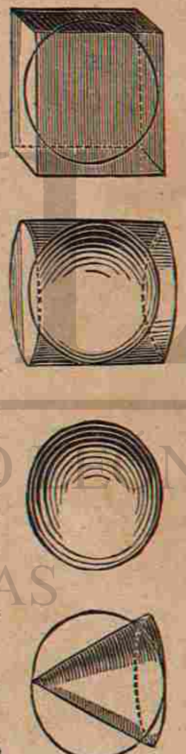


Fig. 257.

(Fig. 258) si le quisiéremos comparar con la esfera

Fig. 258.

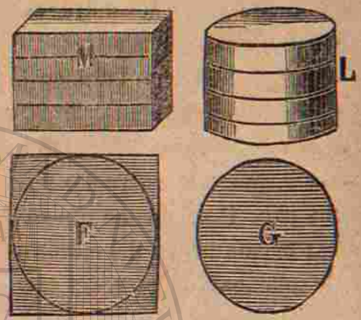


Fig. 259.

dividiremos la dificultad, é iremos dando solucion poco á poco.

Núm. 581. Lo primero comparemos la esfera ó el cilindro L su igual (Fig. 259) con un prisma M de la misma altura, esto es, de dos tercios de diámetro, ó cuatro tercios de radio. Mas siendo la altura la misma, solo se halla la diferencia en las bases FG; y esta, como dijimos al número 267, es como 22 á 28, esto es, como la circunferencia á cuatro diámetros. Luego si el cilindro L, ó la esfera que le es igual, pesa 22 onzas, el prisma M pesará 28.

Núm. 582. Comparemos ahora este prisma M con el cubo circunscrito N, como ambos son de la misma base toda la diferencia está en la altura; pero teniendo el cubo tres tercios de diámetro por altura, y el prisma solamente dos, si el prisma M vale 4 diámetros ó 28, el cubo debe valer 6 diámetros ó 42; y por consiguiente, comparando la esfera A, ó el cilindro L su igual con el cubo N circunscrito, será

como 28 á 42, ó como la circunferencia á 6 diámetros.

Núm. 583. Luego los cuatro cuerpos que pertenecen á la esfera en el modo arriba dicho (Fig. 257), esto es, el cono, la esfera, el cilindro y el cubo estan en proporcion 11, 22, 33, 42.

§ XIV.

Del valor del sector, y del segmento de la esfera.

Núm. 584. Así como arriba consideramos la esfera dividida en pirámides, cuyo vértice comun era el centro, podemos dividir ahora el sector en muchas pirámides, cuyo vértice comun sea el centro, y cuyas bases hagan la superficie convexa del sector (Fig. 260).

Núm. 585. Luego el sector es igual á muchas pirámides juntas, cuyas bases hagan la superficie, y cuya altura sea el radio. Ya se dijo al núm. 546, que cada pirámide valia un tercio de su prisma correspondiente, y era igual á su base multiplicada por el tercio de la altura del prisma.

Núm. 586. Luego el sector Z (Fig. 260) es igual á un pris-

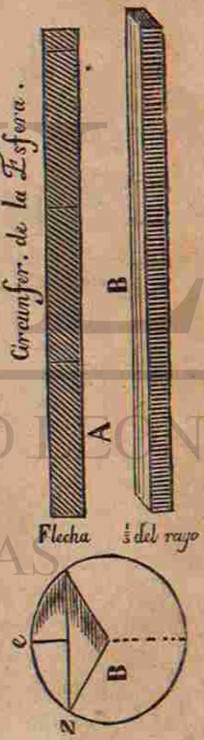


Fig. 260.

ma B, cuya base sea un paralelógramo igual á la superficie convexa del sector, y cuya altura sea un tercio del radio de la esfera.

Pero la superficie convexa del sector Z, que es la misma del segmento, ya dijimos al número 527 que era igual á un paralelógramo B, cuya longitud fuese la circunferencia del círculo máximo de la esfera, y su altura la flecha.

Luego el valor de Z, sector de la esfera, es igual á un prisma B. cuya longitud sea la circunferencia de la esfera, y su anchura la flecha, y su altura un tercio del radio.

Núm. 587. Para valuar el segmento de la esfera (Fig. 261), despues de hallado el valor del sector B

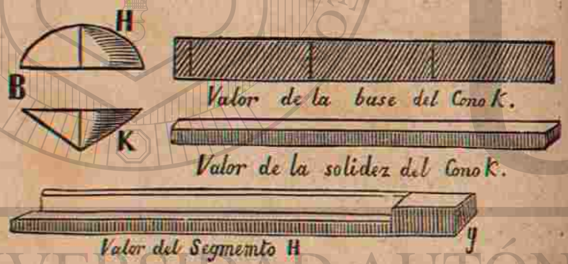


Fig. 261.

bastará cortar todo el cono K, y sabido el valor de este cono, el resto será el valor del segmento H.

Pero el cono K ya dijimos que era igual á un cilindro de la misma base y de la tercera parte de la altura (núm. 552); y tambien habiamos dicho que el círculo de la base de este cono se podia reducir á un paralelógramo, que tuviese por longitud la cir-

cunferencia de él, y por altura medio radio (núm. 252).

Núm. 588. Luego haciendo un prisma P, cuya longitud sea la circunferencia del cono, y su latitud medio radio de su base, y la altura el tercio de la altura del cono, se conocerá su valor.

Núm. 589. Luego el valor del segmento H (Fig. 261) es el valor del sector Z (Fig. 260), menos el del cono K.

Núm. 590. Luego el valor del segmento H es igual al del prisma B de la (Fig. 260), quitando de este el valor del cono K, que es el de otro prisma P (Fig. 261), y de este modo el segmento H será igual al sólido, y la razon es, porque así como juntando ó sumando el cono K con el segmento H tenemos el sector Z, así tambien juntando el prisma B, que tiene el valor del cono K, y añadiéndole el sólido *y*, en donde entra, se formará el prisma de la (Fig. 260) igual al sector Z.

§ XV.

Del modo de valuar el prisma recto truncado.

Núm. 591. Llamamos prisma truncado todo aquel que sea cortado irregularmente, como A (Fig. 262).

Para simplificar la doctrina hablaremos del prisma triangular, porque todos los otros se pueden reducir á triangulares.

Tiene, pues, el prisma triangular A tres esquinas desiguales, y para reducirle á un prisma regular capaz de ser valuado se hará lo siguiente.

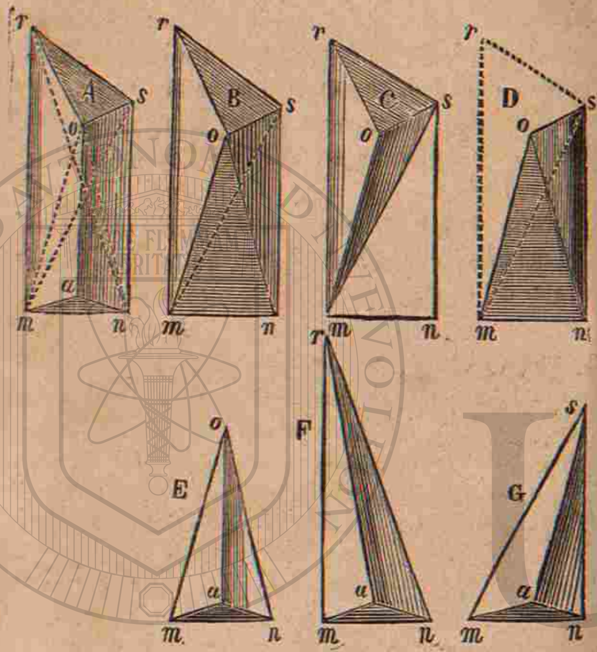


Fig. 262.

I.

Núm. 392. Tiraremos del ángulo sólido *o* dos diagonales *om*, *on* : consideraremos cortada esta pequeña pirámide, cuya base *man* es la base del prisma, y cuyo vértice está en *o*, abajo ponemos en E esta pirámide.

II.

Separada la pirámide E queda el resto B, que es

una pirámide irregular de cuatro caras, cuya base es *rsmn*, y cuyo vértice está en *o*, y en esta base *srmn* podemos tirar una diagonal *ms*.

III.

Podemos considerar una division desde el vértice *o*, buscando siempre la diagonal *ms*, y dividimos esta pirámide cuadrilátera en dos triangulares, las que podemos separar una C, cuya base es *rsm*, y su vértice está en *o* ; otra D, cuya base es *msn*, y su vértice está en *o*, las cuales si se juntan vuelven á hacer el sólido B ; y poniéndolas encima la pirámide E, queda formado el prisma truncado A primitivo.

De este modo se conoce que el prisma truncado A se divide en tres pirámides E, C, D.

Como estas pirámides son desemejantes, y nada tienen comun, veamos si reducimos C y D á otras iguales que tengan la misma base de E, que viene á ser la del prisma primitivo A ; pues de este modo será mas facil hallar el valor de las pirámides y del prisma que se dividió en ellas.

IV.

Núm. 393. Hagamos despues dos pirámides imaginarias F, G, cuyas bases sean como la de la pirámide E, esto es, la del prisma primitivo A, y demos á F la altura del prisma en la esquina *rm*, y á la pirámide G la altura del prisma en la esquina *sn*. Teniendo la pirámide E la altura del prisma en *ao*, tenemos con esto tres pirámides todas con la misma base del prisma, y cada una tiene por altura una esquina del prisma, *ao* será la altura de E, *rm* la de F, y *sn* la de G.

V.

Veamos ahora si estas dos pirámides imaginarias FG valen tanto como las verdaderas CD, en que el prisma se dividió. Cuanto á C, esta tiene el vértice en *o*, y tiene por base el triángulo *mrs*. Pero la pirámide imaginaria P, si la sobreponen en el triángulo *mrn*, tendrá ese triángulo por base : para comparar, pues, estas dos bases ó triángulos *mrs*, *mrn*, busquémoslos en el prisma A, y veremos que el triángulo *rsm* ó *rnm* son iguales, porque estan entre las mismas paralelas por el núm. 224. Luego el triángulo *srm*, base de C, es igual á *rnm* base de F : veamos ahora la altura de estas dos pirámides C y F : C tiene el vértice en *o*, y F en *a*; pero mirando bien el prisma primitivo A, se advierte que *o* y *a* estan en la misma paralela; luego las pirámides C y F tienen base igual y altura igual, por consiguiente son iguales.

Vengamos ahora á las pirámides G, D, para ver si tambien son sus iguales entre sí. Pongamos la una y la otra de suerte que tengan por vértices en G el punto *a*, en D el punto *o*, ambos por la misma esquina *ao* del prisma A, que ya vimos estaban en la misma altura.

Cuando á la base de D es el triángulo *msn* del prisma A, la base de G es el mismo triángulo *msn* del prisma A ; luego DG tienen la misma base, y los vértices estan á la misma altura; y así la pirámide imaginaria G es igual á la pirámide verdadera D.

Núm. 594. Luego el prisma truncado es igual á las tres pirámides E, F, G, que tienen por bases la del prisma truncado, y por alturas las tres esquinas de este.

Pero estas tres pirámides (Fig. 265) se reducen á tres prismas de la misma base del truncado A, y de una altura que sea un tercio del de las pirámides, ó un tercio de las esquinas del prisma A; y así los prismas B, C, D son iguales á las pirámides E, F, G, que se corresponden á plomo en la lámina.

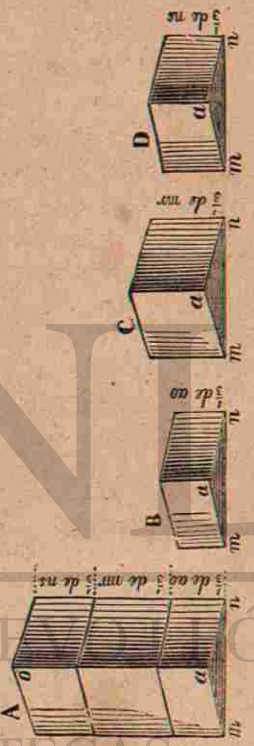


Fig. 265.

Núm. 595. Luego el prisma truncado A (Fig. 262) es igual á un prisma entero A (Fig. 265) de la misma base, cuya altura sea la suma de las terceras partes de las tres esquinas del truncado ; y así el prisma truncado es igual al prisma entero A, compuesto de los prismas B, C, D.

Si el prisma no fuere recto, córtese por el medio con una seccion perpendicular á las esquinas, y quedará dividido en dos prismas rectos, truncados, y sabremos hallar su valor.

§ XVI.

Modo de valuar el volumen de los cuerpos irregulares.

Núm. 596. Cualquier cuerpo irregular se puede dividir por una seccion recta, y entonces las dos nuevas superficies de la seccion pueden servir de bases rectas de los dos cuerpos.

En segundo lugar, puesta cualquiera de estas partes sobre su base recta, podemos ir dividiendo cada una de ellas en prismas triangulares truncados; y sabiendo valuar cada prisma, se sabe el valor del sólido: bien pudieran quedar algunas pirámides; pero á estas ya las sabemos hallar su valor.

Para abreviar la operacion daremos algunas reglas, que nos dispensen de llegar hasta la última division de los prismas triangulares truncados.

I.

Núm. 597. Sea un sólido como el de la (Fig. 264): su base E, A, O, Q sea un paralelógramo, sobre cuyos cuatro ángulos se levanten perpendicularmente cuatro esquinas desiguales ES, AI, PQ, OR, el lado E, O, S, R esté cortado de forma que se termine en I: el lado O, Q, R, P córtese tambien de forma que se termine en I. Aquí tenemos un paralelipipedo irregularmente truncado: supongamos, pues, que es preciso saber su valor.

II.

Tiremos en la base diagonal AO, y conforme á esa diagonal hágase una seccion por las esquinas OR,

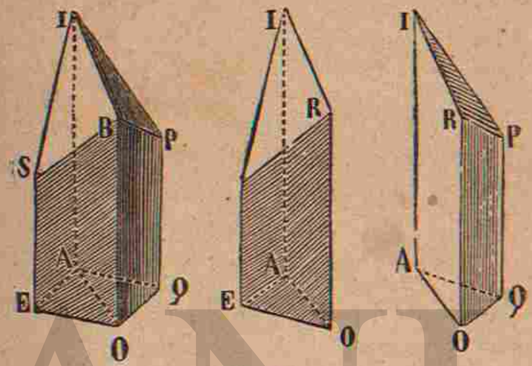


Fig. 264.

AI, quedará dividido en los dos prismas truncados que vemos con separacion en la misma figura, y cuyo valor sabemos averiguar por lo que queda dicho.

Por cuanto el que tiene por base el triángulo E, A, O es igual á un prisma recto de esta base, cuya altura sea un tercio de ES con mas un tercio de AI, mas un tercio de RO; del mismo modo el otro es igual á un prisma recto, cuya base sea el triángulo A, O, Q, y la altura un tercio de PQ, con tercio de AI, y un tercio de RO.

Pero como las dos bases por ser triángulos mitades del paralelógramo son iguales, en vez de hacer dos productos ó prismas hagamos uno con la altura de los dos, esto es, un prisma, cuya base sea E, A, O, y cuya altura sea un tercio de ES, un tercio de PQ, y dos tercios de AI, mas dos tercios de RO; ó por otro medio, un tercio de cada esquina que no sea comun, y dos tercios de las esquinas que sean comunes á ambos, y son aquellas por donde va la division. Como el prisma cuadrilátero total se divide en los dos, su valor es la suma de ambos.

Núm. 398. Luego el paralelipípedo diferentemente truncado es igual á su media base, multiplicada por un tercio de cada esquina que no sea comun, y dos tercios de cada esquina comun á los dos prismas triangulares en que se podia dividir.

Lo mismo diremos si el paralelipípedo fuese cóncavo (Fig. 265), entonces se podrá dividir segun la

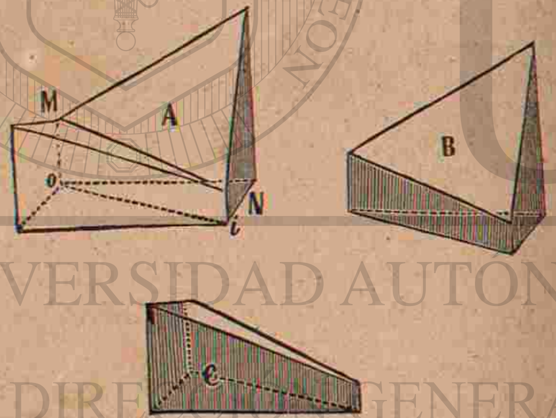


Fig. 265.

linea de direccion de la concavidad MN, y se tirará la diagonal en la base *oi*, y se hará la misma operacion de arriba.

Núm. 399. El prisma cuadrangular que no fuere paralelipípedo solo se puede valuar haciendo la division en la base, segun la línea ó direccion de la convexidad, ó de la concavidad superior; y haciendo dos triángulos, y de cada uno de ellos multiplicado por los tercios de sus tres esquinas, formando un producto, la suma de ambos será el valor de este sólido.

§ XVII.

De los sólidos regulares.

Núm. 400. Llamamos sólido absolutamente regular al que en las superficies, en las líneas y en los ángulos guarda una perfecta igualdad y semejanza. De este género son el cubo, el tetraedro, ó de cuatro superficies, el octaedro de ocho, el icosaedro de veinte, y el dodecaedro de doce, en los cuales no hay la mínima desigualdad en ángulas líneas ni superficies.

Núm. 401. La esfera (Fig. 266) tambien podia colocarse entre los cuerpos regulares, por ser en todas partes semejantes á sí mismo; de suerte que de cualquiera modo que se la tome siempre ofrece la misma superficie igualmente convexa.


Fig. 266.

El cubo (Fig. 267) es formado por seis cuadrados iguara de los dos, esto es, un prisma, cuya base sea E, A, O, y cuya altura sea un tercio de ES, un tercio de PQ, y dos tercios de AI, mas dos tercios de RO; ó por otro medio, un tercio de cada esquina que no sea comun, y dos tercios de las esquinas que sean comunes á ambos, y son aquellas por donde va la division. Como el prisma cuadrilátero total se divide en los dos, su valor es la suma de ambos.

Núm. 398. Luego el paralelipípedo diferentemente truncado es igual á su media base, multiplicada por un tercio de cada esquina que no sea comun, y dos tercios de cada esquina comun á los dos prismas triangulares en que se podia dividir.

Lo mismo diremos si el paralelipípedo fuese cóncavo (Fig. 265), entonces se podrá dividir segun la

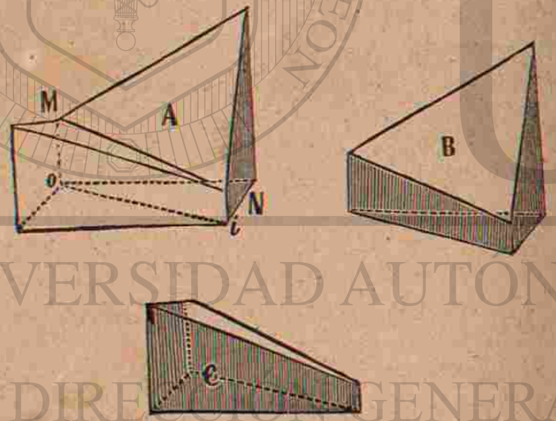


Fig. 265.

línea de direccion de la concavidad MN, y se tirará la diagonal en la base *oi*, y se hará la misma operacion de arriba.

Núm. 399. El prisma cuadrangular que no fuere paralelipípedo solo se puede valuar haciendo la division en la base, segun la línea ó direccion de la convexidad, ó de la concavidad superior; y haciendo dos triángulos, y de cada uno de ellos multiplicado por los tercios de sus tres esquinas, formando un producto, la suma de ambos será el valor de este sólido.

§ XVII.

De los sólidos regulares.

Núm. 400. Llamamos sólido absolutamente regular al que en las superficies, en las líneas y en los ángulos guarda una perfecta igualdad y semejanza. De este género son el cubo, el tetraedro, ó de cuatro superficies, el octaedro de ocho, el icosaedro de veinte, y el dodecaedro de doce, en los cuales no hay la mínima desigualdad en ángulas líneas ni superficies.

Núm. 401. La esfera (Fig. 266) tambien podia colocarse entre los cuerpos regulares, por ser en todas partes semejantes á sí mismo; de suerte que de cualquiera modo que se la tome siempre ofrece la misma superficie igualmente convexa.

Fig. 266.

El cubo (Fig. 267) es formado por seis cuadrados iguales: el uno está en la base, los cuatro alrede-

Fig. 267.

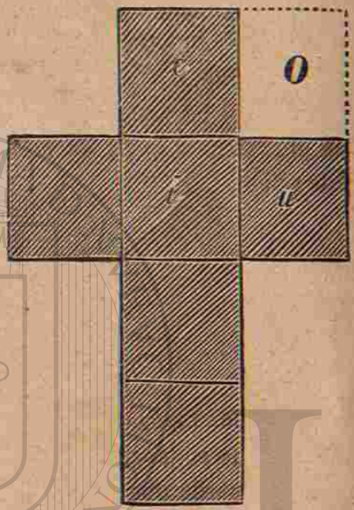


Fig. 268.

Fig. 269.

dor de la base hacen los cuatro lados, y el sesto forma la base superior. En el cubo todos los ángulos sólidos son formados por la concurrencia de tres cuadrados; y en los cuadrados todos los ángulos son de noventa grados, y todas las líneas son iguales.

Núm. 402. Luego el cubo es un sólido perfectamente regular.

Con cuadrados no podemos formar otro sólido, porque si quisieremos juntar solamente dos no se forma ángulo sólido, pues este forzosamente ha de tener tres lados á lo menos, y tres dimensiones en longitud, latitud y profundidad.

Si juntamos los tres lados cuadrados que dijimos formamos un ángulo sólido, como se ve en el cubo. Si juntamos cuatro (Fig. 268) *e*, *i*, *o*, *u*, teniendo cada cual 90 grados, todos juntos hacen 360; y por consiguiente el punto en donde concurren es el centro de un círculo, y no puede hacer ángulo sólido.

Núm. 403. Luego con cuadrados no se puede formar otro sólido que no sea el cubo.

Veamos ahora los sólidos que formamos con los triángulos equiláteros, pues todos los otros triángulos son por su irregularidad incapaces de formar cuerpo perfectamente regular.

Juntos tres triángulos (Fig. 269) harán un ángulo sólido M; y como la base tambien ha de ser un triángulo formado por tres lados de los triángulos que forman las superficies, ha de ser triángulo; y pues las líneas que le forman son lados de triángulos equiláteros, tambien él ha de ser equilátero, y por esto igual á los superiores. Los tres triángulos de la base, siendo todos ellos formados por tres triángulos equiláteros, uno de la base y dos de los lados, que son todos iguales á los que forman el ángulo del vértice M, tambien le son iguales.

Estos cuatro triángulos se ven en la (Fig. 270), y en ella

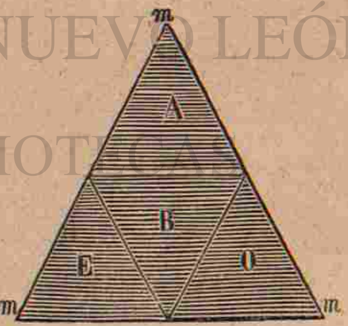


Fig. 270.

se advierte cómo podrán formarse de plano para armar el tetraedro: B es la base, A, E, O son los lados que pueden levantarse alrededor de la base, y juntándose los ángulos *mmm*, harán el vértice del tetraedro M de la (Fig. 209).

Núm. 404. Luego el tetraedro formado por cuatro triángulos equiláteros *a, e, m, n* (Fig. 271), de suer-

Fig. 271.

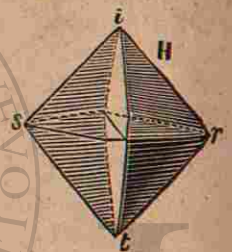


Fig. 272.

te que se junten *oo*, quedará una pirámide de cuatro lados con el vértice en *i*: no obstante la base será cuadrada, y por eso desigual á los lados, y así será un sólido irregular.

Pero formemos otra pirámide semejante, y juntemos las dos bases cuadradas, resultará el sólido regular H (Fig. 272).

I.

Todos los ocho lados son triángulos equiláteros.

II.

Todos los ángulos sólidos son formados por cuatro lados con el vértice en *i*, porque el vértice in-

ferior *t* se supone ser lo mismo que el de arriba; los laterales *r*, *s*, etc., son formados cada uno por el concurso de dos triángulos superiores y dos inferiores; y así son formados por cuatro triángulos equiláteros.

Núm. 405. Luego el octaedro es cuerpo perfectamente regular.

Para formarle de papel se puede cortar como en la (Fig. 273), y doblarle de modo que *oo* se junten,

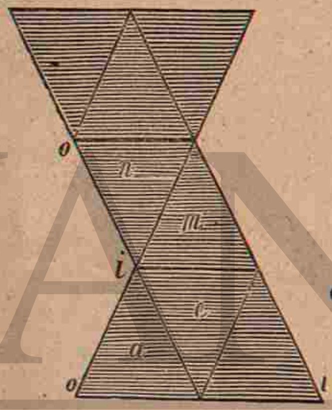


Fig. 273.

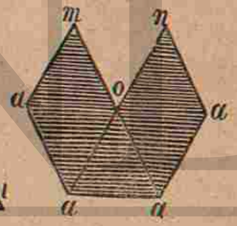


Fig. 274.

y se verá formado un sólido en *i* de los triángulos *a, e, m, n*, y los otros cuatro formarán la parte inferior del octaedro, cuyo vértice es *t*.

Juntemos ahora cinco triángulos equiláteros (Fig. 274), y hagamos que *nm* se junten, se levantará el centro *o*, y quedará un sólido de cinco lados iguales y semejantes. Con todo eso la base de esta pirámide es un pentágono, y los lados son triángulos, lo que contradice á la regularidad que se desea; y así por este medio todavía no tenemos sólido regular.

Si formamos otra pirámide de cinco lados semejantes, para juntarla, poniendo la cúspide hácia abajo, como hicimos en el octaedro, queda un sólido todo formado por triángulos equiláteros. No obstante los ángulos sólidos no son semejantes, por ser el superior y el inferior formados con la concurrencia de cinco triángulos, y los laterales de alrededor *a*, *a*, *a*, *a*, etc., son formados por solos cuatro, dos de la pirámide superior y dos de la inferior; por consiguiente aun no tenemos sólido regular.

Pero hagamos una figura en papel, como se representa (Fig. 275), en la que, ademas de los cinco

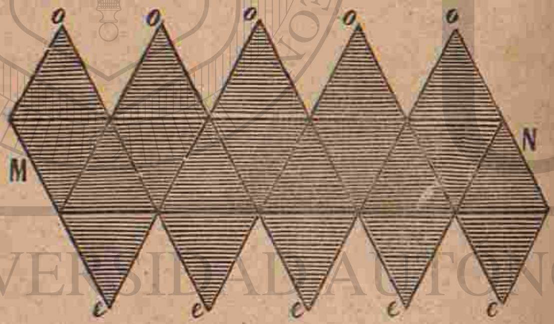


Fig. 275.

triángulos equiláteros *e*, *e*, *e*, *e*, *e*, que han de formar la pirámide superior *o*, y de los otros cinco que formarán la inferior *e*, tenemos MN formada de diez triángulos equiláteros, cinco que unen por las tres bases con los superiores, y otros cinco que unen

con los inferiores. Doblando, pues, esta lista de triángulos circularmente, de modo que se junten las dos estremidades MN, y disponiendo las divisiones en tal forma que solo por ellas se dobla la lista, y haga un circuito de superficies planas, si arríba unimos todos los ángulos *o*, *o*, *o*, *o*, *o*, y abajo los ángulos *e*, *e*, *e*, *e*, *e*, tendremos un sólido como se ve en la (Fig. 276), en el cual se observa lo siguiente.

I.

Que este sólido es compuesto de veinte triángulos equiláteros.

II.

Que todos los ángulos sólidos son formados por el concurso de cinco lados: en OE se ve claro, en los laterales el circuito *ai* vemos que cada ángulo sólido de los que terminan la base de la pirámide superior O, es formado por dos triángulos de la pirámide superior; otros dos que penden de estos, y caen hácia abajo, y otro que viene de abajo á introducirse entre los dos que estan pendientes. Lo mismo digo de *s*, y de los otros que terminan la base de la pirámide inferior E.

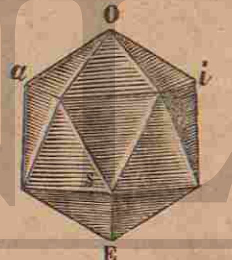


Fig. 276.

Núm. 406. Luego el icosaedro es un cuerpo regular formado por veinte lados semejantes é iguales, etc.

Si juntamos seis triángulos equiláteros (Fig. 277),

Fig. 278.

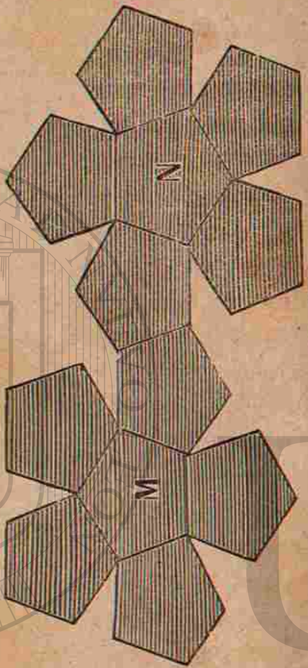


Fig. 279.

Fig. 277.

como cada ángulo de los del centro es de 60 grados, todos seis harán 360, que es el circuito de un círculo; de suerte que si los juntamos, el centro O no se puede levantar del plano, ni formar ángulo sólido.

Núm. 407. Luego con triángulos equiláteros no se puede formar cuerpo alguno regular fuera del tetraedro de cuatro lados, del octaedro de ocho del icosaedro de veinte.

Vengamos ahora á los pentágonos para ver qué

cuerpos sólidos podremos formar con ellos, y juntemos tres pentágonos (Fig. 278). Para examinar qué valor tienen sus ángulos tomemos un pentágono, y tiremos desde un centro radios á sus ángulos. Los del centro *o* como tienen por medida un quinto de la circunferencia tendrán 72 grados por medida.

Pero cada triángulo tiene el valor de 180 grados; luego faltan para el valor de los dos ángulos que cada triángulo tiene alrededor del pentágono lo que va de 72 á 180. Esto repartido entre los dos á cada uno dará 54; pero si convertimos estos radios que dividen el pantágono en triángulos, cada ángulo queda doble del que hacia la base del triángulo, esto es, duplo de 54, que viene á ser 108.

Luego los ángulos del pentágono valen 108.

Juntando ahora tres pentágonos A, *e*, *o* (Fig. 278), solo tenemos en A 324 grados en el valor que ocupan los tres ángulos, y aun falta el valor de 36 grados, para completar la circunferencia de 360. Luego si juntásemos *e* con *i* formaremos un ángulo sólido con tres lados de cinco ángulos.

Tomemos, pues, un pentágono de papel M (Fig. 279), y de sus cinco lados hagamos que se levanten otros cinco pentágonos iguales hasta unirse mútuamente en forma de una bandeja (perdónese la familiaridad de los términos, porque solo atendemos á la claridad, que es la que necesitan los principiantes): formemos otra bandeja semejante alrededor del pentágono N, y colocaremos una sobre otra, como se ve en la (Fig. 280). Pero en esta figura tenemos que observar.

I.

Que todos los lados son semejantes, formados por

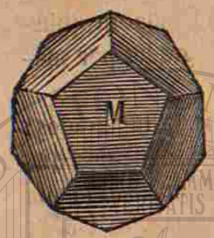


Fig. 280.

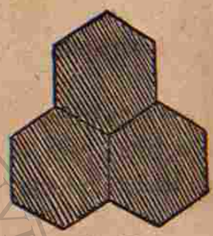


Fig. 281.

ángulos planos, semejantes é iguales, pues todos son pentágonos y semejantes.

II.

Que todos los ángulos sólidos son formados por tres lados: en los que se forman alrededor del pentágono superior M y el inferior N es manifiesto, pues los forma la base con los dos pentágonos que se levantan como lados hasta encontrarse mútuamente, y los que se forman por un pentágono, que sube de abajo para introducirse entre los que penden del que está encima, ó al contrario.

Núm. 408. Luego el dodecaedro es un sólido regular, compuesto de doce lados iguales y semejantes.

Si quisiéremos juntar cuatro pentágonos para hacer con ellos un ángulo sólido no podremos, porque teniendo cada uno de ellos los ángulos de diez grados, cuatro juntos harian la suma de 432, los que

siendo mucho mas que la circunferencia del círculo no pueden caber en el plano, y mucho menos en el ángulo sólido, que para elevarse del plano debe tener circunferencia menor que la del círculo.

Núm. 409. Luego con pentágonos regulares no se puede hacer otro sólido que el dodecaedro.

Si quisiéremos formar con exágonos algun cuerpo sólido veremos que es imposible, porque (Fig. 281) juntando tres tenemos 360 grados, pues cada ángulo del exágono regular contiene 120 por el núm. 98; luego tres hacen 360, lo que es justamente la circunferencia del círculo, y así el punto de concurrencia no podria elevarse del plano para hacer ángulo sólido.

Si queremos valernos del eptágono, que quiere decir figura de siete ángulos, no podremos hacer sólido alguno, porque si tres exágonos no pueden hacer ángulo sólido, mucho menos podrán los eptágonos, cuyos ángulos son mayores.

Núm. 410. Luego no puede haber sólido alguno regular fuera de los que hemos dicho, esto es, cubo, tetraedro, octaedro, icosaedro y dodecaedro; esceptúase la esfera, de la cual no hablamos aquí.

Ahora, amigo Eugenio, antes de poner término á estos elementos de geometría, gobernado por la esperiencia que tengo quiero hacerte un epílogo de combinacion entre las razones de las líneas, de las superficies y de los sólidos, lo que te dará mucha luz: le añadiré á esta carta que ya tenia concluida.

EPILOGO.

Sobre la combinacion de las razones y proporciones de las lineas, superficies y sólidos.

§ I.

Núm. 411. Dijimos al núm. 139 que cuando muchos términos estaban en proporcion siempre iba reinando la misma razon entre todos ellos; de suerte que entre dos términos inmediatos se hallará el mismo esponente de la razon.

Tambien dijimos que un número multiplicado por sí mismo hacia el cuadrado, v. g. 4 por 4 dará 16, que es el número cuadrado de 4. Tambien dijimos que este cuadrado multiplicado otra vez por su raiz ó por el número primitivo 4 formaba el cubo. Ahora bien, cuando una cantidad se multiplica por sí misma para formar el cuadrado se dice que se eleva á la *segunda potencia*, y cuando se multiplica otra vez este cuadrado por la raiz para formar el cubo, se dice que sube á la *tercera potencia*; cuando todavía se multiplica el cubo otra vez por la raiz, se eleva esta á la *cuarta potencia*; si aun se multiplica de nuevo sube á la *quinta potencia*.

Lo que es costumbre espresar así en algebra: sea la cantidad simple ó raiz igual á A, el cuadrado de A se espresa así: $A \times A$, ó bien A^2: el cubo de A ó

la *tercera potencia* se podria espresar así: $A \times A \times A$; pero es mas corto A^3, y del mismo modo la cuarta potencia de A se espresa así: A^4 y la quinta A^5.

Núm. 412. Aquí deben advertir los principiantes que no es lo mismo 3A que A^3, porque el número 3 antes de A significa suma ó adicion, esto es, que la cantidad A se toma tres veces, siendo así que A^3 significa que la cantidad A no solo se multiplica una vez, sino que su producto se ha de multiplicar por A otra vez. Supongamos que A valga 4 palmos, 3 A significarán 12 palmos, y A^3 significará 64 palmos, porque 4×4 vale 16, y 16×4 vale 64.

Núm. 413. En la geometría podremos dar figura sensible así de la *segunda potencia*, que es una superficie, como de la tercera, que es un sólido; pero como no hay mas de tres dimensiones no podemos dar figura sensible de la cuarta, de la *quinta potencia*, etc. Solo los números dan idea de esta multiplicacion, y no las líneas.

Esto supuesto, formando una progresion geométrica $\div 1 : 2 : 4 : 8 : 16 : 32 : 64 : 128$, etc., cuyo esponente comun es 2, ó el esponente de la razon es doble, se ve claramente que para llegar el primer término al valor del segundo basta multiplicarle una vez por el esponente 2; mas para elevarle al valor del tercero es preciso multiplicarle otra vez por el mismo esponente; y del mismo modo para que se eleve al valor del cuarto término es preciso tercera multiplicacion, por el mismo esponente de la razon que reina. De esto se infieren varias consecuencias.

I.

Que podemos decir que la razon del primer término á su inmediato es el esponente simple, esto es, 2.

II.

Núm. 414. Que la razon del primer término al tercero es un cuadrado ó *segunda potencia* del esponente 2, esto es, 4.

III.

Núm. 415. Que la razon del primer término al cuarto es un cubo, ó tercera potencia del esponente 2, esto es, 8.

IV.

Núm. 416. Que la razon del primer término al quinto es 2, elevado á la cuarta potencia, esto es, 16.

V.

Núm. 417. Que la razon del primer término al sesto es 2, levantado á la quinta potencia, esto es, 32, etc.

Núm. 418. Supongamos ahora que formamos cuadrados de estos mismos términos de la progresion, véase (Fig. 282).

$$\div 1:2:4:8 \text{ --- razon --- } 2.$$
$$\div 1:4:16:64 \text{ --- razon --- } 4.$$

La razon ó esponente que reina en esta segunda

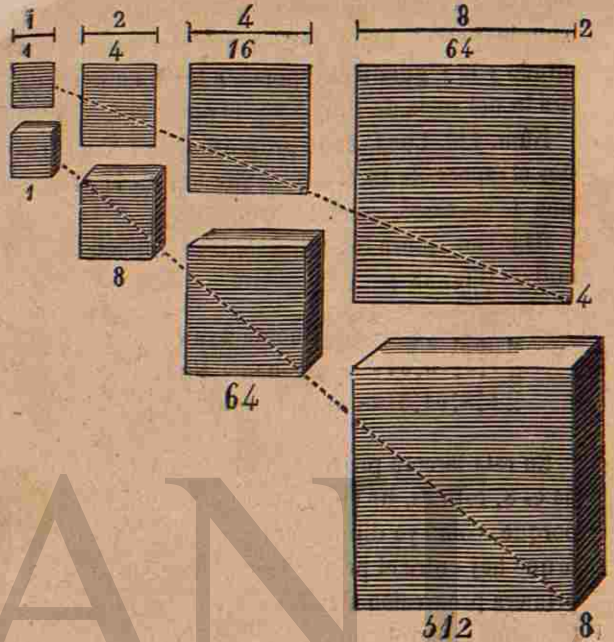


Fig. 282.

progresion es 4, esto es, el cuadrado del esponente que reina en la primera; porque, como dijimos al núm. 164, en los cuadrados hay la razon compuesta de la que habia entre las bases y de la que habia entre las alturas; y como son iguales, y la razon compuesta de dos iguales es un cuadrado de las simples, se sigue

Núm. 419. Luego en la progresion de los cuadrados el esponente del primero al segundo es un cuadrado del esponente simple.

Pero entre el primer término de las raices y el tercero el esponente es un cuadrado del esponente simple por el núm. 408; y entre el primer cuadrado y el segundo el esponente tambien es el cuadrado del cociente simple por el núm. 415.

Núm. 420. Luego en la progresion de los cuadrados el esponente es el mismo que hay en la progresion de las raices saltando un número.

Hagamos ahora los cubos de las cantidades primitivas (Fig. 282).

∺ 1 : 2 : 4 : 8 - - -esponente 2 raiz.
∺ 1 : 4 : 16 : 64 - - - esponente 4 cuadrado.
∺ 1 : 8 : 64 : 512- - -esponente 8 cubo.

En esta tercera progresion el esponente que reina es 8, esto es, un cubo del esponente primitivo 2, porque, como ya dijimos al núm. 409., el esponente que hay entre el primer término y el cuarto de la primera progresion simple es un cubo del esponente simple; pero tambien dijimos al núm. 164 que entre los cubos el esponente era compuesto de tres razones semejantes; por consiguiente es como el esponente del primer término al cuarto de la primera progresion.

Núm. 421. Luego entre el primer término y segundo de la última progresion el esponente es un cubo del esponente simple de la primera progresion.

§ II.

Núm. 422. Otra cosa has de observar, Eugenio, y

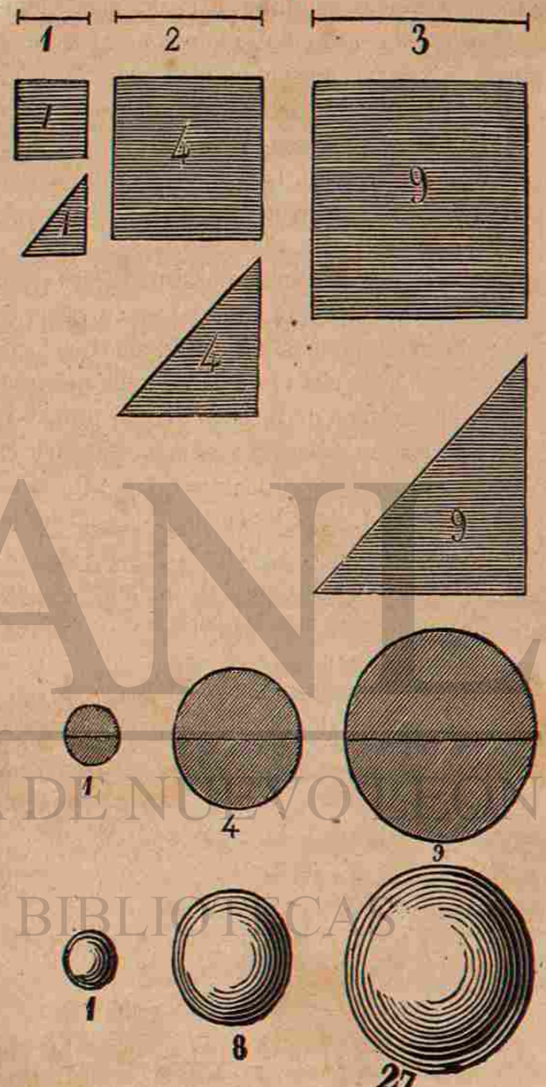


Fig. 283.

es que todo lo que son líneas ó cualesquiera figuras semejantes tienen entre sí la razon de las raices, esto es, del esponente simple, bien sea la proporcion aritmética ó geométrica, de suerte que (Fig. 283) si en los círculos son los radios como 1, 2, 3, los diámetros son como 1, 2, 3, las circunferencias son como 1, 2, 3, los arcos de igual número de grados serán como 1, 2, 3, etc.

Núm. 423. Pero si comparamos superficies semejantes unas con otras, ya su esponente ó razon no es el esponente simple de las raices, sino que ha de ser este esponente elevado á la segunda potencia, esto es, el cuadrado del primero, como dijimos al núm. 412, y ese mismo esponente ha de reinar en todo cuanto fuere superficie; y así (Fig. 284) si las líneas son como 1, 2, 3, los cuadrados formados sobre ellas serán como 1, 4, 9, los triángulos como 1, 4, 9, y tambien en las pirámides, cubos, conos, esferas, todo lo que fuere superficie será como 1, 4, 9.

Núm. 424. Ultimamente, si comparamos sólidos semejantes entre sí (Fig. 284), el esponente no será

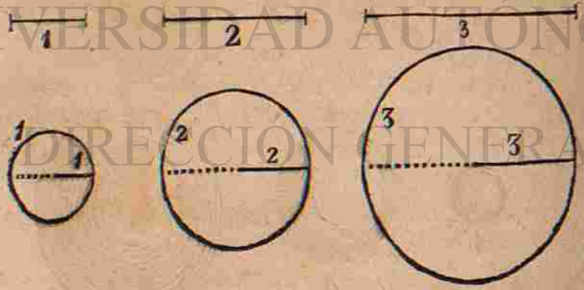


Fig. 284.

ni el de las raices ni el de las superficies, sino el de los cubos, esto es, ha de ser un cubo del primer esponente; y si las líneas que les pertenecen, esto es, los diámetros ó periferias eran 1, 2, 3, sus volúmenes serán 1, 8, 27, porque el cubo de 1 es 1, el de 2 es 8, el de 3 es 27; de forma que así como en los círculos distinguimos el area ó campo de la circunferencia que los cierra, y decimos que las superficies ó areas son como 1, 4, 9; pero que las líneas de la circunferencia siempre son como 1, 2, 3, conforme á los radios ó diámetros, así ahora en los sólidos no hemos de confundir los volúmenes con las superficies que los contienen; y por consiguiente si los radios de una esfera (Fig. 284), ó los lados de varios cubos fueren como 1, 2, 3, todo lo que sea línea en esos sólidos semejantes será como 1, 2, 3, esto es, altura 1, 2, 3, lados, como 1, 2, 3, etc., mas todo lo que fuere superficie, v. g., base, cara, etc. serán como 1, 4, 9, y el peso ó volumen ó el espacio comprendido dentro de la superficie total serán como 1, 9, 27.

Núm. 425. De aqui se sigue que en los sólidos semejantes todas las líneas correspondientes estan en la razon simple.

Todas las superficies en la razon de los cuadrados.

Todos los volúmenes ó el peso del sólido en la razon de los cubos.

Ve aquí, amigo Eugenio, lo que me ha parecido suficiente decirte acerca de la geometría; el próximo correo pienso emprender otra ciencia matemática tambien muy importante, que es la trigonometría, en la cual, sin embargo, pienso estenderme menos que en la antecedente. Estudia y recapacita todo cuanto te he enseñado desde el principio de nuestra correspondencia, pues, á menos que digieras completamente y te penetres de estos conocimientos preliminares, no estarás en estado de internarte en la lectura de obras mas profundas y voluminosas.

TRIGONOMETRIA.

tría, en la cual, sin embargo, pienso estenderme menos que en la antecedente. Estudia y recapacita todo cuanto te he enseñado desde el principio de nuestra correspondencia, pues, á menos que digieras completamente y te penetres de estos conocimientos preliminares, no estarás en estado de internarte en la lectura de obras mas profundas y voluminosas.

TRIGONOMETRIA.

CARTA VIGÉSIMAPRIMERA.

TRIGONOMETRIA RECTILINEA.

§ I.

Division de la circunferencia. Nociones sobre las líneas trigonométricas.

Amigo Eugenio, esplicadas como quedan la aritmética, algebra y geometría, el objeto de la presente es, segun te lo prometí en mi última, el estudio de la trigonometría, ciencia cuyo fin especial es resolver los triángulos, esto es, determinar sus ángulos y sus lados por medio de un número suficiente de datos.

En los triángulos rectilíneos basta conocer tres de las seis partes que los componen, con tal que en estas tres partes se incluya un lado, pues si solo se conociesen los tres ángulos, es evidente que todos los triángulos semejantes satisfacerian á la cuestion.

Teniendo que demostrar teoremas que estriban en las líneas trigonométricas y tratar de la resolucion de los triángulos, conviene que te dé algunas nociones relativas á la division de la circunferencia y la naturaleza de las líneas trigonométricas.

La circunferencia se divide en 560 partes iguales, llamadas *grados*; el grado en 60 *minutos*, el minuto en 60 *segundos*, etc.

Los grados, minutos y segundos se designan por los caracteres °, ′, ″.

El *complemento* de un ángulo ó de un arco es lo que queda restando este ángulo ó arco de 90°, así A siendo un ángulo, 90—A es su complemento. Mas como un ángulo ó arco puede esceder 90 grados, como puede ser menor que esta medida, resulta que el complemento puede ser positivo ó negativo, segun que A sea menor ó mayor que 90°.

El *suplemento* de un ángulo ó de un arco es lo que queda restando este ángulo ó arco de 180°; como el complemento, el suplemento puede ser positivo ó negativo.

Empléase para la resolucion del triángulo un cierto número de líneas llamadas trigonométricas que son designadas por los nombres siguientes :

Seno,	*Secante,*	*Tangente,*
Coseno,	*Cosecante,*	*Cotangente.*

El seno del arco AM ó del ángulo ACM (Fig. 285) es la perpendicular MP bajada de una estremidad de arco sobre el diámetro que pasa por la otra estremidad.

Si á la estremidad del radio CA, se lleva la perpendicular AT, hasta encontrar el radio CM prolon-

gado, la línea AT así terminada se llama la *tangente*, y CT la *secante* del arco AM ó del ángulo ACM. Estas tres líneas MP, AT, CT, dependientes del arco AM, y siempre determinadas por el arco AM y el radio, se designan así :

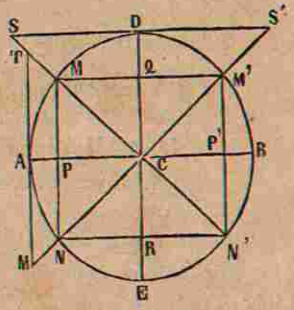


Fig. 285.

MP=sen AM, AT=tang AM, FC= sec AM.

Si en los puntos M y D del arco AD, igual á un cuadrante, se lleva las líneas MQ, DS perpendiculares al radio CD, la una terminada en este radio y la otra terminada en el radio CM prolongado, las líneas MQ, DS y CS compondrán igualmente el seno, tangente y secante del arco MD, complemento de AM, las cuales, para abreviar, se designan bajo el nombre de coseno, cotangente y cosecante del arco AM, y se designan de esta manera : MQ=cos AM, DS=cot AM, CS=cosec RM. En general, A siendo un arco ó ángulo cualquiera se tiene

$$\cos A=\text{sen }(90°-A),\ \cot A=\text{tang }(90°-A),\ \text{cosec } A=\sec(90°-A).$$

Supongamos que una estremidad del arco permanezca fijo en A, y que la estremidad marcada en M recorra sucesivamente toda la estension de la semi circunferencia desde A hasta B, en la direccion ADB;

en este caso designando por R el radio del círculo se tendrá

$$\text{Sen } 0=0, \text{ teng } 0=0, \text{ cos } 0=R, \text{ sec } 0+R.$$

Pero si AM=45°, entonces se tiene

$$\text{tang AM ó tang } 45^\circ=\cot 45^\circ=R$$
$$\text{sen } 45^\circ=\cos 45=\tfrac{1}{2}R\sqrt{2}$$

Cuando AM=90°, entonces se tiene
Sen 90°=R, cos 90°=0, y en cuanto á la tangente 90° es infinita, lo que se designa de la manera siguiente: tang 90°=∞.

Siendo cero el suplemento de 90°, se tiene tang 0= cot 90 y cot 0=tang 90, luego cot 0=∞ y cot 90=0.

El arco aumentando aun, los senos disminuyen, y los cosenos aumentan; si se lleva M'M paralela á AB, es claro que los arcos AM, BM' comprendidos entre paralelas serán iguales; asi como tambien las perpendiculares ó senos MP, M'P'; pero siendo el arco M'B el suplemento de AM', puesto que AM'+BM' es igual á una circunferencia, el seno de un arco ó de un ángulo es necesariamente igual al seno del suplemento de este arco ó de este ángulo. Se tiene por consiguiente:

$$\text{Sen A}=\text{sen } (180-\text{A}).$$

Los mismos arcos AM', AM que son suplementos el uno del otro y que tienen senos iguales, tienen tambien iguales los cosenos CP', CP; pero hay que observar que estos cosenos se dirigen en diferentes

sentidos, y esta diferencia de situacion se espresa en el cálculo por la oposicion de signos, de modo que si se consideran positivos ó afectados del signo + los cosenos menores que 90°, será preciso considerar como negativos ó afectados del signo — los cosenos de los arcos mayores que 90°, y por consiguiente se tendrá generalmente:

$$\text{Cos A}=-\cos (180-\text{A}), \text{ ó bien } \cos (90+\text{B})=-\cos (90-\text{B}),$$

lo que equivale á decir que el coseno de un arco ó de un ángulo mayor que 90° es igual al coseno de su suplemento tomado negativamente.

$$\text{Sen } (180)=0, \ \cos 180=-R.$$

Examinamos lo que hay que decir relativamente á la tangente de un arco mayor que 90°. Segun la definicion que he dado, debe ser determinada por el concurso de las líneas AT, CM', las cuales no se encuentran en el sentido AT, sino en el opuesto AV, de lo cual se concluye que la tangente de un arco mayor que 50° es negativa. Por otra parte si se observa que AV es la tangente del arco AN suplemento de AM' (pues NAM' es una semi-circunferencia), se concluirá que la tangente de un arco ó de un ángulo mayor que 90° es igual á la de su suplemento, tomado negativamente, de manera que se tiene tang A=—tang (180—A).

Lo mismo sucede relativamente á la cotangente, representada por DS', la cual es igual, y en sentido contrario á DS cotangente de AM. Por consiguiente se tiene

$$\text{Cot}\,A = -\cot(180-A).$$

Como los cosenos, las tangentes y cotangentes son negativas desde 90º á 180º, y en este último límite se tiene tang 180=0, cot 180=—cot 0=—∞

Facil es estender estas observaciones en caso que las cotangentes esten comprendidas entre 180º y 360º, pues dos lineas trigonométricas siendo generalmente perpendiculares á uno ó al otro diámetro DCF y ACB, con tal que sean perpendiculares á un mismo diámetro y sean de una misma naturaleza, afectarán el mismo signo si estan situadas en un mismo lado del diámetro, y signos contrarios si estan situadas en lados diferentes.

§ II.

Teoremas relativos á las líneas trigonométricas.

Teorema. — El seno de un arco es la mitad de la cuerda que sostiene un arco doble.

Pues el radio CA, perpendicular á MN, divide en dos partes iguales la cuerda MN y el arco correspondiente MAN; luego MP, seno del arco MA, es la mitad de la cuerda MN que sostiene el arco MAN doble de MA.

Teorema. — El cuadrado del seno de un arco, mas el cuadrado de su coseno, es igual al cuadrado de un radio, de manera que se tiene :

$$\text{Sen}^2 A + \cos^2 A = R^2 \;(*).$$

Esta propiedad resulta inmediatamente del triángulo rectángulo CMP, en que se tiene $MP^2 + CP^2 = CM^2$.

Resulta que dado el seno de un arco hallaráse su coseno, y viceversa mediante las fórmulas $\cos A = \pm\sqrt{(R^2 - \text{sen}^2 A)}$, $\text{sen}\, A = \pm\sqrt{(R^2 - \cos^2 A)}$. El doble signo de estas fórmulas procede de que el mismo signo MP responde á dos arcos AM, AM′, cuyos cosenos CP, CP′ y de signos contrarios, como el mismo coseno CP responde á dos arcos AM, AN, cuyos senos MP, PN son tambien iguales y de signos contrarios.

Teorema. — Dados los senos y cosenos de un arco se puede hallar las otras lineas trigonométricas.

Los triángulos semejantes CPM, CAT, CDS, nos dan inmediatamente :

$$\text{Tang}\,A = R\frac{\sin A}{\cos A},\quad \sec A = \frac{R^2}{\cos A}$$

$$\text{Cos}\,A = R\frac{\cos A}{\text{sen}\,A},\quad \text{cosec}\,A = \frac{R^2}{\text{sen}\,A}.$$

Teorema — Dados el seno y el coseno de

(*) Desígnase por $\text{sen}^2 A$ el cuadrado del seno A, como tambien por $\cos^2 A$ el cuadrado del cos A.

dos arcos se puede determinar el seno y el coseno de la suma ó de la diferencia de estos arcos.

Sea el arco AB$=a$ (Fig. 286), el arco BD$=b$ y el radio AC$=$R, y por consiguiente ABD$=a+b$. De los puntos B y D bájese BE, DP perpendiculares á CA; del punto D, llévese DA perpendicular é BC, y enfin, del punto I, llévese IK perpendicular é IL paralela á AC.

Fig. 286.

Los triángulos semejantes BCE, ICK dan las proporciones siguientes :

$$\text{CB}:\text{CI}::\text{BF}:\text{IK};\ \text{ó R}:\cos b::\text{sen}\, a:\text{IK}=\frac{\text{sen}\, a\cos b}{\text{R}}$$

$$\text{CB}:\text{CI}::\text{CE}:\text{CK};\ \text{ó R}:\cos b::\cos a:\text{CK}=\frac{\cos a\cos b}{\text{R}}$$

Los triángulos DIL, CBE, que tienen sus lados recíprocamente perpendiculares son semejantes y dan las proporciones siguientes :

$$\text{CB}:\text{DI}::\text{CE}:\text{DL};\ \text{ó R}:\text{sen}\, b::\cos a:\text{DL}=\frac{\cos a\,\text{sen}\, b}{\text{R}}$$

$$\text{CB}:\text{DI}::\text{BE}:\text{IL};\ \text{ó R}:\text{sen}\, b::\text{sen}\, a:\text{IL}=\frac{\text{sen}\, a\,\text{sen}\, b}{\text{R}}$$

Pero IK$+$DL$=$DF$=\text{sen}(a+b)$ y CK$-$IL$=$CF$=\cos(a+b)$, luego por consiguiente $\text{sen}(a+b)=$

$$\frac{\text{sen}\, a\cos b-\text{sen}\, a\,\text{sen}\, b}{\text{R}}$$

$$\cos(a+b)=\frac{\cos a\cos b-\text{sen}\, a\,\text{sen}\, b}{\text{R}}$$

Ahora bien, si se prolonga el seno DI hasta que encuentre la circunferencia en M, el resultado será :

$$\text{BM}=\text{BD}=b,\ \text{y MI}=\text{ID}=\text{sen}\, b.$$

Si por el punto M se lleva MP perpendicular y MN paralela á AC, puesto que MI$=$DI, se tendrá MN$=$IL, y NI$=$DL. Pero como se tiene

IK$-$IN$=$MPsen $(a+b)$ y EK$+$MN$=$CP$=\cos(a-b)$,

consecuentemente se tiene : $\text{sen}\,(a-b)=$

$$\frac{\text{sen}\, a\,\text{sen}\, b-\text{sen}\, b\cos a}{\text{R}}$$

$$\cos(a-b)=\frac{\cos a\cos b+\text{sen}\, a\,\text{sen}\, b}{\text{R}}$$

Si en las fórmulas precedentes se hace $b=a$, resulta : $\text{sen}\,{}^2a=\frac{{}^2\text{sen}\, a\cos a}{\text{R}}$ $\cos{}^2a=\frac{\cos{}^2a-\text{sen}\,{}^2a}{\text{R}}$

Si en estas últimas se reemplaza a por $\frac{a}{2}$, resulta :

$$\text{sen}\, a=\frac{{}^2\text{sen}\,\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}a}{\text{R}}\quad \cos a=\frac{\cos{}^2a-\text{sen}\,{}^2a}{\text{R}}$$

Y como se tiene á la vez $\cos^2\frac{1}{2}a+\text{sen}^2\frac{1}{2}a=\text{R}^2$ y $\cos^2\frac{1}{2}a-\text{sen}^2\frac{1}{2}a=\text{R}\cos a$, el resultado es

$\cos^2 \frac{1}{2}a = \frac{1}{2}R^2 - \frac{1}{2}R \cos a$ y $\operatorname{sen}^2 \frac{1}{2}a = \frac{1}{2}R^2 - \frac{1}{2}R \cos a$

y por consiguiente $\operatorname{sen} \frac{1}{2}a = \sqrt{\frac{1}{2}R^2 - \frac{1}{2}\cos a}$

Estas fórmulas dan el seno y el coseno de la mitad de un arco en funcion del coseno de este arco.

Las fórmulas que dan el seno $(a+b)$ y del coseno $(a+b)$ dan las fórmulas siguientes si las adiciona ó resta de dos en dos,

$$\operatorname{Sen} A \cos B = \tfrac{1}{2}R \operatorname{sen}(a+b) + \tfrac{1}{2}R \operatorname{sen}(a-b);$$
$$\operatorname{Sen} B \cos A = \tfrac{1}{2}R \operatorname{sen}(a+b) - \tfrac{1}{2}R \operatorname{sen}(a-b);$$
$$\operatorname{Cos} A \cos B = \tfrac{1}{2}R \cos(a-b) + \tfrac{1}{2}R \cos(a+b);$$
$$\operatorname{Cos} A \cos B = \tfrac{1}{2}R \cos(a-b) + \tfrac{1}{2}R \cos(a+b).$$

Si en estas fórmulas se hace $a+b=p$, $a-b=q$, lo que da $a=\frac{p+q}{2} b=\frac{p-q}{2}$, se puede deducir lo siguiente:

$$\operatorname{sen} p + \operatorname{sen} q = \frac{2}{R} \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}(p+q) \cos \tfrac{1}{2}(p-q)$$

$$\operatorname{sen} p - \operatorname{sen} q = \frac{2}{R} \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}(p-q) \cos \tfrac{1}{2}(p+q)$$

$$\cos p + \cos q = \frac{2}{R} \cos \tfrac{1}{2}(p+q) \cos \tfrac{1}{2}(p-q)$$

$$\cos q - \cos p = \frac{2}{R} \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}(p+q) \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}(p-q)$$

En fin, teniendo en consideracion que

$$\frac{\operatorname{sen} a}{\cos a} = \frac{\operatorname{tang} a}{R} = \frac{R}{\cos + a},$$

se puede sacar por la division las fórmulas siguientes:

$$\frac{\operatorname{sen} p + \operatorname{sen} q}{\operatorname{sen} p - \operatorname{sen} q} = \frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2}(p+q)}{\operatorname{tang} \frac{1}{2}(p-q)},$$

$$\frac{\operatorname{sen} p - \operatorname{sen} q}{\cos p - \cos q} = \frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2}(p+q)}{R}.$$

$$\frac{\operatorname{sen} p + \operatorname{sen} q}{\cos p - \cos q} = \frac{\cos \frac{1}{2}(p+q)}{R}, \quad \frac{\operatorname{sen} p - \operatorname{sen} q}{\cos p + \cos q} = \frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2}(p-q)}{R}$$

$$\frac{\operatorname{sen} p + \operatorname{sen} q}{\cos p - \cos q} = \frac{\cot \frac{1}{2}(p+q)}{R}, \quad \frac{\cos p + \cos q}{\cos q + \cos p} = \frac{\cot \frac{1}{2}(p+q)}{\operatorname{tang} \frac{1}{2}(p-q)}$$

$$\frac{\operatorname{sen} p + \operatorname{sen} q}{\operatorname{sen} p + \operatorname{sen} q} = \frac{\cos \frac{1}{2}(p+q)}{\cos \frac{1}{2}(p-q)}, \quad \frac{\operatorname{sen} p + q}{\operatorname{sen} p - \sin q} = \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(p+q)}{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(p-q)}$$

§ III.

Construccion de tablas de senos, cosenos, etc.

Hay arcos cuyas líneas trigonométricas pueden ser directamente calculadas. Así, el lado del hexágono siendo igual al radio, la mitad de este radio es el seno del ángulo de 30°. El lado del decágono inscrito es dado por la proporcion

$$R : x :: x : R - x$$

$x^2 + Rx = R^2$ y $x = -\frac{R}{2} \pm \sqrt{R^2 + \frac{R^2}{4}}$

Así $\frac{x}{2}$ es igual al seno del ángulo de 18°.

Síguese de lo espuesto que si se representa el radio por un número, por la unidad, por ejemplo, se tendrá rigorosamente el valor numérico de los senos del ángulo de 30^o y de 18^o. Por medio de las fórmulas precedentes se podrá calcular el valor de los ángulos de

$$9^o,\ 27^o,\ 36^o,\ 45^o,\ 54^o,\ 63^o,\ 72^o,\ 81^o.$$

En efecto conociendo el seno y el coseno de los arcos de 9^o y de 18^o por medio de la fórmula : $\text{sen}\,(a+b)=\text{sen}\,a\cos b+\text{sen}\,b\cos a$, se tendrá el valor del seno 27 haciendo $b=18$ y $a=9$, resultando en este caso :

$$\text{Sen}\,(27)=2\ \text{sen}\,9\cos 18\ \text{sen}\,18\cos 9.$$

Para calcular las líneas trigonométricas intermedias, se parte del principio que un arco menor que 90^o es siempre menor que su tangente y mayor que su seno, de lo que resulta que cuando un arco es bastante pequeño para que sensiblemente se confundan su seno y su tangente, se puede tomar el arco por seno, y como la semi-circunferencia cuyo radio es 1 siendo $=3.14\,15\ldots\ldots$, y la semi-circunferencia conteniendo $180\times60\times60$ segundos. Dividiendo π por este número, se tendrá el valor del arco de un segundo que se podrá tomar por su seno, y por consiguiente se podrá calcular sucesivamente de segundo en segundo los senos de todos los arcos, y para verificacion servirse de los medios precedentemente indicados.

§IV.

Principios para la resolucion de los triángulos.

Teorema. — En todo triángulo rectángulo, el radio es al seno de los ángulos agudos como la hipotenusa es al lado opuesto á este ángulo.

Sea ABC (Fig. 287) el triángulo propuesto rectángulo en A ; del punto C como centro y del radio CD, igual al radio de las tablas, descríbase el arco DE que será la medida del ángulo C ; bájese sobre CD la perpendicular AF que será el seno del ángulo C; los triángulos CBA, CEF son semejantes y dan la proporcion

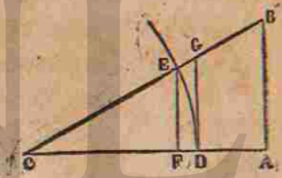


Fig. 287.

$$CE:EF::CB:BA;$$

por consiguiente

$$R:\text{sen}\,C::BC:BA,$$

y suponiendo $R=1$, resultará $BA=BC\ \text{sen}\,C$.

Teorema. — En todo triángulo rectángulo el radio es á la tangente de uno de los ángulos agudos, como el lado adyacente á este ángulo es al lado opuesto.

Despues de describir el arco DE (Fig. 287), trázese sobre CB la perpendicular DG que será la tangente del ángulo C. Por los triángulos semejantes CDG, CAB, se tendrá la proporcion :

$$R : \text{tang}\, C :: CA : AB.$$

TEOREMA.—En un triángulo rectilíneo cualquiera los senos de los ángulos son como los lados opuestos.

Fig. 288.

Sea ABC (Fig. 288) el triángulo propuesto, AD la perpendicular bajada del vértice A sobre el lado opuesto BC; podrá suceder dos cosas :

1° Si la perpendicular cae dentro del triángulo ABC, los triángulos rectángulos ABD, ACD darán :

$$R : \text{sen}\, B :: AB : AD,$$
$$R : \text{sen}\, C :: AC : AD.$$

En estas dos proporciones siendo iguales los estremos, se podrá con los medios hacer la proporcion :

$$\text{Sen}\, C : \text{sen}\, B :: AB : AC.$$

2° Si la perpendicular cae fuera del triángulo

ABC (Fig. 288), los triángulos rectángulos ABD, ACD darán aun las proporciones :

$$R : \text{sen}\, ABD :: AB : AD,$$
$$R : \text{sen}\, C :: AC : AD,$$

de lo que se deduce : $\text{sen}\, C : \text{sen}\, ABD :: AB : AC$. Pero como el ángulo ABD es suplemento de ABC ó B, se tiene :

Sen ABD=sen B ; y por consiguiente resulta :

$$\text{Sen}\, C : \text{sen}\, B :: AB : AC.$$

TEOREMA. — En todo triángule rectilíneo, el coseno de un ángulo es al radio, como la suma de los cuadrados de los lados que comprenden este ángulo, menos el cuadrado del tercer lado, es al doble rectángulo de los dos primeros lados.

Del vértice A (Fig. 288) bájese una perpendicular AD sobre el lado opuesto, y si cae dentro se tendrá.

$\overline{AC}^2=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2-2BC\times BD$, de lo que resulta

$$BD=\frac{\overline{AB}^2+\overline{BC}^2-\overline{AC}^2}{2BC};$$

pero como se tiene en el triángulo rectángulo ABD : $R : \text{sen}\, BAD :: AB : BD$, y por otra parte

$\text{sen}\, B-D=\cos B$, luego por consiguiente

$\cos B=\dfrac{R\times BD}{AB}$, y sustituyendo resulta

$$\cos B = R \times \frac{\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - \overline{AC}^2}{2AB \times BC}$$

Si cae afuera la perpendicular resulta (Fig. 289).

Fig. 289.

$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + 2BC \times BD$, y por consiguiente $BD = \frac{\overline{AC}^2 - \overline{AB}^2 - \overline{BC}^2}{2BC}$; pero como se tiene $\operatorname{sen} BAD = \cos ABD = \frac{R \times BD}{AB}$, y por otra parte ABD es suplemento de ABC, ó B, se tiene en consecuencia $\cos B = -\cos ABD = -\frac{R \times BD}{AB}$, de lo que resulta $\cos B = R \times \frac{\overline{AB}^2 \times \overline{BC}^2 \overline{AC}^2}{2AB \times BC}$.

Teorema. — En todo triángulo rectilíneo, la suma de los dos lados es á su diferencia, como la tangente y la mitad de la suma de los ángulos opuestos á estos lados es á la tangente de la mitad de la diferencia de estos mismos ángulos. (Fig. 288.)

Pues de la proporcion AB : AC : : sen C : sen B, se

saca $AC + AB : AC - AB :: \operatorname{sen} B + \operatorname{sen} C : \operatorname{sen} B - \operatorname{sen} C$; pero hemos visto precedentemente que

$$\operatorname{sen} B + \operatorname{sen} C : \operatorname{sen} B - \operatorname{sen} C :: \operatorname{tang}\left(\frac{B+C}{2}\right) :$$

$\operatorname{tang}\frac{B-C}{2}$; luego $AC + AB : AC - AB :: \operatorname{tang}\frac{B+C}{2} : \operatorname{tang}\frac{B-C}{2}$.

§ V.

Resolucion de los triángulos rectángulos.

Llamemos A, B, C, los tres ángulos del triángulo; *a*, *b*, *c*, los tres lados opuestos.

Designando por A el ángulo recto, y por *a* la hipotenusa. tendremos cuatro problemas que examinar :

Problema. — Dada la hipotenusa *a* y un lado *b*, hallar *c* y ademas *B* y *C*.

La proporcion $a : b :: R : \operatorname{sen} R$, determina $BC = 90 - B$.

$$c = \sqrt{a^2 b^2}.$$

Problema. — Dados *b* y *c*, hallar *a*, *B*, *C*.

La proporcion $c : b :: R : \operatorname{tang} B$, da el ángulo B

$$\cos B = R \times \frac{\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - \overline{AC}^2}{2AB \times BC}$$

Si cae afuera la perpendicular resulta (Fig. 289).

Fig. 289.

$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + 2BC \times BD$, y por consiguiente $BD = \frac{\overline{AC}^2 - \overline{AB}^2 - \overline{BC}^2}{2BC}$; pero como se tiene $\text{sen } BAD = \cos ABD = \frac{R \times BD}{AB}$, y por otra parte ABD es suplemento de ABC, ó B, se tiene en consecuencia $\cos B = -\cos ABD = -\frac{R \times BD}{AB}$, de lo que resulta

$$\cos B = R \times \frac{\overline{AB}^2 \times \overline{BC}^2 \overline{AC}^2}{2AB \times BC}.$$

Teorema. — En todo triángulo rectilíneo, la suma de los dos lados es á su diferencia, como la tangente y la mitad de la suma de los ángulos opuestos á estos lados es á la tangente de la mitad de la diferencia de estos mismos ángulos. (Fig. 288.)

Pues de la proporcion AB : AC :: sen C : sen B, se

saca AC + AB : AC − AB :: sen B + sen C : sen B − sen C; pero hemos visto precedentemente que

$$\text{sen } B + \text{sen } C : \text{sen } B - \text{sen } C :: \text{tang} \left(\frac{B+C}{2}\right) :$$

$\text{tang} \frac{B-C}{2}$; luego $AC + AB : AC - AB :: \text{tang} \frac{B+C}{2} :$ $\text{tang} \frac{B-C}{2}$.

§ V.

Resolucion de los triángulos rectángulos.

Llamemos A, B, C, los tres ángulos del triángulo; *a*, *b*, *c*, los tres lados opuestos.

Designando por A el ángulo recto, y por *a* la hipotenusa. tendremos cuatro problemas que examinar :

Problema. — Dada la hipotenusa *a* y un lado *b*, hallar *c* y ademas *B* y *C*.

La proporcion $a : b :: R :$ sen R, determina BC= 90—B.

$$c = \sqrt{a^2 b^2}.$$

Problema. — Dados *b* y *c*, hallar *a*, *B*, *C*.

La proporcion $c : b :: R :$ tang B, da el ángulo B

C es igual á $90-B$

a se determina por la proporcion sen $B : R :: b : a$.

Problema.—Dados a y B, hallar b y c.

Se hace las proporciones $R :$ sen $B :: a : b$. $R :$ cos $B :: a : c$.

Problema.—Dados b y B, hallar a y c.

$$b : a :: \text{sen } B : R, \text{ y } R : \cos B :: b : c.$$

§ VI.

Resolucion de los triángulos rectilineos.

Llamemos A, B, C, los tres ángulos de un triángulo; a, b, c, los tres lados opuestos. Cuatro problemas tendremos que examinar.

Problema.—Dados a y dos ángulos, hallar b y c.

Los dos ángulos conocidos determinan el tercero.
Las proporciones: sen $A :$ sen $B : a : b$.
sen $A :$ sen $C :: a : c$.
determina b y c.

Problema.—Dados a, b y A, hallar c, B y C.

La proporcion $a : b ::$ sen $A :$ sen B, da B ó $180-B$. El ángulo en cuestion puede tener dos valores, pero que solo tienen lugar cuando A es agudo y que $b > a$. Si A es obtuso, el ángulo en cuestion no puede serlo, así no habrá mas que una solucion, y si R siendo agudo se tiene $b < a$, tambien no hay mas que una solucion.

Conocido A y B conclúyese C, y despues c por la proporcion

$$\text{sen } A : \text{sen } C :: a : c.$$

Problema. — Dados a, b y C, hallar A, B y C.

$$\frac{A+B}{2} \text{ es igual á } \frac{180-C}{2}$$

Se tendrá la mitad de la diferencia poniendo $a+b : a-b ::$ tang $\frac{1}{2}(A+B) :$ tang $\frac{1}{2}(A-B)$.

Y así sucesivamente se conocerá A y B. El lado c se determina por la proporcion sen $A :$ sen $C :: a : c$.

Problema. — Dados a, b, c, hallar A, B, C.

Sábese que $\cos A = R\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)$; lo que da el ángulo A; B y C pueden hallarse por una fórmula semejante; pero por el cálculo se logra con mas comodidad observando que

$R^2 - R \cos A = 2 \text{ sen }^2 \frac{1}{2}A$; sustituyendo el valor de cos A resulta $2 \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2}A = R^2 \frac{(a^2-b^2-c^2+2bc)}{2bc} =$

$R^2 \frac{(a^2-(b-c)^2)}{2bc} = R^2 \frac{(a+b-c)(a-b+c)}{2bc}$ por consiguiente $\operatorname{sen} \frac{1}{2}A = R\sqrt{\frac{(a+b-c)(a-b+c)}{4bc}}$

CARTA VIGÉSIMASEGUNDA.

TRIGONOMETRIA ESFÉRICA.

§I.

Nociones preliminares.

Amigo Eugenio, en mi anterior he tratado de la trigonometría plana ó rectilínea por ser los triángulos que hay que resolver rectilíneos; en la presente mi objeto es acabar esta ciencia tratando de la otra parte en que los matemáticos acostumbran á dividirla, llamanla trigonometría esférica, porque los triángulos que se propone resolver estan formados sobre la superficie de una esfera por arcos de círculos máximos.

Antes de pasar adelante, pienso oportuno recordarte algunas definiciones cuyo conocimiento es indispensable para la inteligencia de la ciencia que nos ocupa.

cos A resulta $2\,\text{sen}^2\tfrac{1}{2}A = R^2\frac{(a^2-b^2-c^2+2bc)}{2bc} =$ $R^2\frac{(a^2-(b-c)^2)}{2bc} = R^2\frac{(a+b-c)(a-b+c)}{2bc}$ por consiguiente $\text{sen}\,\tfrac{1}{2}A = R\sqrt{\frac{(a+b-c)\,(a-b+c)}{4bc}}$

CARTA VIGÉSIMASEGUNDA.

TRIGONOMETRIA ESFÉRICA.

§ I.

Nociones preliminares.

Amigo Eugenio, en mi anterior he tratado de la trigonometría plana ó rectilínea por ser los triángulos que hay que resolver rectilíneos; en la presente mi objeto es acabar esta ciencia tratando de la otra parte en que los matemáticos acostumbran á dividirla, llamanla trigonometría esférica, porque los triángulos que se propone resolver estan formados sobre la superficie de una esfera por arcos de círculos máximos.

Antes de pasar adelante, pienso oportuno recordarte algunas definiciones cuyo conocimiento es indispensable para la inteligencia de la ciencia que nos ocupa.

Llámase polo de un círculo de la esfera un punto de la superficie igualmente lejano de todos los puntos de la circunferencia de este círculo; se demuestra que todo círculo trazado sobre la esfera tiene dos polos.

Un triángulo esférico es una parte de la superficie de la esfera compuesta por tres arcos de círculos máximos; estos arcos que se llaman los lados del triángulo, se suponen siempre menores que la semi-circunferencia; los ángulos que entre sí hacen sus planos son los ángulos del triángulo.

Un triángulo esférico toma el nombre de *rectángulo, isóscele, equilátero*, en los mismos casos que un triángulo rectilíneo.

Un polígono esférico es una parte de la superficie terminada por muchos arcos de círculos máximos.

Una pirámide esférica es la parte de sólido de la esfera comprendida entre los planos de un ángulo sólido cuyo vértice está en el centro; la base de la pirámide es el polígono esférico interceptado por los mismos planos.

Entendido esto pasemos á demostrar los teoremas siguientes.

Teorema. — En todo triángulo esférico un lado cualquiera es menor que la suma de los dos otros.

Esto resulta de que, en un ángulo triedro, un ángulo plano es menor que la suma de los otros dos.

Teorema — La suma de los tres lados de un triángulo esférico es menor que la circunferencia de un círculo máximo.

Pues la suma de tres ángulos planos de un tetraedro es menor que cuatro rectos.

Teorema. — Si se lleva un diámetro perpendicular contenido sobre la esfera, las estremidades de este diámetro serán los polos de este círculo.

Porque si se hace pasar un plano por este diámetro, este plano cortará el círculo en dos planos A, B y la esfera siguiendo un círculo teniendo por diámetro el diámetro de la esfera, se ve que si se hace volver este círculo alrededor del diámetro que se considera, describirá la superficie de la esfera, mientras que los dos puntos A y B describirán el círculo de seccion considerado en primer lugar.

Teorema. — Todo plano perpendicular á las estremidades de un radio es tangente á la esfera.

Porque si no fuese tangente tocaria la esfera en otro punto, luego la oblicua y perpendicular llevadas de un mismo punto á un mismo plano serian iguales, lo que es imposible.

Teorema. — El ángulo que entre sí hacen

dos arcos de círculos máximos es igual al ángulo formado por las dos tangentes de estos arcos en el vértice del arce.

Pues siendo el ángulo de un triángulo esférico el que está formado por los dos planos de los dos lados, el ángulo de dos planos se mide por el ángulo formado por dos perpendiculares elevados á la comun interseccion, y así se hallan en este caso las dos tangentes en el vértice del arco.

Teorema. — Dado el triángulo *ABC* (fig. 290), si, de los puntos *A, B, C*, como polos, se describen los arcos *EF, FD, DE,* que forman el triángulo *DEF*, recíprocamente los tres puntos *D, E, F,* serán los polos de los lados *BC, AC, AB*.

Pues el punto A, siendo el polo del arco EF, la distancia AE es un cuadrante; y el punto C, siendo el polo del arco DE, la distancia CE es igualmente un cuadrante, por consiguiente el punto E dista un cuadrante de cada uno de los puntos A y C, por cuya razon es el polo del arco AC. De la misma manera puede demostrarse que E es el

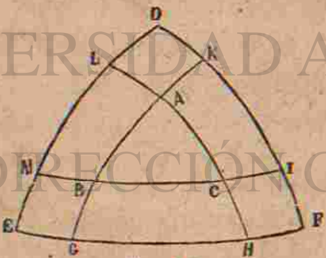


Fig. 290.

polo del arco BC, y F el del arco AB. Por consiguiente el triángulo ABC puede ser descrito por medio de DEF, como DEF por medio de ABC.

Teorema. -- Admitido cuanto acabo de establecer en el problema precedente, cada ángulo de uno de los triángulos *ABC*, *DEF*, tendrá por medida la semi-circunferencia menos el lado opuesto en el otro triángulo.

Prolónguese, si se quiere, los lados AB, AC, hasta encontrar EF en G y H; puesto que el punto A es el polo del arco GH, el ángulo A tendrá por medida el arco GH; pero el arco EH es un cuadrante lo mismo que GF, puesto que AE es el polo de AH, y F el polo de AG; luego EH+GF vale una media circunferencia. Mas EH+GF es lo mismo que EF+GH; luego el arco GH, que mide el ángulo A, es igual á una semi-circunferencia menos el lado EF.

De la misma manera el ángulo B tendrá por medida $\frac{1}{2}$ circunferencia —DF, y el ángulo C $\frac{1}{2}$ circunferencia —DE.

Esta propiedad debe ser recíproca entre los dos triángulos, pues que se describen de la misma manera, uno por medio de otro. Así hallaráse que los ángulos D, E, F, del triángulo DEF tienen respectivamente por medida $\frac{1}{2}$ circunferencia —BC, $\frac{1}{2}$ circ.—AC, $\frac{1}{2}$ circ.—AB; en efecto el ángulo D, por ejemplo, tiene por medida el arco MI. Este arco MI+BC=MC+BI=$\frac{1}{2}$ circ.; el arco MI, medida del ángulo D=$\frac{1}{2}$ circ.—BC, y así de los otros ángulos.

Los dos triángulos ABC, DEF, se llaman triángulos polares.

§ II.

Relaciones entre los ángulos y lados de un triángulo esférico.

Sea O (Fig. 291) el centro de la esfera en que está situado el triángulo ABC; llevo los radios OA, OB, OC; trazo sobre OA, las perpendiculares AD y AE, la una en el plano OAB, y la otra en el plano OAC, y supongo que en D y E encuentran los radios OB y OC prolongados; el ángulo DAE es igual al ángulo A del triángulo esférico, y tomando por unidad el radio OA, se tendrá $AD=\tan c$, $OD=\sec c$.

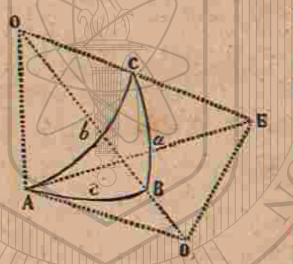


Fig. 291.

$$AE=\tan b \quad OE=\sec b.$$

Los triángulos DAE, DOE, dan, segun las fórmulas de la trigonometría rectilínea:

$$\overline{AE}^2+\overline{AE}^2-2AD.\ AE\cos A=\overline{DE}^2$$
$$\overline{OD}^2+\overline{OE}^2\quad 2OD.\ OE\cos a=\overline{DE}^2$$

Restando la segunda de la primera, y llamando 1 el radio de la esfera, resulta

$$1-\sec b\sec c\cos a+\tan b\tan c\cos A=o.$$

pero $\sec b=\frac{1}{\cos b}$, $\tan b=\frac{\operatorname{sen} b}{\cos b}$, $\cos c=\frac{1}{\cos c}$, luego resulta $1-\frac{\cos a}{\cos b\cos c}+\frac{\operatorname{sen} b\operatorname{sen} c\cos A}{\cos b\cos C}=0$

$$(1)\ \cos a=\cos b\cos c+\operatorname{sen} b\operatorname{sen} c\cos A.$$

Tal es la fórmula fundamental de la trigonometría esférica.

Es evidente que con una construccion semejante se pudiera tener las dos otras fórmulas:

$$(2)\ \cos b=\cos a\cos c+\operatorname{sen} a\operatorname{sen} c\cos B.$$

$$(3)\ \cos c=\cos a\cos b+\operatorname{sen} a\operatorname{sen} b\cos C.$$

que dan dos nuevas relaciones entre los tres lados del triángulo y un ángulo.

Para lograr una relacion entre dos lados y dos ángulos, es preciso eliminar un lado entre dos cualesquiera de estas ecuaciones.

La primera puede escribirse bajo la forma siguiente:

$$\cos A=\frac{\cos a-\cos b\cos c}{\operatorname{sen} b\operatorname{sen} c}$$

$$\text{y } \operatorname{sen}^2A=1-\cos^2A=1-\frac{(\cos a\cos b\cos c)^2}{\operatorname{sen}^2b\operatorname{sen}^2c}=$$
$$\frac{(1-\cos^2b)(1-\cos^2c)-(\cos a-\cos b\cos c)^2}{\operatorname{sen}^2b\operatorname{sen}^2c}=$$
$$\frac{1-\cos^2a-\cos^2b-\cos^2c+2\cos a\cos b\cos c}{\operatorname{sen}^2b\operatorname{sen}^2c}$$

Dividamos los dos números por $\text{sen}^2 a$ y estraigamos la raiz de estos dos números; el resultado será

$$\frac{\text{sen}\,A}{\text{sen}\,a}=\frac{\sqrt{1-\cos^2 a-\cos^2 b-\cos^2 c+2\cos a\cos b\cos c}}{\text{sen}\,a\,\text{sen}\,b\,\text{sen}\,c}$$

El mismo valor hallariamos en $\frac{\text{sen}\,B}{\text{sen}\,b}$ y $\frac{\text{sen}\,C}{\text{sen}\,c}$

Tenemos pues las dos nuevas ecuaciones :

$$(4)\quad \frac{\text{sen}\,A}{\text{sen}\,a}=\frac{\text{sen}\,B}{\text{sen}\,b},\quad \frac{\text{sen}\,A}{\text{sen}\,a}=\frac{\text{sen}\,C}{\text{sen}\,c}.$$

Lo que prueba que en un triángulo esférico los senos de los ángulos son entre sí como los senos de los lados opuestos.

Facil es hallar una relacion entre dos lados, el ángulo que comprenden, y el ángulo opuesto al uno de ellos; en efecto, eliminando $\cos c$ entre las ecuaciones (1) y (3) resulta $\cos a=\cos c\cos^2 b+\cos b\,\text{sen}\,a\,\text{sen}\,b\cos C+\text{sen}\,b\,\text{sen}\,c\cos A$. Observemos que $\cos a-\cos a\cos^2 b=\cos a\,\text{sen}^2 b$. y dividiendo todos por $\text{sen}\,b\,\text{sen}\,a$, resulta :

$$\frac{\cos a\,\text{sen}\,b}{\text{sen}\,a}=\cos b\cos C+\frac{\text{sen}\,c\cos A}{\text{sen}\,a}$$

Pero $\frac{\text{sen}\,c}{\text{sen}\,a}=\frac{\text{sen}\,C}{\text{sen}\,A}$; por consiguiente resulta

$$(5)\quad \cot a\,\text{sen}\,b=\cos b\cos C+\text{sen}\,C\cot A.$$

Por el mismo método puédense hallar las cinco ecuaciones siguientes :

$$(6)\quad \cot b\,\text{sen}\,a=\cos a\cos C\ \text{sen}\,C\cot B.$$

$$(7)\quad \cot a\,\text{sen}\,c=\cos c\cos B+\text{sen}\,B\cot A.$$

$$(8)\quad \cot c\,\text{sen}\,a=\cos a\cos B+\text{sen}\,B\cot C.$$

$$(9)\quad \cot b\,\text{sen}\,c=\cos c\cos A+\text{sen}\,A\cot B.$$

$$(10)\quad \cot c\,\text{sen}\,b=\cos b\cos A+\text{sen}\,A\cot C.$$

En fin puédese hallar una relacion entre un ángulo y tres ángulos, eliminando b y c entre las tres ecuaciones (1), (2) y (5). Con este objeto se lleva en la ecuacion (1) el valor sacado de la ecuacion (5), lo que da

$$\frac{\cos a\,\text{sen}\,b}{\text{sen}\,a}=\cos b\cos C+\frac{\text{sen}\,c\cos A}{\text{sen}\,a}$$

Y si se observa que $\frac{\text{sen}\,b}{\text{sen}\,a}=\frac{\text{sen}\,B}{\text{sen}\,A}$ y $\frac{\text{sen}\,c}{\text{sen}\,a}=\frac{\text{sen}\,C}{\text{sen}\,A}$

resulta sustituyendo :

$$\cos a\,\text{sen}\,B=\cos b\,\text{sen}\,A\cos C+\cos A\,\text{sen}\,C.$$

Por un medio semejante hállase la ecuacion $\cos b$, $\text{sen}\,A=\cos a\,\text{sen}\,B\cos C+\cos B\,\text{sen}\,C$.

Despues eliminando $\cos b$ entre estas dos últimas ecuaciones resulta.

$\cos a\,\text{sen}\,B=(\cos a\,\text{sen}\,B\cos C+\cos B\,\text{sen}\,C)\cos C+\cos A\,\text{sen}\,C$ y por consiguiente

$$\cos A=\frac{\cos A\,\text{sen}B-\cos a\,\text{sen}B\cos^2 C-\cos B\,\text{sen}C\cos c}{\text{sen}\,C}$$

y consiguientemente

$$(11)\quad \cos A=+\cos a\,\text{sen}\,B\,\text{sen}\,C-\cos B\cos C.$$

Tambien encontramos dos relaciones semejantes :

$$(12)\quad \cos B=\text{sen}\,A\,\text{sen}\,C\cos b-\cos A\cos C.$$

(13) cos C=sen A sen B cos c - cos A cos B.

Bastan estas fórmulas para la resolucion de los triángulos, no obstante á veces es cómodo recurrir á otras.

§ III.

An logias de Neper.

Las ecuaciones (1) y (2) pueden escribirse

$$\text{Cos } a-\cos b\cos c=\text{sen } b\,\text{sen } c\cos A,$$
$$\text{Cos } b-\cos a\cos c=\text{sen } a\,\text{sen } c\cos B,$$

de las que observando que

$$\frac{\text{sen } a}{\text{sen } b}=\frac{\text{sen A}}{\text{sen B}}\text{ se saca :}$$

$$\frac{\cos b-\cos a\cos c}{\cos a-\cos b\cos c}=\frac{\text{sen A}\cos B}{\text{sen B}\cos A}\text{, ó bien}$$

$$(P)\ \frac{\cos b-\cos a}{\cos b+\cos a}\times\frac{1+\cos c}{1-\cos c}=\frac{\text{sen (A}-\text{B)}}{\text{sen (A}+\text{B)}}$$

$$\text{Pero }\frac{\cos b-\cos a}{\cos b+\cos a}=\text{tang}\tfrac{1}{2}(a+b)\,\text{tang}\tfrac{1}{2}(a-b)$$

$$\frac{1+\cos c}{1-\cos c}=\frac{1}{\text{tang}^2\frac{1}{2}c}$$

$$\text{Sen (A}+\text{B)}=2\,\text{sen}\tfrac{1}{2}(\text{A}+\text{B})\cos\tfrac{1}{2}(\text{A}+\text{B}),$$

$$\text{y sen (A}-\text{B)}=2\,\text{sen}\tfrac{1}{2}(\text{A}-\text{B})\cos\tfrac{1}{2}(\text{A}-\text{B}).$$

Sustituyendo estos valores en la ecuacion (P) hállase :

$$(M)\ \text{tang}\tfrac{1}{2}(a+b)\,\text{tang}\tfrac{1}{2}(a-b)=$$
$$\text{tang}^2\tfrac{1}{2}c\left(\frac{\text{sen}\frac{1}{2}(\text{A}-\text{B})\cos\frac{1}{2}(\text{A}-\text{B})}{\text{sen}\frac{1}{2}(\text{A}+\text{B})\cos\frac{1}{2}(\text{A}+\text{B})}\right)$$

Por otro lado, á causa de $\frac{\text{sen } a}{\text{sen } b}=\frac{\text{sen A}}{\text{sen B}}$, se tiene :

$$(N)\ \frac{\text{sen } a+\text{sen } b}{\text{sen } a-\text{sen } b}=\frac{\text{tang}\frac{1}{2}(a+b)}{\text{tang}\frac{1}{2}(a-b)};$$

por lo cual la ecuacion (N) se vuelve

$$(Q)\ \frac{\text{tang}\frac{1}{2}(a+b)}{\text{tang}\frac{1}{2}(a-b)}=\frac{\text{sen A}+\text{sen B}}{\text{sen A}-\text{sen B}};$$

mas queda demostrado en la trigonometria rectilínea que $\frac{\text{sen } a+\text{sen } b}{\text{sen } a-\text{sen } b}=\frac{\text{tang}\frac{1}{2}(a+b)}{\text{tang}\frac{1}{2}(a-b)}$

y la ecuacion (M), multiplicada miembro á miembro con la ecuacion (Q), da, despues de estraidas las raices,

$$(14)\ \text{tang}\tfrac{1}{2}(a+b)=\text{tang}\tfrac{1}{2}c\frac{\cos\frac{1}{2}(\text{A}-\text{B})}{\cos\frac{1}{2}(\text{A}+\text{B})};$$

y dividiendo la ecuacion (M) miembro á miembro por la ecuacion (Q), hállase :

$$(15)\ \text{tang}\tfrac{1}{2}(a-b)=\text{tang}\tfrac{1}{2}c\frac{\text{sen}\frac{1}{2}(\text{A}-\text{B})}{\text{sen}\frac{1}{2}(\text{A}+\text{B})}.$$

Aplicando estas fórmulas al triángulo polar, se reemplaza a, b, c, A, B, por 180—A, 180—B, 180—C, 180—a, 180—b, lo que da :

$$(16)\ \text{tang}\tfrac{1}{2}(\text{A}+\text{B})=\cot\tfrac{1}{2}\text{C}\frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}(a+b)}.$$

$$(17)\ \text{tang}\tfrac{1}{2}(\text{A}-\text{B})=\cot\tfrac{1}{2}\text{C}\frac{\text{sen}\frac{1}{2}(a-b)}{\text{sen}\frac{1}{2}(a+b)}.$$

§ IV.

Resolucion de los triángulos esféricos rectángulos.

Para tener las fórmulas propias al triángulo rectángulo basta establecer A=90° ; y en este caso las relaciones precedentes se vuelven :

(α) $\cos a = \cos b \cos c$,
(β) $\text{sen}\, b = \text{sen}\, a\, \text{sen}\, B$, $\quad \text{sen}\, c = \text{sen}\, a\, \text{sen}\, C$,
(γ) $\text{tang}\, b = \text{tang}\, a \cos C$, $\quad \text{tang}\, c = \text{tang}\, a \cos B$,
(δ) $\text{tang}\, b = \text{sen}\, c\, \text{tang}\, B$, $\quad \text{tang}\, c = \text{sen}\, b\, \text{tang}\, C$,
(ε) $\cos B = \text{sen}\, C \cos b$, $\quad \cos C = \text{sen}\, B \cos c$,
(θ) $\cos a = \cot B \cot C$.

Solo pienso oportuno considerar los triángulos que tienen un solo ángulo recto, aunque en realidad los hay que tienen dos y aun tres ángulos rectos; pues, en este último caso, los tres lados son cuadrantes, habiendo dos en el otro, y teniendo el último ángulo por medida el tercer lado.

Conocidos a y b, hallar c, B, C.
Las relaciones (α), (β), (γ) nos dan

$$\cos c = \frac{\cos a}{\cos c}, \ \text{sen}\, B = \frac{\text{sen}\, b}{\text{sen}\, a}, \ \cos C = \frac{\text{tang}\, b}{\text{tang}\, a}.$$

Conociendo b y c, hallar A, B, C.
Las relaciones (α), (δ), dan :

$$\text{cosen}\, a = \cos b \cos c, \ \text{tang}\, B = \frac{\text{tang}\, b}{\text{tang}\, c}, \ \text{tang} C = \frac{\text{tang} c}{\text{sen}\ b}.$$

Conociendo a, B, hallar b, c, C.
Las relaciones (β), (γ), dan

$$\text{sen}\, b = \text{sen}\ a\ \text{sen}\, B, \ \text{tang}\, c = \text{tang}\ a \cos B, \ \cot C = \cos a\ \text{tang}\, B.$$

Conociendo b, B, hallar a, c, C.
Las relaciones (β), (δ), (ε) dan

$$\text{sen}\, a = \frac{\text{sen}\ b}{\text{sen}\, B}, \ \text{sen}\ c = \frac{\text{tang}\ b}{\text{tang}\, B}, \ \text{sen}\ C = \frac{\cos B}{\cos\ b}.$$

Este problema es susceptible en general de dos soluciones, la una correspondiente á una hipotenusa menor que 90°, la otra mayor.

Dados b, C, hallar a, c, B.
Las relaciones (γ), (δ), (ε) dan

$$\text{tang}\ a = \frac{\text{tang}\, b}{\text{tang} C}, \text{tang} c = \text{sen} b\, \text{tang} C, \cos B = \cos b\, \text{sen} C.$$

Dados B y c, hallar a, b, c.
Las ecuaciones (ε), (θ) dan :

$$\cos a = \cot B \cot C, \ \cos b = \frac{\cos B}{\cos C}, \ \cos c = \frac{\cos C}{\cos B}.$$

§ V.

Resolucion de cualquier triángulo esférico.

Conociendo a, b, c, hallar A, B, C.
Las ecuaciones (1) (2) (3)

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\operatorname{sen} b \operatorname{sen} c}$$

$$\cos B = \frac{\cos b - \cos a \cos c}{\operatorname{sen} a \operatorname{sen} c}.$$

$$\cos C = \frac{\cos c - \cos a \cos b}{\operatorname{sen} c \operatorname{sen} b}$$

dan inmediatamente la solucion.

Conociendo a, b, A, hallar c, B, C.

La proporcion $\frac{\operatorname{sen} a}{\operatorname{sen} b} = \frac{\operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} B}$ da desde luego el ángulo B.

Se puede determinar c y C por las analogías de Neper que dan :

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}c = \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(a-b) \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(A+B)}{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(A-B)}$$

$$\cot \tfrac{1}{2}C = \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(A-B) \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(a+b)}{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(a-b)}$$

Conociendo a, b, C, hallar A, B, c.

Las fórmulas (5) y (6)

$$\cot A = \frac{\cot a \operatorname{sen} b - \cos b \cos C}{\operatorname{sen} C},$$

$$\cot B = \frac{\cot b \operatorname{sen} a - \cos a \cos C}{\operatorname{sen} C}$$

determinan A y B.

La proporcion $\frac{\operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} A} = \frac{\operatorname{sen} c}{\operatorname{sen} a}$ determina el cos c.

Conociendo A, B, c, hallar a, b, C.

Las fórmulas (7) y (9)

$$\cot a = \frac{\cos A \operatorname{sen} B + \cos b \cos c}{\operatorname{sen} c},$$

$$\cot b = \frac{\cot B \operatorname{sen} A + \cos A \cos c}{\operatorname{sen} c}$$

dan a y b. Las analogías de Neper conducen tambien á estos valores :

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(a+b) = \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}c \frac{\cos \frac{1}{2}(A-B)}{\cos \frac{1}{2}(A+B)}$$

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(a-b) = \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}c \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(A-B)}{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(A+B)}.$$

La ecuacion $\frac{\operatorname{sen} a}{\operatorname{sen} c} = \frac{\operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} C}$ da el ángulo C.

Conociendo A, B, a, hallar b, c, C.

La ecuacion $\frac{\operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} B} = \frac{\operatorname{sen} a}{\operatorname{sen} b}$ da b.

Las analogías de Neper dan c y C.

Como se ha visto en el

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}c = \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(a-b) \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(A+B)}{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(A-B)}$$

$$\cot \tfrac{1}{2}C = \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(A-B) \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(a+b)}{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(a-b)}.$$

Conociendo A, B, C, hallar a, b, c.

Las ecuaciones (11), (12), (13)

$$\cos a = \frac{\cos A + \cos B \cos C}{\operatorname{sen} B \operatorname{sen} C}$$

$$\cos b = \frac{\cos A + \cos B \cos C}{\text{sen } A \text{ sen } C}$$

$$\cos c = \frac{\cos C + \cos A \cos B}{\text{sen } A \text{ sen } B}$$

resuelven el triángulo.

Concluyo aquí la trigonometria, cuyas nociones mas prolijas podrás, cuando gustes, adquirir en tratados mas estensos: la primera vez que te escriba pienso tratar la geometría analítica.

GEOMETRIA

ANALITICA.

$$\cos b = \frac{\cos A + \cos B \cos C}{\operatorname{sen} A \operatorname{sen} C}$$

$$\cos c = \frac{\cos C + \cos A \cos B}{\operatorname{sen} A \operatorname{sen} B}$$

resuelven el triángulo.

Concluyo aquí la trigonometria, cuyas nociones mas prolijas podrás, cuando gustes, adquirir en tratados mas estensos: la primera vez que te escriba pienso tratar la geometría analítica.

GEOMETRIA

ANALITICA.

CARTA VIGÉSIMATERCERA.

DE LA GEOMETRIA ANALITICA.

§ I.

De los problemas determinados.

Amigo, Eugenio, llámase geometría analítica aquella parte de las matemáticas cuyo fin es aplicar el álgebra á la resolucion de las cuestiones de geometría.

Las líneas, las superficies, los sólidos pueden referirse á una unidad de medida, y evaluarse en números para mayor generalidad, números que pueden representarse por letras, y bajo esta forma es evidente que pueden someterse á todos los cálculos de álgebra y aritmética.

A veces sucede que una cuestion geométrica es susceptible de ponerse tan fácilmente en ecuacion que, para lograrlo, no hay necesidad de reglas; trátese por ejemplo de dividir una recta en media y estrema razon; en este caso se designará por a la línea dada, y por x el mayor segmento; el mas pequeño segmento será entonces $a-x$, y se tendrá en consecuencia:

$$x^2=a(a-x)$$

cuyo resultado es $x=\frac{a}{2}\pm\sqrt{a^2+\frac{a^2}{4}}$.

El segundo valor es negativo y no puede convenir á la cuestion, pues es evidente que el segmento que se busca solo puede ser una cantidad positiva, de modo que solo se tiene una resolucion

$$x=-\frac{a}{2}+\sqrt{a^2+\frac{a^2}{4}}.$$

Es claro que despues de haber evaluado en número la línea dada, mediante cierta unidad longitudinal, no habrá mas que ejecutar los cálculos indicados en la fórmula precedente para conocer el número de las unidades linearias que contiene el segmento que se busca.

En caso que no se encuentre á primera vista la ecuacion que se busca, se hará uso de la regla siguiente debida á Newton.

Cuando se propone un problema, se lo deberá mirar como resuelto, comparar entre sí todas las cantidades que encierra sin ninguna distincion entre las que son conocidas y las desconocidas, y examinar despues como dependen unas de otras para reconocer cuales son que siendo dadas podrian con-

ducir á la determinacion de las otras; de esta manera será facil poner el problema en ecuacion.

No obstante no es siempre facil la aplicacion de esta regla, sucediendo á menudo que es preciso trazar en la figura líneas auxiliares que deben espresarse por medio de las líneas que se reputan conocidas, y cuyos valores deben despues entrar en los valores de las líneas que se reputan desconocidas, y en este caso los cálculos se vuelven tan enredados á causa de la multitud de términos que complican estos valores, que la regla precedente se modifica de esta manera.

Despues de haber trazado en la figura todas las líneas incógnitas ó no incógnitas que se hallan en la cuestion propuesta, se llevarán las líneas auxiliares que se juzgarán propias á facilitar su solucion empleando los teoremas de geometría. Estas líneas auxiliares serán nuevas incógnitas que deberán considerarse como si estuviesen en el mismo enunciado de la cuestion, y en este caso se establecerán las ecuaciones que entre sí ligan todas las líneas de la figura. Cuando el problema es determinado, se llegará siempre á un número de ecuacion igual al de las líneas incógnitas, y el problema de geometría se reducirá á la solucion de estas ecuaciones.

Resolviendo la cuestion precedente,

$$x^2=a\,(a-x),$$

hemos hallado en x dos valores, uno positivo y otro negativo; sin embargo al enunciar la ecuacion solo se preveia una solucion positiva. Es importante reconocer el valor negativo de x y lo que ha podido introducirlo en la ecuacion; para lograrlo, se observa que dividir una recta en media y estrema razon es (Fig. 292) dividir una recta AB en dos partes AM,

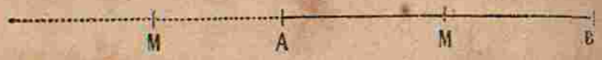


Fig. 292.

MB, de tal suerte que el segmento AM sea medio proporcional entre la línea entera AB y el otro segmento MB.

Estableciendo $AM=x$, $MB=a-x$, $AB=a$, la ecuacion del problema es:

$$x^2=a\,(a-x),$$

de donde se saca los dos valores

$$x=\frac{a}{2}\pm\sqrt{a^2+\frac{a^2}{4}}.$$

El primero es positivo y menor que a, determinando un punto M entre A y B. El segundo es negativo, y por esta razon no puede convenir. Cambiando el signo de x la ecuacion se vuelve

$$x^2=a\,(a+x),$$

y tomando positivamente el valor de x, que era anteriormente negativo, se tiene la espresion

$$x=\frac{a}{2}+\sqrt{a^2+\frac{a^2}{4}}.$$

que deberá satisfacer á la ecuacion precedente; pero, como esta ecuacion es precisamente la que se halla si en la prolongacion de la recta BA, mas allá de A, le busco un punto M′, tal que la distancia AM′ sea media proporcional entre la distancia BM′ y la recta dada AB, de lo que resulta que llevando el valor positivo de x del lado AB á la derecha de A, y el valor negativo de x tomada del lado AX á izquierda de A, prescindiendo del signo, se tendrá todas las soluciones del problema propuesto, generalizado de la siguiente manera.

En una recta indefinida que pasa por dos puntos dados, A y B, determinar un punto cuya distancia al punto A sea media proporcional entre su distancia al otro punto B y la distancia dada AB. Hubiérase podido proponer desde luego este último enunciado, considerando el problema como resuelto, y suponiendo que el punto M llenase todas las condiciones, hubiéramos hecho la incógnita $AM=x$, y hubiéramos llegado á la misma ecuacion $x^2=a\,(a-x)$, y á los mismos valores de x.

$$x^2=-\frac{a}{2}+\pm\sqrt{a^2+\frac{a^2}{4}}.$$

Pero desde el principio he introducido una restriccion agena al enunciado, pues he sometido los cálculos á la suposicion que el punto buscado no estaba colocado entre los puntos A y B. El valor positivo es el solo que responde á esta hipótesis, y el valor negativo, tomado positivamente y llevado del lado AX opuesto al lado en que se ha buscado el punto M, determinará la segunda solucion del problema.

Así el valor negativo sirve ya para completar la resolucion de un problema cuya cuestion propuesta no es mas que un caso particular, ya á poner una restriccion introducida para poder efectuar los razonamientos y cálculos. Pero lo que en todos casos debe observarse es que este valor, tomado como cantidad absoluta, se ha llevado del lado opuesto al en que debia estar situada la distancia que se busca.

§ II.

Problemas indeterminados. Modo de representar por ecuaciones los lugares geométricos. De las coordenadas y trasformacion de estas.

Has visto en trigonometría que $\text{sen}^2 a + \cos^2 a = R^2$; estableciendo $\text{sen}^2 a = x^2$, y $\cos^2 a = y^2$, se tendrá $x^2 + y^2 = R^2$. Esta última ecuacion representa un lugar geométrico, pues esta relacion tiene lugar en todos los puntos de la circunferencia del círculo cuyo radio es R, teniendo solo lugar en estos puntos.

Se ve por lo tanto que es posible representar una curva por medio de una ecuacion de dos incógnitas.

Para construir los diferentes puntos de esta curva se da cierto valor á una de las dos cantidades x ó y que se llama variable y se saca el valor de la otra, en cuyo caso se puede observar que hay dos valores, lo que yo habia hecho observar en trigonometría; pues el ángulo A tiene el mismo seno que 180—A,

pero el coseno de estos dos ángulos son de signos contrarios.

Para fijar en un plano la posicion de un punto M (Fig. 293), trázase en este plano dos rectas XX′ YY′, que se llaman *ejes*, y se considera este punto como el vértice de un paralelógramo MBOA, cuyos ejes son lados prolongados. La distancia MA de su igual AO se llama la *abcisa* del punto M, y la distancia MA de su igual BO se llama la *ordenada* de este punto. La abcisa y la ordenada de un punto son las *coordenadas* de este punto; y el punto O donde se cortan los ejes se llama el origen de las coordenadas.

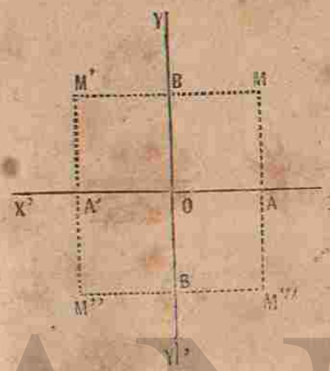


Fig. 293.

Represéntanse las abcisas por la letra X y las ordenadas por la letra Y; y se miran como positivas las abcisas contadas desde O hácia X; y como negativas las contadas desde O hasta X′ de la misma manera considéranse positivas las ordenadas contadas desde O hácia Y, y como negativas las contadas desde O hácia Y′. Ahora bien, si se considera 4 puntos M, M′, M″, M‴, cuyas coordenadas tengan los mismos valores absolutos x é y, las del punto M serán $+x$ y $+y$; las del punto M′ $-x$ y $+y$; las del punto M″, $-x$ y $-y$; y últimamente las del punto M‴ $+x$ y $-y$.

Así se conoce perfectamente la posicion de un punto en un plano cuando se conoce el valor absoluto y los signos de sus coordenadas.

El eje YY′ se llama el eje de las ordenadas ó el eje de las y, y el eje XX′, el de las abcisas ó el eje de las x.

Hemos visto que la ecuacion del círculo referida á dos diámetros rectangulares, era $x^2+y^2=R^2$; en este caso los dos diámetros son los dos ejes XX′ é YY′ rectangulares á los que la curva se refiere. Supongamos que se quiera buscar la ecuacion del círculo referido á dos ejes paralelos á los primeros; llamemos α y ϵ las coordenancias de este nuevo origen (Fig. 394). Sea O el centro y M un punto de la cir-

Fig. 294.

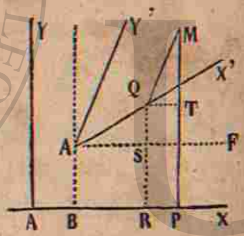


Fig. 295.

cunferencia; llevemos OB, MP, perpendiculares al eje AX y OQ, perpendicular á MP. El triángulo OMQ da $OQ^2+MQ^2=OM^2$; y como $OQ=AP-AR=x-a$, $MQ+MP-OB=y-\epsilon$ y $OM=R$, luego la ecuacion del círculo referido á sus nuevos ejes es:

$$(x-a)^2+(y-\epsilon)^2=R^2.$$

Este proceder de trasformacion es general.

Para hallar la ecuacion B de una curva referida á nuevos ejes paralelos á los primeros, débese cam-

biar, en la ecuacion A, x en $x-a$ é y en $y-b$; a y designando las coordinadas del nuevo origen referido á los antiguos ejes.

Pasemos al caso general de trasformacion en que al mismo tiempo se cambia el origen y direccion de los ejes.

Sean AX y AY los ejes primitivos (Fig. 395) que entre sí forman el ángulo $YAX=\theta$; para determinar los nuevos ejes A′X′ y AY′, basta conocer las coordenadas AB, A′B del origen A′ y los ángulos X′A′F é Y′A′F, que hacen estos ejes con la recta A′F paralela á AX; designemos estas dos coordenadas por a y b, y los dos ángulos por α y α'.

Sea M un punto cualquiera; llévese MP paralela á AY y MQ paralela á A′Y′, las antiguas coordenadas del punto M serán $AP=x'$, $PM=y$, y las nuevas serán $A'Q=x'$, $MQ=y'$.

Por el punto Q llévese QR paralela á AY y QT paralela á AX, de lo que resultará.

$$AP \text{ ó } x=a+A'S+QT,\quad PM \text{ ó } y=b+QS+MT.$$

Segun la trigonometría el triángulo A′QS da:

$$\frac{A'S}{\text{sen } A'QS}=\frac{QS}{\text{sen } QA'S}=\frac{A'Q}{\text{sen } A'SQ}.\quad \text{Pero } AQ=x'.$$

$$\text{Sen } A'QS=\text{sen } EA'x'=\text{sen } (\theta-\alpha),$$

$$\text{Sen } QA'S=\text{sen } \alpha,$$

$$\text{Sen } A'SQ=\text{sen } (180-\theta)=\text{sen } \theta.$$

$$\text{Luego } \frac{A'S}{\text{sen}(\theta-\alpha)}=\frac{QS}{\text{sen } \alpha}=\frac{x'}{\text{sen } \theta}$$

$$A'S=\frac{x'\text{sen}(\theta-\alpha)}{\text{sen } \theta},\quad QS=\frac{x'\text{sen } \alpha}{\text{sen } \theta}.$$

De un modo semejante el triángulo MQT da :

$$\frac{QT}{\text{sen}QMT}=\frac{MT}{\text{sen}MQT}=\frac{MQ}{\text{sen}MTQ}, \text{ pero } MQ=y'.$$

Sen QMT=sen $y'A'E$=sen $(\theta-a')$; sen MQT=sen $y'A'F$=sen α'; sen MTQ=sen $(180-\theta)$=sen θ,

de lo que resulta $\frac{QT}{\text{sen}(\theta-\alpha')}=\frac{MT}{\text{sen}\,\alpha'}=\frac{y'}{\text{sen}\,\theta}$.

y por consiguiente

$$QT=\frac{y'\text{sen}(\theta-\alpha')}{\text{sen}\,\theta}, MT=\frac{y'\text{sen}\,\alpha'}{\text{sen}\,\theta}.$$

Reemplazando A'S, QT, QS, MT, por sus valores, se halla :

$$x=\alpha+\frac{x'\text{sen}(\theta-\alpha)+y'\text{sen}(\theta-\alpha')}{\theta}, \quad \frac{y=\varepsilon+y'\alpha+y'\text{sen}\alpha'}{\theta}$$

Para pasar de un sistema de coordenadas rectangulares al sistema de coordenadas oblicuas se hace $\theta=90$. Resultan :

$$x=\alpha+x' \cos \alpha+y' \cos \alpha',$$
$$y=\varepsilon+x' \text{ sen } \alpha+y' \text{ sen } \alpha.$$

Para pasar de un sistema rectangular á otro tambien rectangular, se pone $\alpha'=90+\alpha$, resultando :

$$x=a\times x' \cos \alpha-y' \text{ sen } \alpha,$$
$$y=b+x' \cos \alpha+y \cos \alpha.$$

§ III.

Clasificacion de las líneas.

Cualquiera relacion existente entre dos variables

x é y, espresada por una ecuacion, representa generalmente una curva, de manera que es infinito el número de curvas diversas que así puede representarse.

Llámanse curvas algebráicas todas las que se representan por una ecuacion de la forma $Ay^m+(Bx+c)y^{m-1}+(Dx^2+Ex+F)y^{m-2}....=0$, y trascendentes todas las demas.

Clasifícanse las líneas algebráicas segun el grado de sus ecuaciones, relativamente á las coordenadas x é y, siendo marcado el orden de la línea por el esponente de este grado.

Me contentaré con hacerte conocer las curvas contenidas en la ecuacion general del segundo grado, $Ay^2+Bxy+Cx^2+Py+Ex+F=0$. Para pasar en revista las diferentes figuras que esta ecuacion representa, haré diversas hipótesis sobre diversos coeficientes que contiene, y empezaré por suponer $A=0$, $B=0$, y $C=0$; lo que reduce la ecuacion al primer grado, y, dividiendo todos los términos restantes por el coeficiente D, resulta :

$$y+ax+b=0.$$

Para mayor simplificacion, supongamos $b=0$.

La ecuacion $y+ax=0$ representa una línea M recta, pasando por el origen de las coordenadas; y la ecuacion $y+ax+b=0$, una recta N paralela á la primera, y cortando el eje de las y en un punto cuya ordenada es b; lo que es facil de verificar.

Muchos problemas pueden proponerse interesantes, sobre los cuales no insistiré no presentando dificultad considerable.

La ecuacion general del segundo grado tiene dos variables :

$Ay^2+Bxy+Cx^2+Dy+Ex+F=0$ resuelta con relacion á y da :

$$y=\frac{B}{2A}x-\frac{D}{2A}\pm\frac{1}{2A}.$$

$$\sqrt{(B^2-4AC)x^2+2(BD-2AE)x+D^2-4AF}.$$

que se escribe

$$y=ax+b\pm G\sqrt{nx^2+px+q}.$$

Para construir la curva representada por esta ecuacion es evidente que bastará construir la recta $y=ax+b$, y de llevar encima y abajo en una paralela al eje de las Y (Fig. 296) dos longitudes $\alpha\varepsilon$ y $\varepsilon\gamma$ iguales entre sí, é iguales al valor particular que toma la espresion

Fig. 296.

$$G\sqrt{nx^2+px+q}$$

cuando $x=\infty$, la recta $\delta\varepsilon$ se llama diámetro, porque corta en dos partes iguales todas las cuerdas paralelas al eje de las Y.

La forma de la curva depende de los coeficientes n, p, q.

Si n es negativo, x no puede crecer indefinidamente, como se demuestra en álgebra. En este caso la curva es cerrada, pues está limitada en todos sentidos.

Si n es positivo, la curva es ilimitada en todos sentidos, esto es, en el sentido de las X positivas y negativas, y en el de las Y positivas y negativas.

Si $n=o$, se tiene $G\sqrt{px+q}$; si se toma x del mismo signo que p, el radical será siempre real mas allá de cierto valor. Si se toma x con signo contrario, el radical se vuelve imaginario mas allá de cierto valor, y en este caso la curva será limitada de un modo elimitada de otro.

Trasportando los ejes paralelamente á sí mismos, lo que equivale á cambiar x en $x'+a$, y en $y'+b$, en la ecuacion general resulta :

$$Ay'^2+Bx'y'+Cx'^2+(2Ab+Ba+D)y'+(2Ca+Bb+E)x'+Ab^2+Bab+Ca^2+Db+Ea+F=0.$$

Como nada queda especificado sobre a y b, puedo determinar estas dos longitudes por las condiciones siguientes :

$$2Ab+Ba+D=0, \text{ y } 2Ca+Bb+E=0, \text{ lo que da}$$

$$a=\frac{2AE-BD}{B^2-4AC}\ b=\frac{2CD-BE}{B^2-4AC};$$

y como sabemos que B^2-4AC ha sido representado por n en el radical $\sqrt{nx^2+px+q}$; se ve en consecuencia que la simplificacion solo tiene lugar en $n\lessgtr 0$. En estos dos casos, la ecuacion simplificada es de la forma siguiente :

$$Ay'^2+Bx'y'+Cx'^2+Q=0.$$

Procuremos ahora reducirla empleando coordenadas que tengan el mismo origen, pero en diferentes direcciones de las primeras; con este objeto reemplacemos x' por $x''\cos\alpha - y''\operatorname{sen}\alpha$, é y por $x''\operatorname{sen}\alpha + y''\cos\alpha$; el resultado será :

$$\left.\begin{array}{l} A\cos^2\alpha \\ +C\operatorname{sen}^2\alpha \\ -B\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha \end{array}\right| y''2 \left.\begin{array}{l} +2A\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha \\ -2C\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha \\ +B\cos^2\alpha \\ -B\operatorname{sen}^2\alpha \end{array}\right| x''y'' \left.\begin{array}{l} +A\operatorname{sen} \\ +C\cos^2\alpha \\ +B\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha \end{array}\right| x''^2+Q=0$$

Puédese hacer desaparecer el término en $x''y''$; pues poniendo $2\,(A-C)\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha + B\,(\cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2 a)=0$, resulta

$$\operatorname{Tang} 2\alpha = \frac{-B}{A-B}.$$

Así en los dos primeros casos, la ecuacion general es de la forma $Mx^2+Ny^2+2=0$.

Volvamos ahora al caso en que el coeficiente n del radical sea cero, lo que equivale á $B^2=4AC$; y en la fórmula general llevemos las fórmulas de trasformacion y direccion de las dadas

$$\left.\begin{array}{l} A\cos^2\alpha \\ +C\operatorname{sen}^2\alpha \\ -B\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha \end{array}\right| y''2 \left.\begin{array}{l} +2A\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha \\ -2C\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha \\ +B\cos^2\alpha \\ -B\operatorname{sen}^2\alpha \end{array}\right| x''y'' \left.\begin{array}{l} +A\operatorname{sen}^2\alpha \\ +C\cos^2\alpha \\ +B\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha \end{array}\right| x''^2+Q=0$$

ecuacion que simplificándola puede escribirse de la manera siguiente :

$$A'y''^2+B'x''y''+C'x''^2+Q'=0;$$

ahora bien, disponiendo el ángulo a de manera que se pueda hacer desaparecer el término en $x''y''$, la relacion $B'^2=4A'C'=0$, nos muestra que uno de los coeficientes A' ó C' tambien desaparece, de manera que la ecuacion se presenta bajo la forma :

$$M'y''^2+N'y'+Px'+Q'=0.$$

Ahora trasportemos los ejes paralelamente á sí mismos, poniendo $y''=y'''+p, x''=x'''+q$, tendremos :

$$M'y'''^2+(2M'p+N')y'''+Px'''+(M'p^2+N'p+P'q+Q')=0.$$

No pudiendo destruir á la vez el término en y''' y en x''', pues que P no varia, se pone:

$$2M'p+N'=0, \text{ y } M'p^2+N'p+P'q+Q'=0$$

lo que reduce en fin la ecuacion á la forma

$$M'y'''^2+Px'''=0.$$

§ IV.

De la elipse, asíntota, etc.

Hemos visto que en el caso en que B^2-4AC es mayor que cero, la ecuacion general del segundo grado puede reducirse á la forma :

$$Mx^2+Ny^2+R=0.$$

Eliminando x é y entre esta ecuacion y la ecuacion $y=ax$ de una recta POP' (Fig. 297) pasando por el origen, resultan valores iguales y signos contra-

Procuremos ahora reducirla empleando coordenadas que tengan el mismo origen, pero en diferentes direcciones de las primeras; con este objeto reemplacemos x' por $x''\cos\alpha - y''\,\mathrm{sen}\,\alpha$, é y por $x''\,\mathrm{sen}\,\alpha + y''\cos\alpha$; el resultado será :

$$\begin{array}{l|l|l|l} A\cos^2\alpha & y''2 + 2A\,\mathrm{sen}\,\alpha\cos\alpha & x''y'' + A\,\mathrm{sen} & x''^2 + Q = 0 \\ +C\,\mathrm{sen}^2\alpha & \quad -2C\,\mathrm{sen}\,\alpha\cos\alpha & \quad +C\cos^2\alpha & \\ -B\,\mathrm{sen}\,\alpha\cos\alpha & \quad +B\cos^2\alpha & \quad +B\,\mathrm{sen}\,\alpha\cos\alpha & \\ & \quad -B\,\mathrm{sen}^2\alpha & & \end{array}$$

Puédese hacer desaparecer el término en $x''y''$; pues poniendo $2\,(A-C)\,\mathrm{sen}\,\alpha\cos\alpha + B\,(\cos^2\alpha - \mathrm{sen}^2 a) = 0$, resulta

$$\mathrm{Tang}\,2\alpha = \frac{-B}{A-B}.$$

Así en los dos primeros casos, la ecuacion general es de la forma $Mx^2 + Ny^2 + 2 = 0$.

Volvamos ahora al caso en que el coeficiente n del radical sea cero, lo que equivale á $B^2 = 4AC$; y en la fórmula general llevemos las fórmulas de trasformacion y direccion de las dadas

$$\begin{array}{l|l|l|l} A\cos^2\alpha & y''2 + 2A\,\mathrm{sen}\,\alpha\cos\alpha & x''y'' + A\,\mathrm{sen}^2\alpha & x''^2 + Q = 0 \\ +C\,\mathrm{sen}^2\alpha & \quad -2C\,\mathrm{sen}\,\alpha\cos\alpha & \quad +C\cos^2\alpha & \\ -B\,\mathrm{sen}\,\alpha\cos\alpha & \quad +B\cos^2\alpha & \quad +B\,\mathrm{sen}\,\alpha\cos\alpha & \\ & \quad -B\,\mathrm{sen}^2\alpha & & \end{array}$$

ecuacion que simplificándola puede escribirse de la manera siguiente :

$$A'y''^2 + B'x''y' + C'x''^2 + Q' = 0;$$

ahora bien, disponiendo el ángulo a de manera que se pueda hacer desaparecer el término en $x''y''$, la relacion $B'^2 = 4A'C' = 0$, nos muestra que uno de los

coeficientes A' ó C' tambien desaparece, de manera que la ecuacion se presenta bajo la forma :

$$M'y''^2 + N'y' + Px' + Q' = 0.$$

Ahora trasportemos los ejes paralelamente á sí mismos, poniendo $y'' = y''' + p, x'' = x''' + q$, tendremos :

$$M'y'''^2 + (2M'p + N')y''' + Px''' + (M'p^2 + N'p + P'q + Q') = 0.$$

No pudiendo destruir á la vez el término en y''' y en x''', pues que P no varia, se pone :

$$2M'p + N' = 0, \text{ y } M'p^2 + N'p + P'q + Q' = 0$$

lo que reduce en fin la ecuacion á la forma

$$M'y'''^2 + Px''' = 0.$$

§ IV.

De la elipse, asiutota, etc.

Hemos visto que en el caso en que $B^2 - 4AC$ es mayor que cero, la ecuacion general del segundo grado puede reducirse á la forma :

$$Mx^2 + Ny^2 + R = 0.$$

Eliminando x é y entre esta ecuacion y la ecuacion $y = ax$ de una recta POP' (Fig. 297) pasando por el origen, resultan valores iguales y signos contrarios, de lo que resulta que las dos longitudes OP′ y OP son iguales y por consiguiente su origen es el centro de la curva, pues todas las cuerdas que pasan por este punto las divide en dos partes iguales. Si se resuelve la ecuacion relativamente á x, por ejemplo, resulta :

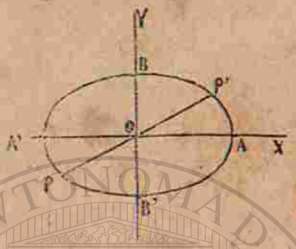


Fig. 297.

$$x \pm \sqrt{\frac{-R-NY^2}{M}},$$

de lo que se concluye que por un valor de y, se halla en x dos valores iguales y de signos contrarios; así el eje de Y divide en dos partes iguales todas las cuerdas paralelas al de X, y de la misma manera que el eje de X divide en dos partes iguales todas las cuerdas paralelas al eje de las Y. Las dos líneas AA′, BB′, se llaman los ejes de la curva, y si nos las representamos por las letras $2a$ y $2b$ tendremos :

$a^2 = -\frac{R}{M}$, y $b^2 = -\frac{R}{N}$; y por consiguiente la ecuacion se volverá : $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$.

Tal es la ecuacion de la curva llamada *elipse* referida á su centro y á sus ejes.

Si del punto O (Fig. 298) se describe un arco de círculo con un radio igual al medio eje a, este arco cortará el arco de las Y en dos puntos F′F′ simétricamente colocados á los dos lados del eje de las Y.

Estos puntos llamados focos gozan de muchas propiedades que me propongo hacerte notar.

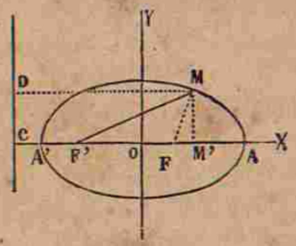


Fig. 298.

Llamemos c la distancia F′O, tendremos $c^2 = a^2 - b^2$; busquemos la distancia del punto M situado en la curva á cada uno de los focos designando por x é y las coordenadas del punto, tendremos á causa de los triángulos rectángulos, MF′M, y MFM′ las dos ecuaciones $ME' = \sqrt{y^2 + (c+x)^2}$, y $MF = \sqrt{y^2 + (x-c)^2}$; de lo que resulta $MF' + MF = 2a$. Así llamando *radio vector* toda recta que parte de un foco y acaba en una curva, puédese decir que la suma de dos radios vectores, llevados desde un mismo punto de la elipse á los dos focos es constante.

Facil es ver ahora que, para describir una elipse de un movimiento continuo, basta tomar un cordon y atarlo á los dos puntos F′F′, despues de haberlo hecho pasar en un anillo. Haciendo deslizar este anillo sobre un plano que pase por los dos puntos F′M, de manera que se estienda el cordon, el camino recorrido representará una elipse.

Tomada la longitud $OC = \frac{a^2}{c}$, tiremos una perpendicular CD; esta perpendicular será una directriz de la elipse, es decir que será constante la razon de la distancia M′F′ á la longitud de la distancia MD, bajada sobre la directriz del punto M, pues, se tiene

$$MF':MD::a+\frac{cx}{a}:x+\frac{a^2}{c}::c:a;$$

la otra directriz está situada del otro lado del eje de las Y, y á una distancia igual.

La ecuacion de una recta que pase por dos puntos, cuyas coordenadas son x', y', x'', y'', es:

$$y-y'=\frac{y'=y''}{x'=x''}(x-x').$$

Y si estos dos puntos estuviesen sobre la elipse se tiene:

$$a^2y'^2+b^2x'^2=a^2b^2 \quad a^2y''^2+b^2x''^2=a^2b^2,$$

y por consiguiente $a^2(y'^2-y''^2)+b^2(x'^2-x''^2)=0$, y consecutivamente $\frac{y'-y''}{x'+x''}=-\frac{b^2(x'-x'')}{a^2(y'+y'')}$;

la ecuacion pues de la secante es de la forma:

$$y-y'=-\frac{b^2(x'-x'')}{a^2(y+y'')}(x-x').$$

Si la secante se vuelve tangente los puntos de interseccion se reunirán en un solo, y se tendrá: $x'=x''$, $y=y''$; la ecuacion de la tangente será:

$$y-y'=-\frac{b^2x'}{a^2y'}(x-x'),\ \text{ó bien}$$

$$a^2yy'+b^2xx'=a^2b^2.$$

Siendo $x=-\frac{b^2x'}{a^2y^2}$ la tangente trigonométrica del

ángulo que hace esta recta con el eje de las x, resulta que la ecuacion de la normal, pasando por el mismo punto es:

$$y-y'=\frac{a^2y'}{b^2x'}(x-x').$$

En efecto, $y=mx+n$ siendo la ecuacion de una recta PQ (Fig. 299), m designa la tangente del ángulo ω.

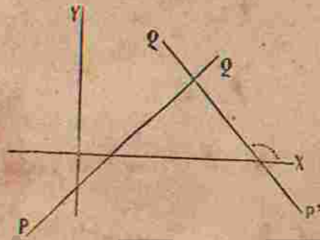


Fig. 299.

$Y=m'n+n'$ siendo la ecuacion de una recta P'Q', perpendicular á la primera, se tiene $m'=$ tang ω' é igual á cot ω; pero como tang ω cot ω$=1$, en este caso será $mm'=1$, y su resultado final:

$$\frac{a^2y'}{b^2x'}=-\frac{1}{\frac{bx'}{a^2y'}}$$

Las fórmulas para pasar de un sistema de coordenadas rectángular á un sistema de coordenadas oblicuas sin cambiar del origen son las siguientes:

$$Y=x'\,\text{sen}\,\alpha+y'\,\text{sen}\,\beta \quad x=x'\cos\alpha+y'\cos\beta;$$

y sustituyendo en la ecuacion de la elipse estos valores de x y de y resulta:

$$\left.\begin{matrix}a^2\cos^2\alpha\\+b^2\text{sen}^2\alpha\end{matrix}\right|x'^2+\left.\begin{matrix}a^2\cos^2\beta\\+b^2\text{sen}^2\beta\end{matrix}\right|y'^2+\left.\begin{matrix}2a^2\cos\alpha\cos\beta\\+2b^2\text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\beta\end{matrix}\right|x'y'=a^2b^2.$$

Para hacer desaparecer el término en xy, se debe igualar el coeficiente $2a^2 \cos\alpha \cos\beta + 2b^2 \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta$ á cero, de donde se saca $\operatorname{tang}\alpha \operatorname{tang}\beta = -\frac{b^2}{a^2}$.

Por medio de esta relacion se podrá dar á uno de los ejes coordenados la direccion que se quiera, hallando al momento la del otro, y siempre que se satisfaga esta relacion, se dice que la curva se refiere á sus diámetros conjugados, y su ecuacion es de la siguiente forma $a'^2y'^2 + b'^2x'^2 = a'^2b'^2$.

Llámanse cuerdas suplementares las que se llevan de un mismo punto de la curva á las estremidades de un mismo diámetro. Sea $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$ la ecuacion de una elipse referida á sus ejes rectangulares.

Sea AA′ un diámetro, llevemos de un punto cualquiera B las cuerdas suplementares BA, BA′, llamemos $x'-y'$ las coordenadas del punto A′; las de A′ serán $x'-y'$; sean en fin x'' é y'', las del punto B; la ecuacion de la recta BA′ será

$$y-y = \frac{y''-y'}{x''-x'}(x-x'); \text{ la de BA será :}$$

$$y+y' = \frac{y''+y'}{x''\pm x}(x+x');$$

el producto $\left(\frac{y''-y'}{x''-x'}\right)\left(\frac{y''+y'}{x''+x'}\right)$ es igual á $-\frac{b^2}{a^2}$.

Esta es precisamente la condicion que liga los diámetros; de lo que resulta que dos diámetros paralelos á dos cuerdas suplementares son conjugados.

§ V.

De la hipérbola.

La ecuacion general del segundo grado en el caso que $B^2-4AC<0$, puede reducirse á la forma siguiente :

$$Mx^2 - M'y'^2 + R = 0.$$

ecuacion que puede escribirse bajo la forma :

$$a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2$$

poniendo $\frac{R}{M} = a^2$ y $\frac{R}{M'} = b^2$.

El estudio de esta nueva curva llamado hipérbola es enteramente análogo al de la precedente. Si se resuelve con relacion á una de las invariables, despues de haber supuesto la otra nula, hallaráse $x = \pm a$ de un lado, é $y = \pm b\sqrt{-1}$, del otro ; así uno de estos ejes solamente corta la curva ; llamándose por esta propiedad transverso.

La distancia F′0 de un foco al centro es igual á $\sqrt{a^2+b^2}$, y ordinariamente se la llama c la diferencia F′M—FM de dos radios rectores es igual á $2a$.

Dos directrices existen como en la elipse.

En fin es análogo al de la elipse el cálculo de la tangente de la normal, como igualmente la determinacion de los diámetros conjugados de las cuerdas suplementares, etc.

Si, sin cambiar el origen de las coordenadas, se pasa á los ejes oblicuos de manera que se tenga

$$\operatorname{tang}\alpha=\frac{b}{a}\ \operatorname{tang}\beta=-\frac{b}{a}$$

la ecuacion se reduce á $axy^2=K^2$.

Estos nuevos ejes toman el nombre de *asíntota* á causa de la propiedad que tienen de ir aproximándose constantemente de la curva sin encontrarla jamas.

Llamemos $x'y'$, $x''y''$, las coordenadas de los dos puntos de la hipérbole, la ecuacion de la secante pasando por estos es la siguiente :

$$y-y'=\frac{y'-y''}{x'-x''}(x-x')$$

Pero $x'y'=k^2$ y $x''y''=k^2$ luego $\frac{y'-y''}{x'-x''}=\frac{x'-x''}{k^2}$ y haciendo $x'=x''$, $y'=y''$ la secante se vuelve tangente y la antigua ecuacion $y-y'=\frac{x'x''}{k^2}(x-x)$ se vuelve $y-y'=\frac{x'^2}{k^2}(x-x)$; si en esta última ecuacion se hace sucesivamente $x=0$ é $y=0$ se deducen dos valores $y=y'$ $x=2x'$ que (Fig. 300) evidentemente indican que BM=AM.

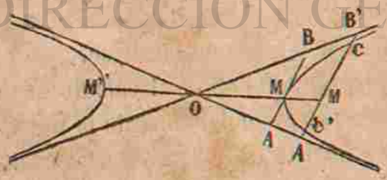


Fig. 300.

Llevando una paralela B'A' á la tangente

es facil establecer que B'C=CA', pues ademas de ser B'M'=M'A', como CC' es una cuerda paralela á la tangente BA, el diámetro M''OMM' que pasa por el punto de contacto toca esta cuerda en dos partes iguales CM' y CM', lo que establece que BC=A'C'.

§ VI.

De la parábola.

Fáltanos examinar la curva representada por la forma $M'y'''^2+Px'''=0$; reemplazando y''' por y, x''' por x, y $\frac{P}{M'}$ por $-2p$ resulta $y^2=2px$ que representa la ecuacion de la parábola bajo la forma ordinaria y referida á su vértice.

Tomemos (Fig. 301) $OF=OA=\frac{P}{2}$, y llevemos AB perpendicular al diámetro OX. Esta perpendicular será la directriz y F el foco de la curva.

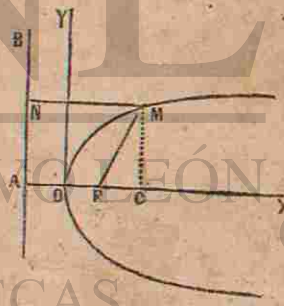


Fig. 301.

Sea M un punto de la curva, X Y sus coordenadas, juntemos MF y bajemos la perpendicular MN.

Se tiene $MN=AO+OC=x+\frac{p}{2}$

$$F'M^2 = y + \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 = y^2 + x^2 - px + \frac{p^2}{4} = x^2 + px +$$
$$\frac{p^2}{4} = \left(x + \frac{p^2}{2}\right)$$

de lo que enfin resulta MN—FM.

La ecuacion de la tangente en el punto $x'y'$ es como puede verse partiendo de la secante :

$$yy' = p(x + x')$$

y poniendo $y=0$, resulta $x+x'=0$, es decir que siempre se tiene

$$P'O = OP \text{ (Fig. 502).}$$

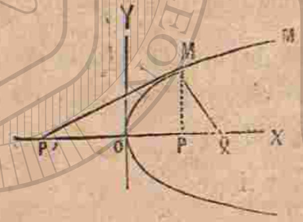


Fig. 502.

La ecuacion de la normal en el punto $x'y'$ es :

$$y - y' = -\frac{y'}{p}(x - x')$$

Haciendo $y=0$, resulta :

$y' = \frac{y'}{p}(x - x')$ luego $p + x' = x = QO$, luego PQ ó la subnormal $= p$.

La ecuacion $y^2 = 2px$ representa una curva cuyo eje OX es evidentemente un diámetro, pues que divide en dos partes iguales todas las cuerdas paralelas al eje de las y. Trasportando el origen á otro punto cualquiera de la curva, facil será establecer que en esta posicion el nuevo diámetro es paralelo al primero.

Concluyo con esto la geometría analítica ; en mi próxima carta pienso tratar de la estática.

$$F'M^2 = y^2 + \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 = y^2 + x^2 - px + \frac{p^2}{4} = x^2 + px +$$
$$\frac{p^2}{4} = \left(x + \frac{p^2}{2}\right)$$

de lo que enfin resulta MN—FM.

La ecuacion de la tangente en el punto $x'y'$ es como puede verse partiendo de la secante :

$$yy' = p(x + x')$$

y poniendo $y=0$, resulta $x+x'=0$, es decir que siempre se tiene

$$P'O = OP \text{ (Fig. 302).}$$

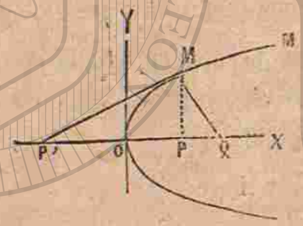


Fig. 302.

La ecuacion de la normal en el punto $x'y'$ es :

$$y - y' = -\frac{y'}{p}(x - x')$$

Haciendo $y=0$, resulta :

$y' = \frac{y'}{p}(x - x')$ luego $p + x' = x = QO$, luego PQ ó la subnormal $= p$.

La ecuacion $y^2 = 2px$ representa una curva cuyo eje OX es evidentemente un diámetro, pues que divide en dos partes iguales todas las cuerdas paralelas al eje de las y. Trasportando el origen á otro punto cualquiera de la curva, facil será establecer que en esta posicion el nuevo diámetro es paralelo al primero.

Concluyo con esto la geometría analítica ; en mi próxima carta pienso tratar de la estática.

ESTATICA.

CARTA VIGÉSIMACUARTA.

NOCIONES PRELIMINARES.

Amigo Eugenio, hasta aquí hemos considerado las matemáticas de un modo abstracto; á escepcion de algunos ejemplos vulgares aritméticos, he prescindido de aplicaciones físicas, que si bien importantes, se oponian al plan sucinto que me habia propuesto. Mas, debiendo tener lugar pronto mi regreso, y por consiguiente debiendo cesar nuestra correspondencia matemática, he juzgado oportuno hacer algunas aplicaciones de todo lo que llevamos espuesto, y ninguna ciencia físico-matemática me ha parecido mas conveniente que la estática, ó ciencia que trata del equilibrio de los sólidos, porque á lo evidente y palpable de la aplicacion del cálcu-

22.

lo, se agregan los conocimientos preliminares que tuve el gusto de imbuirte al principio de nuestras conferencias domésticas, y que supongo no habrás olvidado.

La idea que naturalmente tenemos de los cuerpos es de tal naturaleza que no suponemos que tengan necesidad de movimiento para existir; así, aunque tal vez no haya en el universo una sola molécula que goce de una quietud absoluta aun por un espacio de tiempo muy limitado, comprendemos muy bien que un cuerpo puede existir en reposo completo.

Ahora bien, la materia siendo inerte por sí misma, es evidente á la vez y demostrado, que cualquiera que sea el estado de un cuerpo, sea de reposo ó movimiento, no podrá pasar al estado opuesto, á menos que una causa estraña lo saque del estado en que se halle; esta causa, cualquiera que sea, que solo conocemos por sus efectos la llamamos *fuerza ó potencia*. De manera que es punto admitido en física que no puede haber movimiento sin fuerza, ni fuerza sin movimiento ó sin tendencia á este, pues cuando no se produce el movimiento que una fuerza solicita consiste en otra fuerza superior que destruye el impulso de aquella. Cuando un cuerpo está en movimiento y pasa al estado de reposo, este efecto lo causa una fuerza que impele ó tiende á impeler al cuerpo un movimiento contrario, en términos que si ninguna fuerza se opusiese el cuerpo conservaria continuamente el impulso dado; así una bala de cañon conservaria perennemente la velocidad que la pólvora le impele, si otras fuerzas no destruyesen lentamente su

movimiento comunicándole otro contrario ó diferente; tales son la resistencia atmosférica y la atraccion terrestre. Entiéndese pues por fuerza toda causa de movimiento.

Sin conocer su naturaleza, comprendemos con evidencia que una fuerza puede obrar con mas ó menos intensidad y en una cierta direccion. Así tenemos por evidente que toda fuerza obra en el punto en que se aplica segun cierta direccion y con cierta intensidad.

Ahora bien, si nos representamos las direcciones de las fuerzas por líneas rectas, y sus intensidades por longitudes proporcionales en estas mismas líneas rectas ó por números, es evidente que las fuerzas podrán someterse al cálculo como las demas cantidades; de lo que resulta el problema siguiente cuya solucion es el objeto de la mecánica.

Dadas las fuerzas que solicitan un cuerpo ó un sistema cualquiera de cuerpos, hallar el movimiento que tomará este cuerpo en el espacio, y recíprocamente dado un movimiento en el espacio cuales son las fuerzas que deben obrar para que tenga lugar este movimiento.

Para resolver este problema, lo primero es buscar cuales deben ser las relaciones de las fuerzas para que el cuerpo, ó sistema á que se aplica tome un movimiento igual á cero, es decir que quede en equilibrio; y una vez resuelto este problema, fácilmente se resuelve el otro por analogía, y esta es la razon porque generalmente forma la primera parte del estudio de la mecánica, el de la *estática* ó ciencia que trata del equilibrio de las fuerzas, llamándose *dinámica* la otra parte de la mecánica que trata de todas las cuestiones relativas al movimiento de los cuerpos.

No es necesario conocer el efecto actual de las fuerzas sobre la materia, esto es, los diversos movimientos que pueden imprimir á esta á proporcion de sus intensidades y direcciones; basta considerar las fuerzas como simples cantidades homogéneas y por consiguiente comparables, y designar las razones que deben existir entre estas fuerzas para que materialmente se destruyan.

Hablando con rigor, un cuerpo en equilibrio está en el mismo estado que si estuviese en reposo; pues el efecto de las fuerzas estando para siempre destruido, ó á cada instante destruyéndose, si sin cesar renacen las fuerzas, todo cuerpo en equilibrio es actualmente capaz de moverse en virtud de una cierta fuerza dada, absolutamente como en virtud de la misma fuerza se moveria si estuviese en reposo.

Establecidas estas nociones preliminares, veamos como se puede indagar las condiciones de equilibrio en un sistema cualquiera de cuerpos de figura invariable, solicitado por fuerzas cualesquiera P, Q, R, S, etc., aplicadas á puntos dados *a*, *b*, *c*, *d*, etc., del sistema.

Para lograr este fin, se prescindirá absolutamente de la pesadez ó atraccion terrestre, ó en otros términos se supondrá á los cuerpos en cuestion como si existiesen solos en el espacio, de suerte que solo será preciso tener en consideracion los esfuerzos de las solas fuerzas aplicadas P, Q, R, S, etc., que en

caso de equilibrio deberán mutuamente neutralizarse.

Es facil ver despues que bastará hallar las condiciones del equilibrio en el simple sistema de los puntos *a*, *b*, *c*, *d*, etc., considerado como un conjunto de puntos ligados entre sí de una manera invariable; en efecto si se designa por a', b', c', d', etc., los mismos puntos *a*, *b*, *c*, *d*, del sistema, pero considerados solamente como puntos unidos por rectas rígidas é inestensibles, y si se supone su equilibrio se debe á las fuerzas P, Q, R, S, etc., es evidente que las mismas fuerzas P, Q, R, S, etc., mantendrán tambien el sistema en equilibrio, pues se podria imaginar que el sistema ha sido colocado sobre los puntos a', b', c', d', etc., de manera que los puntos *a*, *b*, *c*, *d*, coincidan actualmente con ellos; el sistema dejado en reposo, el equilibrio de los puntos a', b', c', d', no será perturbado. Pero es evidente que tambien subsistiria el equilibrio si en lugar de suponer los puntos *a* y a', *b* y b' coincidentes, se los supusiese unidos de una manera invencible, de suerte que *a* no pudiese separarse de a', *b* de b', etc.; de lo que resulta que las condiciones de equilibrio, entre las fuerzas P, Q, R, etc., aplicadas al simple sistema de cuerpos, son las mismas que tendrian lugar entre las mismas fuerzas P, Q, R, etc., aplicadas al simple sistema de puntos de aplicacion *a*, *b*, *c*, etc., ligados entre sí de una manera invariable.

Ahora bien, puesto que solo quedan tres cosas que considerar en el equilibrio de las fuerzas; sus intensidades, sus direcciones y sus puntos de aplicacion, es evidente que las condiciones del equilibrio no son mas que las relaciones mutuas, entre estas tres cosas para que el equilibrio tenga lugar en el sistema.

Para descubrir el camino que debe conducir á las condiciones de equilibrio, represéntate un cuerpo ó sistema tenido en equilibrio por las fuerzas que quieras P, Q, R, etc., y con la direccion que quieras en el espacio.

Puesto que estas fuerzas se equilibran entre sí, es claro que cualquiera de ellas, la fuerza P, por ejemplo, se opone sola á la accion de las demas Q, R, S, etc., de modo que parece que el efecto de estas últimas es solicitar el sistema absolutamente como una simple fuerza contraria igual á la fuerza P.

Luego pudiendo suceder que una sola fuerza sea capaz de producir en un cuerpo el mismo efecto que muchas otras, el primer cuidado debe ser procurar reducir las fuerzas aplicadas al menor número posible, y observar la ley de esta reduccion.

Esta fuerza final, capaz de producir en un cuerpo el mismo efecto que muchas otras combinadas se llama la *resultante*, llamándose *componentes* las fuerzas combinadas que la producen. Llámase *composicion de fuerzas* la ley por la cual se sustituyen á una sola muchas fuerzas capaces del mismo efecto.

En mis cartas sucesivas designaré las fuerzas por las letras P, Q, R, etc., colocadas sobre las líneas que representan sus direcciones, y si una letra tal como A indica el punto de aplicacion de una fuerza tal como P, por ejemplo, supondré siempre que la accion de esta fuerza tiene lugar de A hácia la letra P; y si, para representar la cantidad de esta fuerza, trazo una cierta línea terminada AB de su direccion y partiendo del punto A, tú supondrás que se lleva esta línea del lado en que el punto de aplicacion A tiende á moverse.

A la mayor brevedad seguiré este asunto tratando de la composicion y descomposicion de las fuerzas.

CARTA VIGÉSIMAQUINTA.

COMPOSICION Y DESCOMPOSICION DE LAS FUERZAS.

§ I.

Nociones generales sobre la composicion y descomposicion de las fuerzas.

Amigo Eugenio, es evidente que dos fuerzas iguales y contrarias, aplicadas á un mismo punto, estan en equilibrio.

Lo es tambien que se equilibrarán dos fuerzas iguales y contrarias aplicadas á las estremidades de una recta considerada como una barra invariable en longitud.

Resulta de lo espuesto que el efecto de una fuerza que á un cuerpo solicita no cambia en ningun punto de su direccion en que se la suponga aplicada, con tal que este punto sea uno de los puntos del mismo cuerpo, ó que esté fijo á este mismo cuerpo de un modo invariable en caso que esté fuera de él.

Pues supongamos una fuerza cualquiera P (Fig. 303), aplicada sobre el punto A de un cuerpo de cualquier sistema, si en la direccion de esta fuerza se toma otro punto B, fijo invariablemente al sistema, de manera que la longitud AB quede siempre la misma, y si en el punto B se aplican dos fuerzas P′ y—P′ iguales entre sí á la fuerza P y obrando en la direccion de AB, el punto A será aun solicitado de la misma manera que antes, pues el efecto de las dos fuerzas P′ y —P′ es nulo de sí mismo; pero si se considera la fuerza P y su igual y contraria —P′ aplicada en B, su efecto será tambien evidentemente nulo; por consiguiente se puede suprimirlas quedando solamente la fuerza P′, que viene á ser la fuerza P, pero aplicada al punto B de su direccion, y el punto A no ha cesado de ser solicitado de la misma manera.

Fig. 303.

Resulta que se puede aplicar una fuerza en un punto cualquiera de su direccion con tal que este punto se ligue al primer punto de aplicacion, por una recta rígida é inestensible.

Cuando dos fuerzas P y Q (Fig. 304), se aplican al mismo punto A, bajo un ángulo cualquiera, se comprende que una tercera fuerza R, aplicada de una manera conveniente en el punto A, puede equilibrar las dos fuerzas P y Q; pues en virtud de los esfuerzos combinados de las dos fuerzas P y Q, el punto A tiende á dejar el lugar en que está, no pudiendo escaparse mas que por un lado, y por consiguiente si en sentido contrario se le aplica una

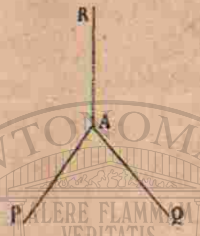


Fig. 304.

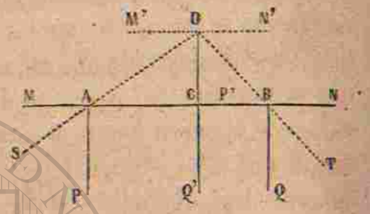


Fig. 305.

fuerza conveniente, este punto permanecerá en equilibrio. La fuerza R es igual y opuesta á la resultante de las dos otras, luego dos fuerzas que concurren tienen una resultante.

Tambien es facil de comprender que esta misma fuerza R está en el plano de las dos fuerzas AP, AQ; pues no hay ninguna razon que la haga inclinar á un lado de este plano mas que al otro.

Admítese como axioma que cuando dos fuerzas P, Q, R, etc., obran en el mismo sentido y en la misma direccion, estas fuerzas añaden y dan una resultante igual á su suma $P+Q+R+$, etc.

Admítese tambien, que cuando varias fuerzas $P+Q+R+$, etc., tiran en una direccion, y que fuerzas $P'+Q'+R'+$, etc., tiran en una direccion opuesta, la resultante es igual á $(P+Q+R+\ldots)-(P'+Q'+R'+\ldots)$, y se ejerce en el sentido ó direccion de la mayor de estas dos sumas.

§ II.

Composicion de las fuerzas paralelas.

Teorema. — Si se aplican dos fuerzas P y Q (Fig. 305), paralelas y en la misma direccion á las estremidades A y B de una recta rígida, digo 1° que estas dos fuerzas tienen una resultante, y que esta resultante debe aplicarse á la linea AB entre los dos puntos A y B; 2° que esta fuerza es paralela á las componentes P y Q, é igual á su suma.

En efecto se puede aplicar á los dos puntos A y B dos fuerzas M y N, iguales y contrarias y que obran en la misma direccion A y B. El efecto de estas dos fuerzas será nulo y por consiguiente no cambiará el efecto de las dos fuerzas P y Q; pero las dos fuerzas M y Q, aplicadas en A, tienen una resultante, dirigida evidentemente en el ángulo MAP. De la misma manera las dos fuerzas N y Q tienen una resultante T, aplicada en B, y dirigida en el ángulo NBQ. Figúrate que se haya tomado las dos resultantes y que ambas hayan sido aplicadas en el punto D, en el que necesariamente van á cortarse sus direcciones, la resultante de las dos fuerzas S y T será la misma absolutamente que la de las dos fuerzas P y Q, la cual aplicada en D y debiendo ser dirigida en el ángulo ADB, pasará entre A y B en un cierto punto C, donde se podrá suponerla aplicada.

Ahora bien, es evidente que esta es resultante á las fuerzas P y Q é igual á su suma; pues, supongamos que en D se descomponga la fuerza S en dos fuerzas M′ y P′, paralelas é iguales á M y á P, que se descomponga T en dos fuerzas N′ y Q′, iguales y paralelas á N y Q, las dos fuerzas M′ y N′ se destruirán, y, solo quedará una fuerza igual á P+Q, paralela á cada una de ellas.

Si las fuerzas P y Q son iguales, es evidente que el punto C estará en el medio de AB.

Resulta de lo espuesto que la resultante de tantas fuerzas paralelas como se quiera, iguales de dos en dos, y simétricamente aplicadas á distancias iguales del medio de una misma recta, es igual á la suma de todas estas fuerzas, les es paralela y pasa por el medio de la recta de aplicacion.

Recíprocamente puédese descomponer toda fuerza P, aplicada á una línea en cuantas fuerzas se quiera, con tal que estas fuerzas, tomadas de dos en dos, sean iguales á iguales distancias del punto de la aplicacion de la fuerza R.

Teorema. — El punto de aplicacion C (Fig. 306) de la resultante de dos fuerzas paralelas

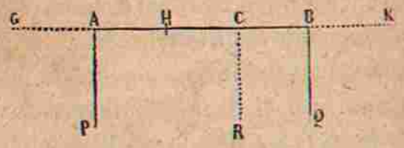


Fig. 306.

P y Q que obran á las estremidades A y B de una recta inflexible AB, divide esta recta en la razon recíproca de P y Q, de manera que se tiene :

$$P:Q:BC:AC.$$

Supongamos que las fuerzas P y Q sean comensurables, esto es, que sean entre sí como dos números enteros m y n ; dividamos AB en el punto H en dos partes directamente proporcionales á las dos fuerzas P y Q, de manera que resulte $AH:BH::P:Q$, y por consiguiente $::m:n$; en la prolongacion de la línea inflexible AB, tomemos $AG=AH$, y $BK=BH$, el punto A será el medio de GH, y el punto B el medio de HK.

Establecido esto, puesto que las fuerzas P y Q guardan entre sí la misma proporcion que las líneas AH y BH, tambien serán entre sí como las líneas dobladas, es decir como GH y HK, y como por hipótesis no hay en la línea AH, m medidas como BH contiene n, habrá $2m$ medidas en GH y $2n$ medidas iguales en HK, y la fuerza P puede descomponerse en $2m$ fuerza iguales y paralelas, aplicadas á los $2m$ puntos medios de las medidas comunes de la línea GH, y la fuerza Q en $2n$ fuerzas paralelas, iguales entre sí y á las primeras aplicadas en los $2m$ puntos medios de las medidas comunes HK. Ahora bien, siendo equidistantes todas estas fuerzas iguales, se hallarán colocadas de dos en dos á distancias iguales del medio C de la línea entera GK, y por consiguiente su resultante general, que es la de las fuerzas P y Q, pasará necesariamente por el medio de la línea GK.

Pero á causa de GC=AB, quitando la parte comun AC, resulta B=AG=AH, y añadiendo de parte y otra HC, AC=BH, por consiguiente teniendo

P:Q::AH:BH,

se tiene tambien

P:Q::BC:AC.

Supongamos, en segundo lugar que no sean comensurables las dos fuerzas G y P.

En este caso observo que la resultante de dos fuerzas cualesquiera P y Q (Fig. 507), aplicada en los puntos A y B cayendo en C, la resultante de P y de una fuerza + Q I > Q caerá entre el punto C y el punto B; es decir que el punto de aplicacion de la resultante se aproximará del punto de aplicacion de la componente que será aumentado. En efecto, para hallar la resultante de las dos componentes P y Q+I, puédese tomar la resultante R de P y Q, que pase en el punto C por hipótesis y despues lo de R é I, cuyo punto de aplicacion será entre C y B.

Fig. 507.

Ahora bien si la resultante de las dos fuerzas inconmensurables (Fig. 508), no pasando por el punto C, que es tal que se tiene :

P:Q::BC:AC

pasará por otra parte. Supongamos que pase en G..., repártase la línea AB en partes iguales, todas mas pequeñas que GC, y habrá, á lo menos, un punto de division entre C y G. Sea I este punto, las dos líneas AI y BI serán comensurables, y el punto I podrá considerarse como el punto de aplicacion de la resultante de las dos fuerzas P y Q, de modo que se tendrá :

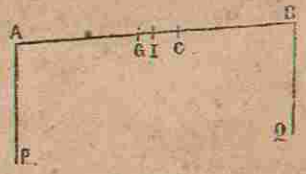


Fig. 508.

P:Q'::BI:AI.

Lo que da Q'>Q, puesto que, por hipótesis, se tiene :

P:Q::BC:AC;

pero la resultante de las dos fuerzas P y Q' pasando en I, la de las dos fuerzas P y Q > Q' pasará entre I y B, y no podrá caer en G contra la hipótesis.

Resulta que cuando se equilibran tres fuerzas P, Q, R paralelas, aplicadas á una línea recta y flexible, R es igual y opuesta á la resultante de P y Q; esto es que

P+Q=R, y por consiguiente Q=R−P.

Dadas las dos fuerzas P y Q, como tambien la distancia AC que separa los puntos de aplicacion, si se pide el punto de aplicacion de la resultante Q se hará la proporcion siguiente :

P:Q::BC:AC,

de la que resulta

$$P+Q:Q::BC+AC:AC;$$

es decir

$$R:Q::AB:AC,$$

proporcion que hará conocer AB, y por consiguiente el punto B.

Si son iguales las dos fuerzas P y R, la resultante Q es nula, y la distancia $AB=\frac{R\times AC}{0}$, lo que quiere decir infinita, espresion que indica que no puede hallarse una fuerza única que equilibre dos fuerzas iguales, paralelas y en sentido opuesto.

De la misma manera que se componga en una sola dos fuerzas paralelas que obran á puntos dados de una línea, puédese tambien descomponer una fuerza R, aplicada en un punto de una recta inflexible y en dos otros que le sean paralelos, y que se apliquen en puntos dados.

Cuando se sabe hallar la resultante de dos fuerzas paralelas, podráse hallar la de tantas fuerzas paralelas como se quiera, y es evidente que aquella es igual al esceso de la suma de las que tiran en un sentido sobre la suma de las que tiran en el otro.

Teorema. — La resultante de dos fuerzas cualesquieras P y Q (Fig. 309) aplicadas en un mismo punto A bajo un ángulo cualquiera, se dirige segun la diagonal del paralelógramo

ABCD construido sobre las líneas AB, AC, que representan las fuerzas P y Q en cantidad y direccion.

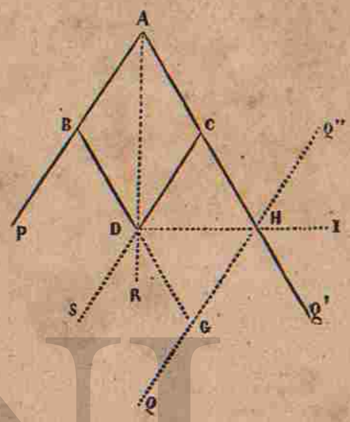


Fig. 309.

Desde luego es evidente que la resultante de las dos fuerzas P y Q, debe pasar por el punto A y hallarse en el plano de estas dos fuerzas. Ademas digo que debe pasar por el punto D; tomemos en efecto del prolongamiento de la línea BD la parte DG=DC, y acabemos el paralelógramo CDGH; apliquemos á los puntos G y H en la direccion de GH dos fuerzas Q'' y Q', contrarias é iguales entre sí á la fuerza Q. Es facil ver que la resultante de las cuatro fuerzas PQ, Q' y Q'' debe pasar al punto D; pues siendo Q'=Q, las dos fuerzas paralelas P y Q' son entre si como los lados AB, AC, ó como DC y DB, ó bien, á causa de DG=DC, como las líneas DG y DB, y por consiguiente su resultante S pasa en D. Siendo iguales las dos fuerzas Q y Q'', su resultante T prolongada divide en dos igualmente el ángulo CHG del paralelógramo CDGH, y tambien va á pasar por el punto D, donde se puede suponerla aplicada. Por consiguiente la resultante general que es la de las dos fuerzas ST pasa en el punto D.

Pero siendo iguales y contrarias las dos fuerzas Q′ y Q″, aplicadas en GH, es nulo su efecto, y la resistencia de las cuatro fuerzas S, Q, Q′, Q″, es idénticamente la misma que la de las dos fuerzas P y Q; luego puesto que la primera pasa en D, la de las dos fuerzas P y Q pasa tambien en el mismo punto.

Dirigiéndose la resistencia por los dos puntos, á la vez A y D, se dirigirá segun la diagonal.

Conclúyese que, si se conociese solamente las direcciones de las dos fuerzas P y Q, y la de su resultante R, podria determinarse la razon de P á Q; pues tomando un punto cualquiera D en la direccion de la resultante, y llevando dos paralelas DC y DB á las direcciones de las dos componentes P y Q, y que en C y B encuentren estas direcciones, se tiene :

$$P : Q :: AB : AC.$$

Teorema. — La resultante de dos fuerzas cualesquiera PQ (Fig. 510), aplicadas á un mismo punto A, se representa en cantidad y direccion por la diagonal del paralelógramo ABCD construido en las dos líneas AB, AC, que en valor y direccion representan estas fuerzas.

Sea R esta resultante; supongamos que se aplique al punto A en la prolongacion de la diagona CA, y en sentido contrario de su accion. Las tres fuerzas P, Q, R se equilibrarán en el punto A; luego una de ellas Q, por ejemplo, será igual y opuesta á la resultante de las dos fuerzas P y R. Luego si del punto B se lleva á la direccion AR la paralela BG, que en G encuentra la prolongacion de QA, y del punto G á la direccion AP, la paralela GH que en H encuentra la direccion de la fuerza R, las dos fuerzas P y R, serán entre sí como los lados AB y AH del paralelógramo ABGH. Pero la línea AB representa la fuerza P; luego AH representa la fuerza R; por las paralelas se tiene AH = G=AD; luego etc.

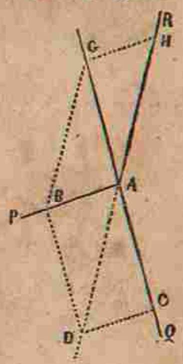


Fig. 510.

Siendo entre sí las fuerzas P, Q, R, como las tres líneas AB, AC, AD, y puesto que tenemos AB=CD en el paralelógramo ABDC, se puede decir que estas tres fuerzas son entre sí como los tres lados CD, CA, AD, del triángulo ACD; pero siendo entre sí estos tres lados como los senos de los ángulos opuestos CAD, CDA, ACD, resulta :

$$P : Q : R :: \text{sen } CAD : \text{sen } BAD : \text{sen } BAC.$$

Lo que indica que cada una de las fuerzas P, Q, R, es como el seno del ángulo formado por las direcciones de los dos otros.

Se puede siempre descomponer una fuerza B en dos otras P y Q, dirigidas, segun las líneas dadas AP, AQ, con tal que estas dos líneas y la fuerza estén en un plano, y concurran á un mismo punto A.

Para calcular los valores de los componentes, se hace las dos proporciones :

$$R:P::\text{sen } BAC:\text{sen } CAD,$$
$$R:Q::\text{sen } BAC:\text{sen } BAD,$$

en las cuales las solas incógnitas son P y Q.

Si el ángulo BAC fuese recto, suponiendo el radio $=1$, sen $BAC=1$, sen $CAD=\cos BAD$, las dos proporciones se vuelven :

$$R:Q::1:\cos BAD,$$
$$R:Q::1:\cos CAD;$$

resultando $P=R \cos BAD$, $Q=R \cos CAD$.

Cuando se sabe determinar la resultante de dos fuerzas aplicadas á un punto, se puede determinar la de tantas fuerzas P, Q, R, S, etc., que se quiera ; pues basta averiguar de dos cualesquiera, averiguar despues la resultante de esta resultante con otra fuerza, y así sucesivamente.

Si todas las fuerzas estan en un mismo plano, tambien lo estará la resultante general.

CARTA VIGÉSIMASESTA.

DE LA PESADEZ O GRAVEDAD.

§ I.

Nociones preliminares.

Llámase pesadez ó gravedad la causa incógnita que precipita en tierra á los cuerpos abandonados á sí mismos. Siendo la gravedad causa de movimiento, puede considerársela como fuerza ; esta fuerza penetra las partes mas íntimas de los cuerpos, y obra igualmente en todas sus moléculas, pues la esperiencia prueba que, en el vacío, cuerpos de masas desiguales, una pluma y una bala de plomo, por ejemplo, caen de la misma altura con la misma velocidad ; de lo que se concluye que las moléculas de un cuerpo que cae bajan todas de la misma manera que si fuesen contiguas, sin adherir las unas á

Para calcular los valores de los componentes, se hace las dos proporciones :

$$R:P::\text{sen } BAC:\text{sen } CAD,$$
$$R:Q::\text{sen } BAC:\text{sen } BAD,$$

en las cuales las solas incógnitas son P y Q.

Si el ángulo BAC fuese recto, suponiendo el radio $=1$, sen $BAC=1$, sen $CAD=\cos BAD$, las dos proporciones se vuelven :

$$R:Q::1:\cos BAD,$$
$$R:Q::1:\cos CAD;$$

resultando $P=R\cos BAD$, $Q=R\cos CAD$.

Cuando se sabe determinar la resultante de dos fuerzas aplicadas á un punto, se puede determinar la de tantas fuerzas P, Q, R, S, etc., que se quiera; pues basta averiguar de dos cualesquiera, averiguar despues la resultante de esta resultante con otra fuerza, y así sucesivamente.

Si todas las fuerzas estan en un mismo plano, tambien lo estará la resultante general.

CARTA VIGÉSIMASESTA.

DE LA PESADEZ O GRAVEDAD.

§ I.

Nociones preliminares.

Llámase pesadez ó gravedad la causa incógnita que precipita en tierra á los cuerpos abandonados á sí mismos. Siendo la gravedad causa de movimiento, puede considerársela como fuerza; esta fuerza penetra las partes mas íntimas de los cuerpos, y obra igualmente en todas sus moléculas, pues la esperiencia prueba que, en el vacío, cuerpos de masas desiguales, una pluma y una bala de plomo, por ejemplo, caen de la misma altura con la misma velocidad; de lo que se concluye que las moléculas de un cuerpo que cae bajan todas de la misma manera que si fuesen contiguas, sin adherir las unas á las otras, de manera que la accion de la pesadez se efectua en el conjunto de las moléculas de un cuerpo y se percibe en cada una de ellas.

Sin embargo, la gravedad ó pesadez varia algo del polo al ecuador y con la distancia del centro de la tierra; pero en estática, se considera la pesadez como una fuerza constante cuya direccion se considera por la de un alambre de plomo en equilibrio, llamándose vertical esta direccion, y horizontal todo plano perpendicular á la vertical.

De lo que precede conclúyese que la resultante de todas las fuerzas paralelas de la gravedad les es paralela, esto es vertical, y ademas que es igual á su suma. Llámase peso de un cuerpo la cantidad de esta resultante; de lo que resulta que el peso de un cuerpo es proporcional al número de las moléculas que lo componen, ó á la cantidad de materia que contiene bajo un cierto volumen que es lo que se llama su masa, por consiguiente no hay que confundir el peso con la pesadez ó gravedad.

Hemos visto que cuando dos fuerzas paralelas se aplican á una misma recta, el punto en que la resultante corta esta recta es independiente de la direccion de las fuerzas paralelas; lo mismo sucede evidentemente cuando hay muchas fuerzas paralelas. Este punto, por el que pasa la resultante de todas las diferentes fuerzas paralelas que solicitan el descenso de un cuerpo en virtud de la gravedad, se llama el centro de gravedad del cuerpo.

Si es fijo el centro de gravedad de un cuerpo, es evidente que estará en equilibrio alrededor de él en todas las situaciones; pues en todas, la resultante de

las fuerzas de la pesadez pasará siempre por el mismo punto fijo, y será destruido su efecto.

La situacion del centro de gravedad en un cuerpo depende solamente de dos cosas: 1° de la figura del cuerpo, 2° de la densidad relativa de sus diferentes partes, de la cual se deduce que en igualdad de volumen y figura se apartan las moléculas, de modo que se aglomeran mas en una parte del cuerpo que en otra, y siendo diferente la distribucion de fuerzas que obran sobre las moléculas, cambiará la situacion general de su resultante, y en consecuencia la del centro de gravedad del cuerpo. Así, para determinar este punto, débese atender, no solo á la figura del cuerpo, sino á la ley segun la cual la densidad varia en toda su estension. Pero si, para resolver mas fácilmente la cuestion, se suponen los cuerpos perfectamente homogéneos y uniformemente densos en todos sus puntos, solo dependerá de la figura la situacion del centro de gravedad, y su determinacion será solo un problema de geometría. Bajo esta hipótesis de que los cuerpos son homogéneos y dotados de una gravedad uniforme en todos sus puntos, se procede á la determinacion de los centros de gravedad de las líneas, superficies y sólidos que se someten á una descripcion rigorosa.

§ II.

Centro de gravedad de las figuras.

Toda figura en la cual se halla un punto tal que un plano cualquiera, llevado por este punto corte la figura en dos partes enteramente simétricas, tiene su centro de gravedad en este punto que se llama centro de la figura.

Efectivamente haciendo pasar un plano cualquiera por el centro de la figura, como este plano la corta en dos partes simétricas, no hay razon para que el centro de gravedad, que es un punto único, se halle de un lado mas bien que de otro; debiéndose pues hallar el centro de gravedad en todos los planos á la vez que se pueden conducir por el centro de la figura será este mismo punto, que es la comun interseccion de todos estos planos.

Resulta que el centro de gravedad de una línea recta está en el medio; el de un paralelógramo en la interseccion de sus diagonales; el de un paralelipípedo en la interseccion de sus diagonales; el de una esfera en su centro, etc.

§ III.

Centro de gravedad del triángulo.

Sea ABC (Fig. 511) el triángulo dado; consideremos la superficie como una porcion de cortes ó láminas paralelas á la base BC; es claro que la línea recta AD llevada del vértice A al medio D de

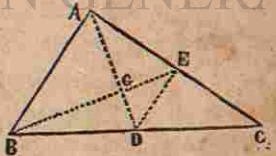


Fig. 511.

la base, dividirá en dos puntos todos estos cortes ó láminas, por consiguiente sus centros de gravedad respectivos en la recta AD y por consiguiente en su sistema; demuéstrase por el mismo razonamiento que tambien se halla en BE; luego el centro de gravedad se halla en la interseccion G.

Pero siendo DE los medios respectivos de los lados CA, CB, la recta DE será paralela á AB, y será su mitad; luego GD es el tercio de AD, y AG los dos tercios.

§ IV.

Centro de gravedad de la pirámide.

Sea ABCD (Fig. 512) la pirámide, si la consideramos compuesta de una porcion de cortes ó láminas paralelas á la base BCD, es evidente que una recta llevada del ángulo A en un punto cualquiera de la base, cortaria estas mismas láminas y la base en dos puntos semejantemente colocados; luego si se lleva esta recta del centro de gravedad I de la base, pasará por todos los centros de gravedad de las láminas paralelas;

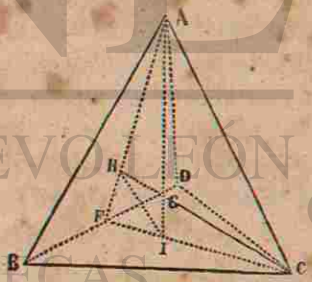


Fig. 512.

luego el centro de gravedad de la pirámide se halla en AI.

De la misma manera se demuestra que se halla en CH; y como estas dos rectas se cortan en G, el centro de gravedad de la pirámide será G; y siendo HI paralela á AC, se tiene :

$$HI : AC :: EH : EA :: 1 : 3.$$

Pero $HI : GI :: AC : AG$,
luego $GI = \frac{1}{4} AI$.

CARTA VIGESIMASÉPTIMA.

DE LAS MAQUINAS.

§ I.

Nociones preliminares.

Amigo Eugenio, llámase máquina todo instrumento destinado á trasmitir la accion de una fuerza determinada á un punto que no se halla en su direccion, de modo que pueda esta fuerza mover un cuerpo á que no está aplicada inmediatamente, y que pueda ademas moverlo en una direccion diferente de la suya propia.

No se puede, en general, cambiar la direccion de una fuerza sino descomponiéndola en dos otras, de las cuales la una se dirija á un punto fijo que lo destruya por su resistencia, y la otra obre segun la nueva direccion; esta última fuerza que es solo la que puede producir efecto, es siempre una luego el centro de gravedad de la pirámide se halla en AI.

De la misma manera se demuestra que se halla en CH; y como estas dos rectas se cortan en G, el centro de gravedad de la pirámide será G; y siendo HI paralela á AC, se tiene :

$$HI : AC :: EH : EA :: 1 : 3.$$

Pero $HI : GI :: AC : AG$,
luego $GI = \frac{1}{4} AI$.

CARTA VIGESIMASÉPTIMA.

DE LAS MAQUINAS.

§ I.

Nociones preliminares.

Amigo Eugenio, llámase máquina todo instrumento destinado á trasmitir la accion de una fuerza determinada á un punto que no se halla en su direccion, de modo que pueda esta fuerza mover un cuerpo á que no está aplicada inmediatamente, y que pueda ademas moverlo en una direccion diferente de la suya propia.

No se puede, en general, cambiar la direccion de una fuerza sino descomponiéndola en dos otras, de las cuales la una se dirija á un punto fijo que lo destruya por su resistencia, y la otra obre segun la nueva direccion; esta última fuerza que es solo la que puede producir efecto, es siempre una componente de la primera, pudiendo ser mayor ó menor que esta segun las circunstancias. Cambiando de esta manera las direcciones y valores de la fuerza, se puede, por medio de una máquina, y los puntos de apoyo que presenta, equilibrar dos fuerzas desiguales y no directamente opuestas.

La fuerza cuya direccion se trata de cambiar empleando una máquina, se llama potencia; dase el nombre de resistencia al cuerpo que debe mover ó á la fuerza que por medio de la máquina debe equilibrar.

Mi solo objeto en esta carta es hallar las relaciones que entre sí deben tener la potencia y resistencia aplicadas á la misma máquina, para que se equilibren atendidas sus direcciones; prescindiré del roce, y supondré perfectamente flexibles las cuerdas que entren en la composicion de la máquina.

Cuando es muy considerable el número de las máquinas, se pueden considerar todas como compuestas de tres máquinas elementares, que son las cuerdas, la palanca, y el plano inclinado.

§ II.

De las cuerdas.

Bajo la suposicion de que las cuerdas son muy flexibles, y que al mismo tiempo carecen de estensibilidad y peso, represéntate, amigo Eugenio, el

caso de equilibrio entre tres fuerzas, PQR (Fig.

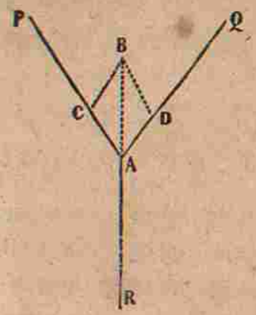


Fig 313.

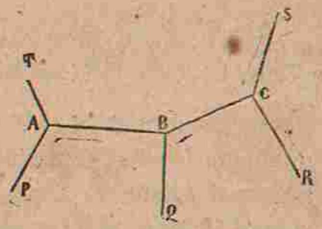


Fig. 314.

313), obrando recíprocamente por medio de tres cuerdas reunidas por el nudo A.

Las tres fuerzas P, Q, R, están en el mismo plano.

Representando por las líneas AC, AD, las dos fuerzas P y Q, construyendo el paralelógramo BDAC, la diagonal representará el valor y direccion de la resultante R que le es opuesta.

Así, existen las proporciones siguientes entre las fuerzas P, Q, R :

$$P : Q : R :: \text{sen } QAR : \text{sen } PAR : \text{sen } PAQ.$$

Lo que acabo de establecer relativamente á las tres cuerdas puede establecerse de un número cualquiera, pues es evidente que tomando las cuerdas de tres en tres deberemos en cada uno hallar ecuaciones análogas á las precedentes.

Representando el estado de equilibrio de este sistema (Fig. 314) por el polígono ABC, etc., deberá haber equilibrio entre las fuerzas T, P, y la tension de cuerda AB; entre la tension de la cuerda AB, la de la cuerda BC, y la fuerza Q, etc., lo que nos dará las ecuaciones siguientes :

$$T : P : \text{tens } AB :: \text{sen } PAB : \text{sen } TAB : TAP.$$
$$\text{Tens } AB : Q : \text{tens } BC :: \text{sen } QBC : \text{sen } ABC : \text{sen } QAB.$$

Suponiendo que el cordon AP esté fijo en A por un nudo corredizo, es evidente que la tension AB será igual á la fuerza T, y por consiguiente los ángulos TAP, PAB, serán iguales.

§ III.

Del plano inclinado.

Supongamos (Fig. 515) un cuerpo pesado colo-

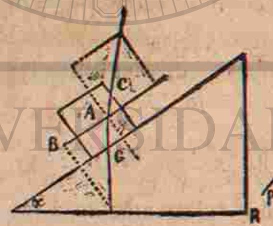


Fig. 515.

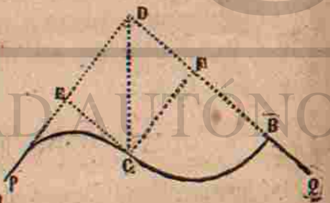


Fig. 516.

cado en un plano inclinado ó en declive, y tirado por una fuerza cuya direccion encuentre la vertical pasando por el centro de gravedad del cuerpo; se trata de hallar las condiciones del equilibrio. Podemos descomponer en dos la fuerza P, una perpendicular, y la otra paralela al plano inclinado; la misma descomposicion podemos hacer relativamente al peso del cuerpo; las fuerzas normales al plano deberán ser tales que la mayor de las dos tienda á apoyar el cuerpo en el plano, y ademas la resultante deberá hallarse en el interior de la circunferencia en contacto del cuerpo sobre el plano inclinado. Ademas, las dos componentes paralelas $P \cos \omega$ y $G \operatorname{sen} \alpha$ deberán ser iguales y dirigidas en sentidos contrarios; α designando el ángulo que la fuerza P hace con el plano inclinado.

§ IV.

De la palanca.

La palanca es una barra inflexible ACB (Fig. 516), recta ó curva, movil al rededor de uno de sus punto C, que se supone fijo y que se llama punto de apoyo.

Supónese la palanca sin peso, y ademas se supone que no puede resbalar del punto C. Sean P y Q dos potencias aplicadas á estas estremidades. Considérase la resistencia del punto de apoyo como una tercer fuerza R aplicada á la palanca en este mismo punto. Las dos fuerzas P y Q se suponen en un mismo plano pasando por el mismo punto de apoyo; luego estas fuerzas P y Q se encuentran en un cierto punto D donde puede suponérselas aplicadas, debiendo pasar por el punto D la resultante de estas dos fuerzas; y como está en equilibrio el sistema, es preciso que se destruya la resultante por el punto fijo C, luego la resultante pasa por el punto fijo, resultando la proporcion :

$$P : Q :: \text{sen } CDQ : \text{sen } CDP.$$

Pero si del punto C se bajan dos perpendiculares CF, CE, en la direccion de las fuerzas, resulta :

$$CE : CF :: CDP : \text{sen } CDQ.$$

Luego $P : Q :: CF : CE$; luego el equilibrio de la palanca debe darnos la ecuacion :

$$P \times CE = Q \times CH.$$

Cada uno de estos productos se llama momento de una fuerza con relacion á un punto fijo.

Si las fuerzas P y Q fuesen paralelas, su resultante deberá satisfacer á la misma condicion, y en este caso la carga del punto de apoyo será igual á $P+Q$, mientras que en el caso precedente es igual á la resultante de las dos fuerzas P y Q, ó á

$$\sqrt{P^2+Q^2+2PQ \cos PDQ}.$$

§ V.

De las poleas ó garruchas.

La polea ó garrucha es una rueda con un medio canal hueco en su circunferencia para recibir una

cuerda, y atravesado en su centro por un eje sobre el cual puede dar vueltas. Suponiendo que la polea dé vueltas al rededor de su eje G, y prescindiendo del roce es evidente, digo, que las dos fuerzas P y Q (Fig. 517), aplicadas á las estremidades de la cuerda, deberán ser iguales; tambien es evidente que la carga R será igual á la suma de los dos pesos P y Q.

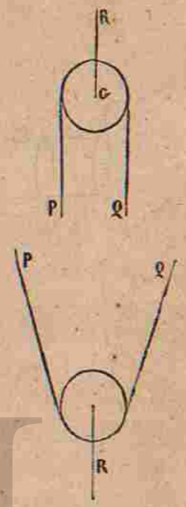


Fig. 517.

Si las dos estremidades P y Q no fuesen paralelas, harian en este caso ángulos iguales con la direccion de la resultante R, que en este caso no seria igual á su suma.

§ VI.

Del cabestante.

El cabestante (Fig. 518) es una máquina compuesta de un cilindro movil sobre su eje y de una cuerda, que envolviéndose por una de sus estremidades al rededor del cilindro, mientras que lo hace rodar una potencia Q, arrastra una resistencia P fija á su otra estremidad.

Llamando R el radio que parte del centro á la cuerda que está solicitada por la potencia y r e

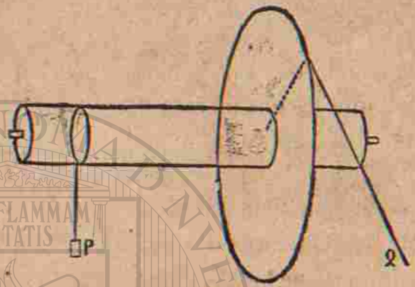


Fig. 318.

de la resistencia, tendremos que las condiciones del equilibrio se espresarán por la ecuacion

$$Pr = QR.$$

Pues la resistencia P puede evidentemente suponerse en el plano de la fuerza Q y perpendicular al eje de la máquina, y en este nuevo estado se tiene una palanca cuyo punto de apoyo está situado en el eje de las perpendiculares, bajadas en las fuerzas precisamente R y r.

Con esto doy fin á la estática, concluyéndose al mismo tiempo nuestra correspondencia matemática, pues dentro de pocos dias pienso estar de vuelta, disfrutar de tu amable compañía y empezar cada tarde nuestras conferencias acostumbradas en compañía de nuestro amigo Silvio.

FIN DEL TOMO NONO.

INDICE

DEL TOMO NONO.

CARTA TERCERA.

CARTA CUARTA.

CARTA QUINTA.

De las fracciones ó quebrados decimales.

CARTA SESTA.

CARTA SÉPTIMA.

De las potencias y raices de los números.

CARTA OCTAVA.

Razones, proporciones y progresiones.

CARTA NONA.

Teoría de los logaritmos.

CARTA DECIMA.

ALGEBRA.

CARTA UNDÉCIMA.

De las cuatro operaciones fundamentales del algebra.

CARTA DUODÉCIMA.

CARTA DÉCIMATERCIA.

CARTA DÉCIMACUARTA.

Ecuaciones del segundo grado.

CARTA DÉCIMAQUINTA.

GEOMETRIA.

Sobre las líneas y los ángulos.

CARTA DÉCIMASESTA.

De la medida de los ángulos.

CARTA DECIMASÉPTIMA.

De las razones y proporciones.

CARTA DÉCIMAOCTAVA.

De las líneas proporcionales.

CARTA DÉCIMANONA.

De las superficies.

CARTA VIGÉSIMA.

Sobre los sólidos.

CARTA VIGÉSIMAPRIMERA.

TRIGONOMETRIA.

Trigonometría rectilínea.

CARTA VIGÉSIMASEGUNDA.

Trigonometría esférica.

CARTA VIGÉSIMATERCERA.

GEOMETRIA ANALITICA.

De la geometría analítica.

CARTA VIGÉSIMACUARTA.

ESTATICA.

CARTA VIGÉSIMAQUINTA.

Composicion y descripcion de las fuerzas.

CARTA VIGÉSIMASESTA.

De la pesadez ó gravedad.

CARTA VIGÉSIMASÉPTIMA.

De las máquinas.