*prochée par un moyen bien simple, qui consiste à diviser ses deux termes par le numérateur.*

Soit, par exemple, la fraction $\frac{3125}{14297}$. Cette fraction ne peut être réduite à une forme plus simple ; car si l'on cherche le plus grand commun diviseur des deux termes, on trouve 1 pour résultat : le numérateur et le dénominateur sont donc des nombres premiers entre eux. Divisant les deux termes par le numérateur, je trouve 1 pour le numérateur, et pour le dénominateur un quotient compris entre 4 et 5 ; la fraction proposée est donc comprise entre $\frac{1}{4}$ et $\frac{1}{5}$.

Questionnaire.

Qu'entend-on par simplifier une fraction? (157)
Dans quel but simplifie-t-on une fraction? (157)
Comment simplifie-t-on une fraction? (158)
Qu'entend-on par *diviseur* d'un nombre? (159)
Qu'est-ce qu'un nombre *premier absolu?* (161)
Démontrer qu'un nombre qui divise exactement deux ou plusieurs nombres divise leur somme. (162)
émontrer qu'un nombre qui divise un autre nombre divise tous les multiples de ce nombre. (163)
Comment reconnait-on qu'un nombre est divisible par 2? (164) La preuve?
Comment reconnait-on qu'un nombre est divisible par 3? (166) La preuve?
Comment reconnait-on qu'un nombre est divisible par 5? (167) La preuve?
Comment reconnait-on qu'un nombre est divisible par 4? (169) La preuve?
Comment reconnait-on qu'un nombre est divisible par 6? (170) La preuve?
Comment reconnait-on qu'un nombre est divisible par 8? (171) La preuve?
Comment reconnait-on qu'un nombre est divisible par 10, 100....? (172) La preuve?
Comment décompose-t-on un nombre en deux, trois, etc., facteurs? (173)
Quand est-ce qu'une fraction est réduite à sa plus simple expression? (175)
Comment réduit-on une fraction à sa plus simple expression? (176)
Qu'entend-on par diviseur commun de deux nombres? (177)
Qu'entend-on par le plus grand commun diviseur de deux nombres? (176)
Démontrer que tout nombre qui divise deux autres nombres divise leur différence. (178)
Démontrer que tout nombre qui divise deux autres nombres divise le reste de leur division. (179)
Comment trouve-t-on le plus grand commun diviseur entre deux nombres? (180)
Comment trouve-t-on le plus petit multiple de deux ou plusieurs nombres? (182, 183)
Comment réduit-on des fractions au plus petit dénominateur? (189)
Qu'entend-on par nombres premiers entre eux? (184)
Quand une fraction dont les deux termes sont des nombres considérables ne peut être simplifiée, comment peut-on en trouver une expression fractionnaire approchée? (187)

### Exercices (IX).

1). Simplifier les fractions suivantes :

$$\frac{2}{4},\quad \frac{30}{48},\quad \frac{210}{630},\quad \frac{324}{540},\quad \frac{1280}{6400}.$$



2.) Donner une forme plus simple aux fractions

$$\frac{320}{540},\quad \frac{1690}{2600},\quad \frac{3000}{4320},\quad \frac{18000}{129600}.$$

3). Réduire à leur plus simple expression les fractions

$$\frac{58}{174},\quad \frac{888}{962},\quad \frac{2403}{2492},\quad \frac{6566}{7772},\quad \frac{30281}{45563}.$$

4). Entre quelles fractions sont comprises

$$\frac{31}{64},\quad \frac{127}{445},\quad \frac{3348}{17963},\quad \frac{62350}{548963},\quad \frac{639685}{73698451}.$$

## § II. CALCUL DES FRACTIONS ORDINAIRES.

### 1. ADDITION DES FRACTIONS ORDINAIRES.

**188.** Règle. — *Pour additionner deux ou plusieurs fractions, si elles ont le même dénominateur, on fait la somme de tous les numérateurs et on lui donne pour dénominateur le dénominateur commun;*

*Si elles n'ont pas le même dénominateur, on commence par les y réduire et l'on opère comme dans le premier cas.*

1er Exemple. Soit à additionner les fractions

$$\frac{1}{9},\quad \frac{4}{9},\quad \frac{5}{9},\quad \frac{7}{9}.$$

Je fais la somme de tous les numérateurs :

$$1 + 4 + 5 + 7 = 17,$$

et par conséquent, le résultat sera $\frac{17}{9}$, et extrayant les entiers, $1\frac{8}{9}$.

2e Exemple. Soit encore à additionner les fractions

$$\frac{1}{2},\quad \frac{2}{3},\quad \frac{4}{5},\quad \frac{6}{7}.$$

Je réduis au même dénominateur, ce qui donne

$$\frac{105}{210},\quad \frac{140}{210},\quad \frac{168}{210},\quad \frac{180}{210}.$$

Ensuite, additionnant les numérateurs et donnant à la somme le dénominateur commun, j'obtiens $\frac{593}{210} = 2\,\frac{173}{210}$ après l'extraction des entiers.

**189.** Démonstration. — En effet, l'addition est une opération qui a pour but de former avec deux ou plusieurs nombres donnés un seul nombre qui renferme autant d'unités qu'il y en a dans tous les nombres proposés. Or, quand il s'agit des fractions, l'unité est exprimée par le dénominateur, ce qui explique la première partie de la règle et motive la préparation à faire dans le second cas, préparation par laquelle on est certain que la somme renferme toutes les unités des fractions proposées.

**190.** Afin de simplifier les calculs, on prendra pour dénominateur commun le plus petit nombre divisible à la fois par tous les dénominateurs des fractions qu'on doit additionner.

Exemple. Soit à additionner les fractions suivantes :

$$\frac{1}{2},\quad \frac{3}{4},\quad \frac{5}{6},\quad \frac{7}{8},\quad \frac{11}{12},\quad \frac{17}{24},\quad \frac{31}{36}.$$

Je prends pour dénominateur commun 72, qui est divisible à la fois par tous les dénominateurs, et opérant ainsi qu'il est indiqué nº **175**, j'obtiens :

$$\frac{36}{72}+\frac{54}{72}+\frac{60}{72}+\frac{63}{72}+\frac{66}{72}+\frac{51}{72}+\frac{62}{72}=\frac{392}{72}=5\,\frac{32}{72}=5\,\frac{4}{9}$$

après simplification de la fraction.

**191**. *Pour additionner entre eux des nombres entiers accompagnés de fractions, on fait d'abord la somme de toutes les fractions et l'on extrait les entiers, s'il y a lieu, pour les porter à la somme des entiers que l'on fait ensuite.*

Exemple. — Soit à additionner $3\,\frac{1}{2}$, $15\,\frac{2}{3}$, $41\,\frac{3}{4}$, $123\,\frac{7}{12}$, $35\,\frac{7}{20}$.

Disposition du calcul.

| | | |
|---|---|---|
| $3\,\frac{1}{2}$ | 30 | |
| $15\,\frac{2}{3}$ | 40 | |
| $41\,\frac{3}{4}$ | 45 | 60 |
| $123\,\frac{7}{12}$ | 35 | |
| $35\,\frac{7}{20}$ | 21 | |
| $219\,\frac{17}{20}$ | 171 | 60 |
| | 51 | 2 |

Je prends 60 pour dénominateur commun et je fais la somme des numérateurs 171; je la divise par 60, ce qui donne 2 pour quotient et 51 pour reste. Je porte 2 de retenue à la colonne des unités, et j'obtiens pour la somme demandée $219\,\frac{51}{60}=219\,\frac{17}{20}$.

**192.** On pourrait aussi réduire les entiers et les fractions, le tout en fraction, et opérer sur les nombres fractionnaire d'après la règle générale, mais le calcul serait beaucoup plus long.



Questionnaire.

Comment se fait l'addition des fractions ordinaires? (188)
Pourquoi est-on obligé de réduire les fractions au même dénominateur avant de les additionner entre elles? (189)
Comment fait-on l'addition des nombres composés d'une partie entière et d'une fraction ordinaire? (191, 192)

## Exercices (X).

**1)**. Additionner les fractions suivantes :

$$\frac{3}{4}+\frac{2}{3};\ \frac{5}{7}+\frac{6}{11};\ \frac{11}{20}+\frac{31}{47};\ \frac{17}{60}+\frac{48}{53};\ \frac{219}{451}+\frac{347}{530}.$$

**2)**. Faire les additions suivantes :

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4};\ \frac{2}{3}+\frac{2}{5}+\frac{2}{7};\ \frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\frac{4}{5};\ \frac{5}{6}+\frac{9}{16}+\frac{13}{24}+\frac{21}{48};$$
$$\frac{3}{10}+\frac{17}{20}+\frac{33}{40}+\frac{19}{64}+\frac{51}{80}.$$

**3)**. Quel est le total des fractions

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}?$$

**4)** Additionner les nombres suivants : $2\frac{1}{2}+3\frac{1}{3}+4\frac{1}{4}+5\frac{1}{5}$; $48\frac{2}{3}+57\frac{3}{4}$; $158\frac{3}{5}+215\frac{5}{6}+31\frac{7}{8}$; $443\frac{1}{2}+516\frac{2}{3}+649\frac{2}{5}+1740\frac{3}{4}$.

## Problèmes sur l'addition des fractions (VI).

**1)**. Quelle est la fraction qui surpasse $\frac{2}{3}$ de $\frac{5}{7}$?

**2)**. On a fait à deux reprises les $\frac{2}{3}$ et les $\frac{3}{10}$ d'un ouvrage ; quelle partie de l'ouvrage a-t-on faite en tout ?

**3)**. Deux ouvriers peuvent faire le même ouvrage ; le premier en 5 heures et le deuxième en 8 heures ; quelle portion de l'ouvrage ces deux ouvriers pourront-ils faire en 1 heure s'ils travaillent ensemble?

**4)**. Deux fontaines peuvent remplir un bassin, la première en 9 heures et la deuxième en 8 heures ; quelle portion du bassin rempliront-elles en 1 heure si on les laisse couler ensemble ?

**5)**. Trois personnes travaillent à un même ouvrage ; la première pourrait l'achever en 12 jours, la deuxième en 10 jours et la troisième en 8 jours; quelle portion de l'ouvrage feront-elles en 1 jour en travaillant ensemble?

**6)**. Trois fontaines coulent ensemble dans un bassin; quelle portion du bassin rempliront-elles en 1 heure, sachant que la première pourrait le remplir en 3 heures, la deuxième en 4 heures et la troisième en 5 heures?

**7)**. On estime que dans une armée la cavalerie doit être le 6ᵉ de l'infanterie et l'artillerie le 10ᵉ ; quelle portion de l'infanterie ces deux dernières armes réunies doivent-elles faire?

8). Le premier jour une machine fait les $\frac{3}{20}$ d'une pièce d'étoffe; le deuxième jour les $\frac{4}{30}$; le troisième jour les $\frac{5}{60}$: quelle portion de la pièce d'étoffe fera-t-elle dans ces trois jours?

9). Deux courriers partent en même temps de deux villes différentes et vont à la rencontre l'un de l'autre : le premier pourrait parcourir la distance en 8 jours et le deuxième en 7 jours ; de quelle portion de la distance se seront-ils rapprochés en 1 jour?

10). Quatre fontaines coulent ensemble dans un réservoir : la première pourrait le remplir en 20 heures, la deuxième en 24 heures, la troisième en 30 heures et la quatrième en 36 heures ; quelle portion du réservoir remplissent-elles en 1 heure?

## 2. SOUSTRACTION DES FRACTIONS ORDINAIRES.

**193.** RÈGLE. — *Pour soustraire une fraction d'une autre fraction, si les deux fractions ont le même dénominateur, on retranche le plus petit numérateur du plus grand, et l'on donne au reste le dénominateur commun; si elles n'ont pas le même dénominateur, on les y réduit et l'on opère ensuite comme dans le premier cas.*

1ᵉʳ EXEMPLE. — Soit à soustraire de $\frac{17}{39}$ la fraction $\frac{4}{39}$; je retranche 4 de 17, ce qui donne 13, et par conséquent le reste demandé sera $\frac{13}{39}=\frac{1}{3}$ après simplification.

2ᵉ EXEMPLE. — Soit à soustraire de $\frac{5}{8}$ la fraction $\frac{5}{9}$; je réduis au même dénominateur, ce qui donne $\frac{45}{72}$, $\frac{40}{72}$ et ensuite pour résultat demandé $\frac{5}{72}$.

**194.** Quand on a à soustraire d'un nombre entier accompagné d'une fraction un autre nombre entier accompagné d'une fraction, on commence par soustraire les fractions entre elles, et ensuite on fait la soustraction des nombres entiers, en ayant égard à la modification qu'on a été obligé de faire si la fraction qui accompagne le petit nombre est plus grande que celle qui accompagne le plus grand.

Soit à retrancher de 31 $\frac{2}{3}$ le nombre 14 $\frac{7}{8}$. Réduisant les fractions au même dénominateur, j'aurai 31 $\frac{16}{24}$ et 14 $\frac{21}{24}$.

Commençant la soustraction par les fractions, j'observe que je ne puis retrancher $\frac{21}{24}$ de $\frac{16}{24}$; mais j'ajoute $\frac{24}{24}$ à cette dernière fraction, ce qui donne $\frac{40}{24}$, de laquelle retranchant $\frac{21}{24}$, je trouve $\frac{19}{24}$; maintenant j'ajoute 1, qui vaut $\frac{24}{24}$, au plus petit nombre 14, et je retranche 15 de 31, ce qui donne 16. Le reste demandé est 16 $\frac{19}{24}$.

Si l'on avait 3 $\frac{5}{7}$ à retrancher de 8, on ajouterait $\frac{7}{7}$ à ce dernier nombre, ensuite 1 à 3, et l'on aurait pour reste 4 $\frac{2}{7}$.

**195.** On pourrait aussi réduire les entiers et les fractions le tout en fractions, et opérer selon la règle générale; mais le calcul serait plus long.

### Questionnaire.

Comment se fait la soustraction des fractions ordinaires? (193)
Quand il s'agit de soustraire un nombre entier accompagné d'une fraction d'un autre nombre entier accompagné ou non d'une fraction, quelles sont les différentes manières de faire l'opération? (194, 195)

### Exercices (XI).

1). De $\frac{3}{4}$ ôter $\frac{5}{7}$; de $\frac{7}{8}$ ôter $\frac{2}{3}$; de $\frac{21}{35}$ ôter $\frac{18}{37}$; de $\frac{48}{121}$ ôter $\frac{34}{195}$; de $\frac{63}{310}$ ôter $\frac{45}{657}$; de $\frac{118}{200}$ ôter $\frac{114}{360}$.

2.) Quelle est la différence entre $\frac{3}{5}$ et $\frac{6}{11}$; entre $\frac{7}{9}$ et $\frac{8}{11}$; entre $\frac{16}{17}$ et $\frac{17}{20}$?

3). Quel est l'excès de $\frac{1}{2}$ sur $\frac{2}{7}$; de $\frac{5}{9}$ sur $\frac{4}{11}$; de $\frac{3}{4}$ sur $\frac{12}{25}$?

4). Effectuer les soustractions suivantes : 2 $\frac{1}{2}$ — 1 $\frac{3}{7}$; 15 $\frac{1}{3}$ — 10 $\frac{2}{9}$; 41 $\frac{3}{4}$ — 27 $\frac{6}{11}$; 148 $\frac{2}{5}$ — 96 $\frac{1}{2}$.

5). Effectuer les soustractions indiquées : 2 $\frac{1}{2}$ — $\frac{4}{5}$; 3 $\frac{2}{3}$ — 2 $\frac{5}{8}$; 21 $\frac{1}{4}$ — 17 $\frac{3}{5}$, 249 $\frac{2}{7}$ — 186 $\frac{3}{4}$; 6348 $\frac{1}{5}$ — 5429 $\frac{3}{7}$; 13 $\frac{49}{51}$ — 10 $\frac{5}{60}$.

### Problèmes sur la soustraction des fractions (VII)

1). En ajoutant un nombre à 3 $\frac{5}{7}$, on a obtenu 8 $\frac{2}{3}$; quel était ce nombre?

2). Au lieu de la fraction $\frac{15}{31}$ on a pris la fraction $\frac{15}{30}$; quelle est l'erreur qu'on a commise?

3). Une machine fait 25 tours de roue en 8 heures, une autre 36 tours de la même roue en 10 heures ; quelle est celle des deux machines qui a le plus de puissance?

4). On a fait en 2 fois les $\frac{2}{7}$ et les $\frac{3}{10}$ d'un ouvrage ; quelle portion de l'ouvrage reste-t-il à faire pour l'achever?

5). Une fontaine remplirait seule en 3 heures un réservoir qu'une soupape viderait en 5 heures ; au bout de 1 heure, quelle portion du réservoir sera-t-elle remplie si la fontaine et la soupape sont ouvertes en même temps?

6). Deux courriers vont à la suite l'un de l'autre et parcourent une même route; le premier la parcourrait en 6 jours et le deuxième en 5 jours ; après le premier jour, en supposant qu'ils soient partis en même temps, de quelle portion de toute la distance se seront-ils éloignés ?

7). On a partagé 348 en deux parties dont l'une est 179 $\frac{3}{4}$ ; quelle est l'autre ?

8). Quelle est la fraction moindre que $\frac{3}{5}$ de $\frac{2}{7}$ ?

9). La somme de deux nombres est 5, et le plus petit 3 $\frac{1}{2}$ ; quel est l'autre ?

10). Que faut-il ajouter à 3 $\frac{1}{2}$ pour faire 4 $\frac{2}{3}$ ;

### 3. MULTIPLICATION DES FRACTIONS ORDINAIRES.

**196**. Règle. — *Pour multiplier une fraction par un nombre entier, on multiplie le numérateur par le nombre entier, sans toucher au dénominateur, ou bien on divise,* si la division est possible exactement, *le dénominateur par le nombre entier, sans toucher au numérateur.*

Exemple. — Soit $\frac{4}{15}$ à multiplier par 5. Je multiplie 4 par 5, et donnant au produit 20 le dénominateur de la fraction, j'obtiens $\frac{20}{15} = 1\,\frac{5}{15} = 1\,\frac{1}{3}$, après extraction des entiers et simplification ; ou bien divisant 15 par 5, sans toucher au numérateur, je trouve $\frac{4}{3} = 1\,\frac{1}{3}$, même résultat qu'auparavant.

Démonstration. — En effet, d'après la définition de la multiplication, il s'agit de trouver un nombre qui se compose de 5 fois la fraction $\frac{4}{15}$ ; le produit sera donc 5 fois plus grand que cette fraction. La règle est donc parfaitement conforme à ce qu'on a vu n° **146**.

Remarque. — Comme on n'est pas toujours certain que la division réussisse, il vaut mieux avoir recours à la multiplication.

**197**. Règle. — *Pour multiplier un nombre entier par une fraction, on multiplie l'entier par le numérateur, et l'on donne au produit le dénominateur de la fraction.*

Exemple. — Soit à multiplier 8 par $\frac{3}{5}$. Je multiplie 8 par 3 et donnant au produit 24 le dénominateur de la fraction, j'obtiens $\frac{24}{5} = 4\,\frac{4}{5}$.

Démonstration. — En effet, d'après la définition de la multiplication, il s'agit de trouver un nombre qui so



composé avec le multiplicande 8 de la même manière que le multiplicateur $\frac{3}{5}$ est composé avec l'unité. Or $\frac{3}{5}$ exprime les $\frac{3}{5}$ de l'unité, ou 3 fois le cinquième de l'unité ; le produit demandé sera donc les $\frac{3}{5}$ de 8, ou 3 fois le $\frac{1}{5}$ de 8. Or le $\frac{1}{5}$ de 8 est $\frac{8}{5}$, et prenant 3 fois $\frac{5}{8}$, j'aurai $\frac{8\times3}{5} = \frac{24}{5}$.

**198**. Règle. — *Pour multiplier une fraction par une autre fraction, on multiplie les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux.*

Ce qui signifie que le produit demandé est une fraction qui a pour numérateur le produit des deux numérateurs, et pour dénominateur le produit des deux dénominateurs des fractions proposées.

Exemple. — Soit $\frac{5}{8}$ à multiplier par $\frac{3}{4}$. Je multiplie les deux numérateurs entre eux, ce qui donne 15 ; et donnant à ce produit, pour dénominateur, le produit $8 \times 4 = 32$ des deux dénominateurs, je trouve $\frac{15}{32}$.

Démonstration. — En effet, multiplier $\frac{5}{8}$ par $\frac{3}{4}$, c'est trouver un nombre qui soit composé avec le multiplicande $\frac{5}{8}$ de la même manière que le multiplicateur $\frac{3}{4}$ est composé avec l'unité, il s'agit de prendre les $\frac{3}{4}$ de $\frac{5}{8}$, ou 3 fois le $\frac{1}{4}$ de $\frac{5}{8}$.

Or le $\frac{1}{4}$ de $\frac{5}{8}$ sera évidemment 4 fois plus petit que $\frac{5}{8}$, et s'obtient par conséquent en multipliant le dénominateur par 4, sans toucher au numérateur (n° **147**) ; $\frac{5}{8\times4}$ exprime donc le $\frac{1}{4}$ de $\frac{5}{8}$, et pour le prendre 3 fois, il faut multiplier cette fraction par 3, ce qui se fait en multipliant le numérateur sans toucher au dénominateur et donne $\frac{5\times3}{8\times4} = \frac{15}{32}$.

Le résultat $\frac{5\times3}{8\times4}$ s'énonce ainsi : 5 que multiplie 3 divisé par 8 que multiplie 4 ; ou 5 multiplié par 3 *sur* 8 multiplié par 4.

**199**. Remarque I. — Il suit de là que le produit de deux fractions ne change pas, dans quelque ordre qu'on les multiplie entre elles.

**200**. Remarque II. — Il est évident que $\frac{15}{32}$ est plus petit que $\frac{5}{8}$, puisqu'il n'en est que les $\frac{3}{4}$, et en même temps plus petit que $\frac{3}{4}$, puisqu'il n'en est que les $\frac{5}{8}$, ce qu'on énonce en général en disant que le *produit de deux frac-*

*tions* PROPREMENT DITES *est plus petit que chacune des fractions qui en sont les facteurs.*

**201**. REMARQUE III. — Si l'on retranche le produit $\frac{15}{32}$ de $\frac{5}{8}$, on trouvera une fraction encore plus petite que $\frac{5}{8}$ et qui n'en sera plus que le $\frac{1}{4}$, car $\frac{15}{32}$ sont les $\frac{3}{4}$ de $\frac{5}{8}$.

**202**. Si l'on avait un nombre entier joint à une fraction à multiplier par un nombre entier joint à une fraction, on réduirait les entiers et les fractions le tout en fraction, et l'on opérerait d'après la règle générale.

Ainsi $3\,\frac{2}{5} \times 7\,\frac{3}{8} = \frac{17}{5} \times \frac{59}{8} = \frac{1003}{40} = 25\,\frac{3}{40}$.

**203**. On pourrait opérer encore de la manière suivante, qui est souvent plus expéditive :

$$\begin{array}{r} 3\,\frac{2}{5} \\ 7\,\frac{3}{8} \\ \hline 23\,\frac{4}{5} \\ 1\,\frac{11}{40} \\ \hline 25\,\frac{3}{40} \end{array}$$

Je prends d'abord 7 fois $3\,\frac{2}{5}$, en multipliant par 7 d'abord la fraction et ensuite l'entier, ce qui donne $23\,\frac{4}{5}$ ; ensuite, je prends le $\frac{1}{8}$ de $3\,\frac{2}{5}$, en disant : le $\frac{1}{8}$ de 3 est 0, il reste 3 qui valent $\frac{15}{5}$, et $\frac{2}{5}$ font $\frac{17}{5}$ dont le $\frac{1}{8}$ est $\frac{17}{40}$, et répétant ce $\frac{1}{8}$ 3 fois, j'obtiens $\frac{51}{40} = 1\,\frac{11}{40}$. J'ai donc à additionner $23\,\frac{4}{5}$ et $1\,\frac{11}{40}$. Additionnant les deux fractions, réduites d'abord au dénominateur 40, j'obtiens $23\,\frac{32}{40} + 1\,\frac{11}{40} = 25\,\frac{3}{40}$, comme précédemment.

On a soin de biffer le produit $0\,\frac{17}{40}$, qui ne doit pas être compris dans l'addition.

### Usage de la multiplication des fractions.

**204**. La multiplication des fractions s'emploie dans toutes les questions qui conduisent à prendre d'un nombre quelconque une portion, ou en général un nombre de parties exprimé par un autre nombre, ce qu'on désigne par les mots : *prendre des fractions de fractions.*



**205**. RÈGLE GÉNÉRALE. — *Pour prendre des fractions d'autres fractions en nombre quelconque, on multiplie tous les numérateurs entre eux, et ensuite tous les dénominateurs entre eux.*

DÉMONSTRATION. — En effet :

EXEMPLE 1er. — Soit à prendre les $\frac{3}{5}$ de $\frac{8}{9}$ ; c'est la multiplication directe de $\frac{8}{9}$ par $\frac{3}{5}$. On a donc $\frac{8\times3}{9\times5}$ ; et supprimant le facteur 3, commun au numérateur et au dénominateur, ce qui revient à diviser ces deux termes par 3, on a $\frac{8}{3\times5} = \frac{8}{15}$.

EXEMPLE 2. Soit à prendre les $\frac{2}{3}$ de $\frac{4}{5}$. Les $\frac{2}{3}$ de $\frac{4}{5}$ ou $\frac{4}{5} \times \frac{2}{3} = \frac{4\times2}{5\times3}$.

Les $\frac{8}{9}$ de cette fraction seront $\frac{4\times2}{5\times3} \times \frac{8}{9} = \frac{4\times2\times8}{5\times3\times9} = \frac{64}{135}$.

EXEMPLE 3. — Prendre les $\frac{3}{4}$ des $\frac{8}{9}$ des $\frac{11}{12}$ de 36 ; les $\frac{11}{12}$ de 36 ou $36 \times \frac{11}{12} = \frac{36\times11}{12}$.

Les $\frac{8}{9}$ de ce premier résultat ou $\frac{36\times11}{12} \times \frac{8}{9} = \frac{36\times11\times8}{12\times9}$. Et enfin les $\frac{3}{4}$ de ce deuxième résultat seront $\frac{36\times11\times8\times3}{12\times9\times4} = 22$.

Supprimant les facteurs 36 et 12, communs au numérateur et au dénominateur, on trouve pour résultat 22.

### Questionnaire.

Comment multiplie-t-on une fraction par un nombre entier ? (196)
Des deux manières de faire l'opération, laquelle est le plus souvent préférable ? (196)
Quelle est la règle pour multiplier une fraction ordinaire par une autre fraction ordinaire ? (198)
Prouver que le produit de deux fractions proprement dites est toujours plus petit que chacune d'elles (200)
Si l'on avait à multiplier entre eux des nombres entiers joints à des fractions, comment ferait-on ? (202, 203)
Dans quel cas la multiplication des fractions s'emploie-t-elle ? (204)
Comment prend-on des fractions d'autres fractions ? (205)

### Exercices (XII).

1). Multiplier $\frac{3}{4}$ par 56 ; $\frac{7}{8}$ par 9 ; $\frac{10}{2}$ par 6 ; $\frac{13}{48}$ par 12 ; $\frac{674}{739}$ par 25.

2). Prendre les $\frac{5}{7}$ de 56 ; les $\frac{8}{9}$ de 126 ; les $\frac{11}{12}$ de 360 ; les $\frac{31}{40}$ de 240 ; les $\frac{123}{250}$ de 1250.

3). Prendre les $\frac{2}{3}$ de 8 ; les $\frac{7}{9}$ de 16 ; les $\frac{15}{23}$ de 136 ; les $\frac{240}{823}$ de 413 ; les $\frac{999}{1966}$ de 35.

4). Quelle est la moitié d'un quart ; le tiers d'un cinquième ; le quart d'un neuvième ; le cinquième d'un demi ; le onzième d'un quart ?

5). Multiplier $\frac{2}{3}$ par $\frac{3}{7}$ ; $\frac{4}{5}$ par $\frac{6}{11}$ ; $\frac{3}{19}$ par $\frac{5}{8}$ ; $\frac{20}{21}$ par $\frac{5}{12}$ ; $\frac{30}{47}$ par $\frac{13}{28}$.

6). Effectuer les multiplications suivantes : $\frac{3}{5} \times \frac{8}{9}$ ; $\frac{4}{7} \times \frac{2}{3}$ ; $\frac{16}{21} \times \frac{13}{40}$ ; $\frac{29}{57} \times \frac{18}{23}$ ; $\frac{148}{549} \times \frac{87}{163}$.

7). Prendre les $\frac{5}{8}$ de $\frac{3}{7}$ ; les $\frac{8}{9}$ de $\frac{1}{2}$ ; les $\frac{10}{11}$ de $\frac{12}{13}$ ; les $\frac{20}{41}$ de $\frac{2}{3}$ ; les $\frac{52}{67}$ de $\frac{29}{41}$.

8). Prendre les $\frac{2}{3}$ des $\frac{3}{4}$ de 8 ; les $\frac{5}{6}$ des $\frac{2}{3}$ de 9 ; les $\frac{7}{8}$ des $\frac{4}{5}$ de 20 ; les $\frac{3}{5}$ des $\frac{7}{8}$ de 80 ; le $\frac{1}{4}$ des $\frac{3}{5}$ des $\frac{8}{9}$ de 252 ; le $\frac{1}{3}$ de $\frac{2}{5}$ des $\frac{7}{8}$ de $\frac{20}{41}$.

### Problèmes sur la multiplication des fractions (VIII).

1). Quels sont les $\frac{3}{4}$ de 80 francs ?

2). Quels sont les $\frac{5}{6}$ de $3\frac{4}{7}$ ?

3). Quels sont les $\frac{17}{25}$ de 750 ?

4). On a donné à une personne les $\frac{5}{8}$ de 720 francs ; combien lui a-t-on donné ?

5). Un ouvrier peut faire en 1 heure les $\frac{5}{9}$ d'un ouvrage ; un autre ne peut faire que les $\frac{3}{4}$ de ce que fait le premier ; quelle partie de l'ouvrage fera-t-il en 1 heure ?

6). Quels sont les $\frac{3}{4}$ de 20 francs ajoutés avec les $\frac{7}{10}$ de la même somme ?

7). Une fontaine peut remplir un bassin en 8 heures ; une autre fontaine donne 3 fois moins d'eau ; quelle partie du bassin remplirait-elle en 1 heure ?

8). Que sont les $\frac{2}{3}$ des $\frac{2}{5}$ de 240 ?

9). Calculer les $\frac{3}{5}$ de $29\frac{2}{7}$ ?

10). On doit payer un ouvrage 2140 francs ; combien payera-t-on pour les $\frac{17}{20}$ de cet ouvrage ?

## 4. DIVISION DES FRACTIONS ORDINAIRES.

**206**. Règle. — *Pour diviser une fraction par un nombre entier, on multiplie le dénominateur par le nombre entier sans toucher au numérateur ; ou bien on divise,* si la division peut se faire exactement, *le numérateur par le nombre entier, sans toucher au dénominateur.*

Exemple. — Soit $\frac{6}{7}$ à diviser par 3. Je multiplie le dénominateur par 3 sans toucher au numérateur, ce qui donne $\frac{6}{21}$, qui se réduit à $\frac{2}{7}$.

Ou bien, comme la division peut se faire exactement, je divise le numérateur par 3 sans toucher au dénominateur, ce qui donne immédiatement le même résultat $\frac{2}{7}$.

Remarque. — Comme on n'est pas toujours certain que la division réussira, il vaut mieux avoir recours à la multiplication.



Démonstration. — En effet, diviser $\frac{6}{7}$ par 3, c'est chercher un nombre qui, multiplié par le diviseur 3, reproduise le dividende $\frac{6}{7}$. Ce nombre inconnu est donc 3 fois plus petit que $\frac{6}{7}$. Il n'y a donc qu'à rendre cette fraction 3 fois plus petite, ce qui est conforme à la règle du n° **147**.

**207**. Règle. — *Pour diviser un nombre entier par une fraction, on multiplie le nombre entier par la fraction diviseur renversée.*

Exemple. — Soit 9 à diviser par $\frac{5}{7}$. Je renverse la fraction diviseur, c'est-à-dire que je prends le dénominateur pour numérateur et le numérateur pour dénominateur, ce qui donne $\frac{7}{5}$ ; ensuite je multiplie 9 par $\frac{7}{5}$ et j'obtiens $\frac{9 \times 7}{5} = \frac{63}{5} = 12\frac{3}{5}$.

Démonstration. — En effet, d'après la définition de la division, diviser 9 par $\frac{5}{7}$, c'est chercher un nombre qui, multiplié par le diviseur $\frac{5}{7}$, reproduise le dividende 9 ; or, multiplier un nombre par $\frac{5}{7}$ ou en prendre les $\frac{5}{7}$, c'est la même chose. C'est donc comme si l'on disait : les $\frac{5}{7}$ d'un nombre sont 9, quel est ce nombre ? Alors 1 seul septième de ce nombre sera le $\frac{1}{5}$ de 9 ou $\frac{9}{5}$, et les $\frac{7}{7}$ du nombre inconnu ou ce nombre lui-même sera $\frac{9}{5} \times 7 = \frac{9 \times 7}{5}$, qu'on peut mettre sous la forme $9 \times \frac{7}{5}$, ce qui est conforme à la règle ci-dessus.

**208**. Règle. — *Pour diviser une fraction par une fraction, on multiplie la fraction dividende par la fraction diviseur renversée.*

Exemple. — Soit $\frac{3}{7}$ à diviser par $\frac{4}{5}$. Je renverse la fraction diviseur, ce qui donne $\frac{5}{4}$, puis je multiplie $\frac{3}{7}$ par $\frac{5}{4}$, ce qui donne $\frac{3 \times 5}{7 \times 4} = \frac{15}{28}$.

Démonstration. — En effet, diviser $\frac{3}{7}$ par $\frac{4}{5}$, c'est chercher un nombre qui, multiplié par le diviseur $\frac{4}{5}$, reproduise le dividende $\frac{3}{7}$. Or, multiplier un nombre par $\frac{4}{5}$, ce n'est autre chose que prendre les $\frac{4}{5}$ de ce nombre. C'est donc comme si l'on disait : les $\frac{4}{5}$ de ce nombre inconnu sont $\frac{3}{7}$, quel est ce nombre ? Dès lors $\frac{1}{5}$ de ce nombre ne sera plus que le quart de $\frac{3}{7}$ ou $\frac{3}{7 \times 4}$, et les $\frac{5}{5}$ de ce nombre inconnu ou ce nombre lui-même sera 5 fois plus grand, et par conséquent $\frac{3\times5}{7\times4}$, qui peut se mettre sous la forme $\frac{3}{7}\times\frac{5}{4}$, ce qui reproduit la règle énoncée.

**209.** REMARQUE. — Il suit de là que lorsqu'on divise un nombre quelconque par une fraction proprement dite, le quotient est toujours plus grand que le dividende. En effet, dans l'exemple précédent, par exemple, le dividende $\frac{3}{7}$ n'est que les $\frac{4}{5}$ du quotient $\frac{15}{28}$.

Et si l'on retranchait $\frac{3}{7}$ de $\frac{15}{28}$, le reste ne serait plus que le $\frac{1}{5}$ de $\frac{15}{28}$.

**210.** Si l'on avait un nombre entier joint à une fraction à diviser par un autre nombre entier joint à une fraction, on réduirait le tout en fraction, au dividende et au diviseur, et on opérerait suivant la règle générale.

EXEMPLE. — Ainsi, $2\,\frac{4}{5} : 3\,\frac{7}{8} = \frac{14}{5} : \frac{31}{8} = \frac{14}{5}\times\frac{8}{31} = \frac{14\times8}{5\times31} = \frac{112}{155}$.

**211.** REMARQUE. — Il faudrait bien se garder de diviser le dividende $2\,\frac{4}{5}$ d'abord par 3, ensuite par $\frac{7}{8}$ et d'additionner les deux quotients, le résultat serait tout à fait faux ; car, en divisant le dividende par deux nombres tous deux plus petits que le diviseur, on obtiendrait deux quotients trop grands l'un et l'autre, et par conséquent leur somme serait trop grande. Mais on pourrait diviser d'abord 2 par $3\,\frac{7}{8}$, ensuite $\frac{4}{5}$ par $3\,\frac{7}{8}$, et additionner les deux quotients, seulement le calcul serait plus long.

### Usage de la division des fractions.

**212.** La division des fractions s'emploie dans toutes les questions qui ont pour but de trouver un nombre dont on connaît une portion ou plus généralement un nombre donné de parties égales.

#### Questionnaire.

Comment divise-t-on une fraction ordinaire par un nombre entier ? (206)
Laquelle des deux manières de faire cette opération devra-t-on le plus souvent préférer ? (206)
Comment divise-t-on un nombre entier par une fraction ordinaire, et quelle idée doit-on se faire de cette opération ? (207).
Quelle est la règle pour la division des fractions ordinaires ? (208)
Comment divise-t-on un nombre entier auquel est joint une fraction par un autre nombre entier joint à une fraction ? (210)
Quelles sont les questions dans lesquelles la division des fractions doit être employée ? (212)



### Exercices (XIII).

1). Diviser $\frac{4}{5}$ par 2 ; $\frac{3}{7}$ par 6 ; $\frac{5}{8}$ par 10 ; $\frac{7}{9}$ par 11 ; $\frac{10}{11}$ par 12.
2). Diviser 3 par $\frac{1}{2}$ ; 5 par $\frac{2}{3}$ ; 7 par $\frac{5}{6}$ ; 8 par $\frac{8}{9}$ ; 9 par $\frac{10}{12}$.
3). Effectuer les divisions suivantes :
$\frac{3}{5}:\frac{4}{7}$ ; $\frac{4}{7}:\frac{3}{5}$ ; $\frac{1}{2}:\frac{1}{3}$ ; $\frac{1}{4}:\frac{3}{5}$ ; $\frac{2}{3}:\frac{1}{7}$ ; $\frac{3}{5}:\frac{7}{9}$ ; $\frac{4}{9}:\frac{3}{7}$ ; $\frac{10}{11}:\frac{11}{12}$ ; $\frac{17}{22}:\frac{30}{61}$ ; $\frac{131}{250}:\frac{486}{795}$
4). Effectuer les divisions suivantes : $2\frac{1}{2}:3\frac{1}{3}$ ; $4\frac{2}{5}:7\frac{2}{3}$ ; $18\frac{1}{5}:2\frac{1}{4}$ ; $5:2\frac{1}{2}$ ; $3\frac{1}{2}:7$ ; $31\frac{1}{2}:12\frac{2}{3}$ ; $148\frac{4}{5}:29\frac{2}{7}$.

### Problèmes sur la division des fractions.

1). Quel est le nombre dont les $\frac{3}{4}$ sont 27 ?

2). Quel est le nombre tel qu'en le multipliant par $2\,\frac{3}{5}$ le résultat soit 52 ?

3). Le nombre 36 est le produit de deux nombres dont l'un est $10\,\frac{5}{6}$ ; quel est l'autre ?

4). On a payé 40 francs pour les $\frac{4}{7}$ d'un ouvrage ; combien payera-t-on pour l'ouvrage entier ?

5). Une société d'hommes et de femmes a dépensé une certaine somme dont les hommes seuls ont payé les $\frac{2}{3}$ et ont donné 42 fr. ; quelle était la dépense totale ?

6). Par quel nombre faut-il multiplier $29\,\frac{1}{2}$ pour obtenir $67\,\frac{1}{8}$ ?

7). Pour 27 journées et demie un ouvrier a reçu 110 fr. ; quel est le prix de la journée ?

8). En 5 heures $\frac{3}{4}$ une roue fait 11500 tours ; combien cette roue fait-elle de tours en 1 heure ?

9). Un ouvrier qui s'était engagé à faire un travail est forcé de l'interrompre après en avoir fait les $\frac{16}{17}$, et il reçoit 70 francs ; combien devait être payé l'ouvrage entier ?

10). Les $\frac{2}{5}$ des $\frac{3}{7}$ d'une somme sont 24 francs ; quelle est cette somme ?

# FRACTIONS DÉCIMALES.

## § I. NUMÉRATION.

### 1. NOTIONS PRÉLIMINAIRES.

**213.** *On entend par fractions décimales, une ou plusieurs parties de l'unité partagée en parties égales de dix en dix fois plus petites ; ou, plus simplement, une ou plusieurs parties sous-décuples de l'unité.*

Ainsi l'on suppose l'unité que l'on considère, partagée en dix parties égales ou *dixièmes* ; puis le dixième partagé