(non pairs), ainsi que les nombres qui sont terminés à leur droite par un de ces chiffres, tels que 53, 497, 3495, etc.

**166.** *Tout nombre est divisible par* 3, *lorsque la somme de ses chiffres additionnés comme des unités simples est un nombre divisible par* 3.

Tels sont : 315, 4971, 63150, etc., car $3+1+5=9$, qui est divisible par 3 ; $4+9+7+1=21$, $6+3+1+5+0=15$, divisibles par 3.

DÉMONSTRATION. — En effet, une unité de chaque ordre est un multiple de 9 plus 1 ; car $10=9+1$, $100=99+1$, $1000=999+1$ ; donc un nombre quelconque d'unités de chaque ordre est un multiple de 9 plus ce même nombre ; or les nombres d'unités de chaque ordre sont représentés par les chiffres, donc un nombre quelconque est un multiple de 9 et par conséquent de 3, plus la somme de ses chiffres. Si donc la somme de ces chiffres est divisible par 3, le nombre sera divisible par 3.

**167.** *Tout nombre est divisible par* 5, *lorsqu'il est terminé à sa droite par* 0 *ou par* 5.

Tels sont : 45, 350, 5400, etc.

DÉMONSTRATION. — Car tout nombre est un multiple de 10, plus son dernier chiffre.

**168.** *Tout nombre est divisible par* 9, *lorsque la somme de ses chiffres additionnés comme des unités simples est un nombre divisible par* 9.

Tels sont : 54, 315, 64908, etc.; en effet, $6+4+9+0+8=27$ divisible par 9.

Même démonstration qu'au n° **166**.

**169.** A ces caractères de divisibilité on peut ajouter les suivants :

*Tout nombre est divisible par* 4, *lorsque ses deux derniers chiffres à droite forment un nombre divisible par* 4.

Car tout nombre est un multiple de 100, qui est divisible par 4, plus le nombre formé par ses deux derniers chiffres, $148=100+48$.

Tels sont : 148, 1324, 67916, etc.

**170.** *Tout nombre est divisible par* 6, *lorsqu'il est pair et que la somme de ses chiffres est divisible par* 3.

Tels sont : 48, 126, 3258, etc.

Car ce nombre pair étant divisé par 3, qui est impair, donnera nécessairement pour quotient un nombre pair.



**171.** *Tout nombre est divisible par* 8, *lorsque ses trois derniers chiffres à droite forment un nombre divisible par* 8.

Car tout nombre est un multiple de 1000, qui est divisible par 8, plus le nombre formé par ses trois derniers chiffres.

**172.** *Tout nombre est divisible par* 10, 100, 1000, etc., *lorsqu'il est terminé à sa droite par* 1, 2, 3, etc., *zéros*.

**173.** Les caractères de divisibilité fournissent le moyen de décomposer un nombre donné en 2, 3, etc., facteurs.

Soit, par exemple, le nombre 48 à décomposer en ses facteurs.

1° Ce nombre étant divisible par 2, j'aurai pour facteurs correspondants 2.24.

2° Ce nombre étant divisible par 3, j'aurai pour facteurs correspondants 3.16.

3° 48 étant divisible par 4, j'ai pour facteurs correspondants 4.12.

4° 48 étant divisible par 6, j'ai pour facteurs corrrespondants 6.8.

Pour décomposer 48 en trois facteurs, je décompose 24 (1°) en deux nouveaux facteurs correspondants, ce qui donne :

2.12,
3.8,
4.6 ;

et en les prenant avec le facteur 2, j'aurai d'abord cette première décomposition en trois facteurs :

2.2.12 ;
2.3.8 ;
2.4.6.

J'en fais autant pour le facteur 16 (2°), qui donne 2.8 ; 4.4, et par conséquent j'aurai pour seconde décomposition :

3.2.8 ;
3.4.4.

Opérant de même sur le facteur 12 (3°), qui donne 2.6 ; 3.4 ; j'aurai pour troisième décomposition :

4.2.6 ;
4.3.4.

Opérant enfin de même sur le facteur 8 (4°), qui donne 2.4 ; j'aurai pour quatrième décomposition :

6.2.4.

On voit qu'il n'y a que quatre décompositions différentes en trois facteurs, savoir :

2.2.12 ;
2.3.8 ;
2.4.6 ;
3.4.4.

Si l'on voulait obtenir la décomposition en quatre facteurs, on décomposerait de nouveau les facteurs 12, 8, 6, 4 en deux autres, et l'on ne prendrait que les facteurs différents.

**174.** *Pour simplifier une fraction, on divise ses deux termes par un même nombre, que l'on reconnaît, d'après les caractères de divisibilité, devoir les diviser exactement, et l'on réitère cette opération autant qu'il est possible de le faire.*

Soit la fraction $\frac{4800}{7200}$. Je divise les deux termes par 100, ce qui donne $\frac{48}{72}$.

Les deux termes de cette nouvelle fraction étant divisibles par 8, je les divise par ce nombre et j'obtiens $\frac{6}{9}$.

Cette fraction, déjà beaucoup plus simple que la proposée, peut être encore simplifiée, puisque ses deux termes sont divisibles par 3.

Opérant cette division, j'obtiens $\frac{2}{3}$ qui exprime, en effet, d'une manière beaucoup plus simple la même portion de l'unité représentée par la fraction proposée.

**175.** Lorsqu'une fraction a été simplifiée autant qu'il est possible, on dit qu'elle est *réduite à sa plus simple expression*, et la fraction qu'on obtient s'appelle *irréductible*.

Ainsi la fraction précédente $\frac{4800}{7200}$ est réduite à sa plus simple expression sous la forme $\frac{2}{3}$, qui est irréductible.

**176.** On serait certain de réduire une fraction à sa plus simple expression, si l'on connaissait le plus grand nombre qui pût diviser exactement ses deux termes et qu'on appelle pour cette raison le *plus grand commun diviseur* des deux termes de la fraction.

**177.** La recherche du plus grand commun diviseur est basée sur les définitions et les principes suivants.

Définitions. On appelle *diviseur commun* de deux nombres, tout nombre qui divise exactement l'un et l'autre.

Ainsi, les nombres 48 et 60 ont pour diviseurs : le premier 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48 ; le deuxième, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60.

Les diviseurs communs à l'un et à l'autre sont : 1, 2, 3, 4, 6, 12 ; 12 est le plus grand de tous ; il est par conséquent le plus grand commun diviseur de 48 et 60.



**178.** Principe III. — *Tout nombre qui divise deux autres nombres divise aussi leur différence.*

En effet, chacun de ces nombres valant un certain nombre de fois le diviseur, leur différence vaudra ce même diviseur un nombre de fois exprimé par la différence des quotients.

Ainsi, 60 et 48 étant divisibles par 6, leur différence 12 est aussi divisible par 6 ; et le quotient 2 est égal à la différence des quotients 10 et 8.

**179.** Principe IV. — *Tout nombre qui divise deux autres nombres divise le reste de leur division.*

En effet, le reste de la division de deux nombres n'est autre chose que la différence entre le plus grand de ces nombres, qui a servi de dividende, et le produit du second par le quotient de leur division, c'est-à-dire un multiple de ce nombre.

Ainsi 234 et 65 étant divisibles par 13, si l'on divise le plus grand par le plus petit, on obtiendra pour quotient 3, et pour reste 39 qui est aussi divisible par 13.

**180.** Règle. — *Pour trouver le plus grand commun diviseur entre deux nombres, on divise le plus grand par le plus petit. Si la division se fait exactement, c'est le plus petit nombre qui est le plus grand commun diviseur.*

*Si cette première division donne un reste, on divise le plus petit nombre par ce reste. Si la division réussit, ce reste est le plus grand commun diviseur.*

*Si cette seconde division donne encore un reste, on divise le premier reste par le second, et ainsi de suite, jusqu'à ce que la division se fasse exactement.*

*Le dernier diviseur employé est le plus grand commun diviseur cherché.*

Exemple. — Soit proposé de chercher le plus grand commun diviseur entre 1643 et 371.

Je dispose les deux nombres comme pour la division, puis je tire une ligne horizontale au-dessus des deux nombres pour séparer le diviseur du quotient que j'écrirai au-dessus, ce qui permettra de réunir dans un même tableau toutes les divisions successives, ainsi qu'on le voit ci-dessous :

| | 4 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| 1643 | 371 | 159 | 53 |
| 159 | 53 | 0 | |

Je divise 1643 par 371, ce qui donne 4 pour quotient et 159 pour reste.

Je divise 371 par 159, ce qui donne 2 pour quotient et 53 pour reste. Je divise enfin 159 par 53 et la division réussit.

53 est le plus grand commun diviseur demandé.

**181.** Démonstration. — En effet, je divise le plus grand des deux nombres 1643 par le plus petit 371, pour m'assurer si 371 peut le diviser exactement. J'obtiens pour quotient 4 et pour reste 159; et par conséquent

$$1643 = 371 \times 4 + 159;$$

371 n'est donc pas le plus grand commun diviseur; mais, d'après le principe IV, tout nombre qui divisera 1643 et 371 devra aussi diviser 159; et par conséquent, tous les diviseurs communs à 1643 et 371 seront aussi communs à 371 et 159.

Réciproquement tous les diviseurs communs à 159 et 371 divisent 159 et $371 \times 4$ et par conséquent leur somme 1643; donc tous les diviseurs communs à 159 et 371 sont aussi communs à 1643 et 159; donc ils sont les mêmes; donc le plus grand commun diviseur entre 1643 et 371 est le même que le plus grand commun diviseur entre 371 et 159.

La question est donc ramenée à chercher le plus grand commun diviseur entre 371 et 159. Je divise donc 371 par 159, ce qui donne pour quotient 2 et pour reste 53. Je démontrerais de même que le plus grand commun diviseur entre 371 et 159 est le même que le plus grand commun diviseur entre 159 et 53. Je cherche donc le plus grand commun diviseur entre 159 et 53. La division réussit; par conséquent 53 est le plus grand commun diviseur entre 159 et 53, et par suite entre 371 et 159, et enfin entre 1643 et 371.

Remarquez que les divisions successives finiront toujours par réussir; car les restes étant des nombres entiers de plus en plus petits, on arrivera nécessairement à un dernier reste égal à zéro.

Le nombre de divisions ne peut dépasser le quintuple du nombre des chiffres du plus petit des deux nombres sur lesquels on opère.

**182.** Règle. — *Pour trouver le plus petit nombre divisible à la fois par deux nombres donnés, tels que 60 et 48, on cherche le plus grand commun diviseur entre ces deux nombres, qui est ici 12. On divise le plus petit des deux nombres 48 par le plus grand commun diviseur 12, ce qui donne 4 pour quotient; enfin, multipliant le plus grand des deux nombres 60 par le quotient 4, on obtient 240, qui est le plus petit nombre cherché divisible à la fois par les deux nombres donnés 60 et 48.*

Démonstration. — En effet, cela revient à faire le produit des deux nombres 60 et 48, et à diviser ce produit par le plus grand commun diviseur de ces deux nombres.



240 est dit *le plus petit multiple* des deux nombres 60 et 48.

**183.** Règle. — *Pour trouver le plus petit multiple de plusieurs nombres donnés, on cherche le plus petit multiple des deux premiers; puis le plus petit multiple entre ce premier plus petit multiple et le troisième nombre, et ainsi de suite jusqu'au dernier nombre proposé. Le dernier moindre multiple trouvé est le plus petit nombre divisible à la fois par tous les nombres proposés.*

La démonstration n'offre aucune difficulté d'après ce qui précède.

**184.** *Réduction des fractions au plus petit dénominateur.* Soit à réduire les fractions suivantes au même dénominateur qui soit le plus petit possible,

$$\frac{5}{8}, \quad \frac{17}{20}, \quad \frac{147}{192}, \quad \frac{317}{1440}.$$

Je cherche le plus grand commun diviseur entre 8 et 20, qui est 4. Je divise 8 par 4, ce qui donne 2, et je multiplie 20 par 2, ce qui donne 40, qui est le moindre multiple de 8 et 20.

Je cherche le plus grand commun diviseur entre 40 et 192, lequel est 8; 40 divisé par 8 donne 5 pour quotient; 5 fois 192 donne 960, moindre multiple de 8, 20 et 192.

Cherchant de même le plus grand commun diviseur entre 960 et 1440, je trouve 430; 960 divisé par 480 donne pour quotient 2; 2 fois 1440=2880 est le plus petit dénominateur cherché auquel on réduira, d'après la méthode du n° **175**, les fractions proposées. Voici le tableau du calcul

| | 2880 | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 360 | 144 | 15 | 2 |
| Fractions proposées | $\frac{5}{8}$, | $\frac{17}{20}$, | $\frac{147}{192}$, | $\frac{317}{1440}$. |
| Fractions réduites | $\frac{1800}{2880}$, | $\frac{2448}{2880}$, | $\frac{2205}{2880}$, | $\frac{634}{2880}$. |

**185.** Lorsque dans la recherche du plus grand commun diviseur le dernier diviseur est 1, on en conclut que les deux nombres proposés n'ont pas d'autre diviseur commun que l'unité.

On dit alors que les deux nombres sont premiers entre eux.

**186.** Règle. — *Pour réduire une fraction à sa plus simple expression, on divise ses deux termes par leur plus grand commun diviseur.*

Soit la fraction $\frac{815}{1304}$. Je cherche le plus grand commun diviseur qui est 163; divisant les deux termes par 163, j'obtiens $\frac{5}{8}$, fraction irréductible.

**187.** *Enfin, lorsque la fraction ne peut être simplifiée, qu'elle est irréductible, on peut en obtenir une valeur ap-*

*prochée par un moyen bien simple, qui consiste à diviser ses deux termes par le numérateur.*

Soit, par exemple, la fraction $\frac{3125}{14297}$. Cette fraction ne peut être réduite à une forme plus simple ; car si l'on cherche le plus grand commun diviseur des deux termes, on trouve 1 pour résultat : le numérateur et le dénominateur sont donc des nombres premiers entre eux. Divisant les deux termes par le numérateur, je trouve 1 pour le numérateur, et pour le dénominateur un quotient compris entre 4 et 5 ; la fraction proposée est donc comprise entre $\frac{1}{4}$ et $\frac{1}{5}$.

Questionnaire.

Qu'entend-on par simplifier une fraction? (157)
Dans quel but simplifie-t-on une fraction? (157)
Comment simplifie-t-on une fraction? (158)
Qu'entend-on par *diviseur* d'un nombre? (159)
Qu'est-ce qu'un nombre *premier absolu?* (161)
Démontrer qu'un nombre qui divise exactement deux ou plusieurs nombres divise leur somme. (162)
émontrer qu'un nombre qui divise un autre nombre divise tous les multiples de ce nombre. (163)
Comment reconnait-on qu'un nombre est divisible par 2? (164) La preuve?
Comment reconnait-on qu'un nombre est divisible par 3? (166) La preuve?
Comment reconnait-on qu'un nombre est divisible par 5? (167) La preuve?
Comment reconnait-on qu'un nombre est divisible par 4? (169) La preuve?
Comment reconnait-on qu'un nombre est divisible par 6? (170) La preuve?
Comment reconnait-on qu'un nombre est divisible par 8? (171) La preuve?
Comment reconnait-on qu'un nombre est divisible par 10, 100....? (172) La preuve?
Comment décompose-t-on un nombre en deux, trois, etc., facteurs? (173)
Quand est-ce qu'une fraction est réduite à sa plus simple expression? (175)
Comment réduit-on une fraction à sa plus simple expression? (176)
Qu'entend-on par diviseur commun de deux nombres? (177)
Qu'entend-on par le plus grand commun diviseur de deux nombres? (176)
Démontrer que tout nombre qui divise deux autres nombres divise leur différence. (178)
Démontrer que tout nombre qui divise deux autres nombres divise le reste de leur division. (179)
Comment trouve-t-on le plus grand commun diviseur entre deux nombres? (180)
Comment trouve-t-on le plus petit multiple de deux ou plusieurs nombres? (182, 183)
Comment réduit-on des fractions au plus petit dénominateur? (189)
Qu'entend-on par nombres premiers entre eux? (184)
Quand une fraction dont les deux termes sont des nombres considérables ne peut être simplifiée, comment peut-on en trouver une expression fractionnaire approchée? (187)

### Exercices (IX).

1). Simplifier les fractions suivantes :

$$\frac{2}{4},\quad \frac{30}{48},\quad \frac{210}{630},\quad \frac{324}{540},\quad \frac{1280}{6400}.$$



2.) Donner une forme plus simple aux fractions

$$\frac{320}{540},\quad \frac{1690}{2600},\quad \frac{3000}{4320},\quad \frac{18000}{129600}.$$

3). Réduire à leur plus simple expression les fractions

$$\frac{58}{174},\quad \frac{888}{962},\quad \frac{2403}{2492},\quad \frac{6566}{7772},\quad \frac{30281}{45563}.$$

4). Entre quelles fractions sont comprises

$$\frac{31}{64},\quad \frac{127}{445},\quad \frac{3348}{17963},\quad \frac{62350}{548963},\quad \frac{639685}{73698451}.$$

## § II. CALCUL DES FRACTIONS ORDINAIRES.

### 1. ADDITION DES FRACTIONS ORDINAIRES.

**188.** RÈGLE. — *Pour additionner deux ou plusieurs fractions, si elles ont le même dénominateur, on fait la somme de tous les numérateurs et on lui donne pour dénominateur le dénominateur commun ;*

*Si elles n'ont pas le même dénominateur, on commence par les y réduire et l'on opère comme dans le premier cas.*

1[er] EXEMPLE. Soit à additionner les fractions

$$\frac{1}{9},\quad \frac{4}{9},\quad \frac{5}{9},\quad \frac{7}{9}.$$

Je fais la somme de tous les numérateurs :

$$1 + 4 + 5 + 7 = 17,$$

et par conséquent, le résultat sera $\frac{17}{9}$, et extrayant les entiers, $1\,\frac{8}{9}$.

2[e] EXEMPLE. Soit encore à additionner les fractions

$$\frac{1}{2},\quad \frac{2}{3},\quad \frac{4}{5},\quad \frac{6}{7}.$$

Je réduis au même dénominateur, ce qui donne

$$\frac{105}{210},\quad \frac{140}{210},\quad \frac{168}{210},\quad \frac{180}{210}.$$

Ensuite, additionnant les numérateurs et donnant à la somme le dénominateur commun, j'obtiens $\frac{593}{210} = 2\,\frac{173}{210}$ après l'extraction des entiers.

**189.** DÉMONSTRATION. — En effet, l'addition est une opération qui a pour but de former avec deux ou plusieurs nombres donnés un seul nombre qui renferme autant d'unités qu'il y en a dans tous les nombres proposés. Or, quand il s'agit des fractions, l'unité est exprimée par le