3). Un marchand fait un mélange composé de 50 hectolitres de blé à 46 fr., de 40 hectolitres de blé d'une autre espèce à 45 fr. et de 10 hectolitres d'une troisième espèce à 44 fr.; combien coûtera l'hectolitre du mélange?

4). On a fondu une pièce de bronze du poids de 10000 kilogrammes en y mettant trois fois autant de cuivre que d'étain; le cuivre vaut 2 fr. 70 c. le kilogramme, et l'étain 2 fr. 20 c.; à combien revient cette pièce de bronze?

5). Un ouvrier a fait le lundi 34 mètres 2 décimètres, le mardi 37 mètres 8 décimètres, le mercredi 36 mètres 9 décimètres, le jeudi 35 mètres 7 décimètres, le vendredi 36 mètres 6 décimètres, le samedi 34 mètres 8 décimètres; combien fait-il de mètres par jour, terme moyen?

6). Une propriété a rapporté, la première année 3450 fr., la deuxième année 4160, la troisième 2965, la quatrième 3745, la cinquième 3280; quel est le revenu moyen de cette propriété?

7). Le laiton se fait en fondant du zinc avec du cuivre dans le rapport de 3 à 7. Le kilogramme de cuivre coûtant 2 fr. 70 c., et celui du zinc 90 c., quel sera le prix d'un kilogramme de laiton?

8). Le bronze des canons s'obtient en fondant de l'étain avec du cuivre dans le rapport de 11 à 100; le cuivre coûtant 1 fr. 60 c. le kilogramme; et l'étain 2 fr. 75 c., quel sera le prix d'un kilogramme de bronze?

9). Un épicier a fait un achat d'huile pour 6000 fr. dont il doit payer le quart dans 3 mois, le tiers dans 6 mois et le reste dans 10 mois; s'il ne voulait faire qu'un seul payement, à quelle époque devrait-il le faire?

10). Un marchand a acheté du drap pour une somme de 10000 fr., à un an de crédit; au bout de 5 mois il paye 4000 fr.; à quel terme peut-il remettre le dernier payement?

Problèmes sur la règle de mélange et d'alliage de deuxième espèce (XXXIV).

1). Un marchand a du blé à 19 fr. et à 16 fr. l'hectolitre, il voudrait faire un mélange dont l'hectolitre revînt à 18 fr.; combien doit-il prendre d'hectolitres de chaque espèce?

2). Un marchand de vin veut faire un mélange de deux espèces de vin, la première à 45 et la deuxième à 36 c. le litre, de manière qu'il puisse vendre le mélange 40 c. le litre; combien doit-il prendre de chaque espèce?

3). Avec du vin à 45 et 36 c. le litre, comment faire un mélange de 90 litres qui revienne à 40 c. le litre?

4). Avec du blé à 23 et 28 fr. l'hectolitre, comment faire un mélange de 100 hectolitres qui revienne à 25 fr. l'hectolitre?

5). On a de l'or contenant un neuvième et un quinzième de cuivre; dans quelle proportion faut-il allier ces deux métaux pour obtenir de l'or contenant un dixième de cuivre?

6). Un orfèvre a de l'argent contenant un huitième et un douzième de cuivre; combien faut-il en prendre de chaque espèce pour en faire un alliage contenant un dixième de cuivre?

7). Avec du vin à 60, 45 et 40 c. le litre, on veut faire un mélange qui revienne à 50 c.; combien doit-on en prendre de chaque espèce?

8). Avec de l'or aux titres de 0,920, 0,860, 0,850, comment faire un métal dont le titre soit 0,900?

9). On a quatre hectolitres de vin à 60 c. le litre; combien faudra-t-il y ajouter d'eau pour mettre le litre à 50 c.?

10). Avec du vin à 60, 50, 40 et 30 c. le litre, comment faire un mélange de 1000 litres de vin à 45 c. le litre?

I. PROBLÈMES RESOLUS A L'AIDE DES PROPORTIONS.

1. PROPRIÉTÉS DES PROPORTIONS.

418. On appelle proportion par quotient, ou simplement proportion, l'égalité de deux rapports par quotient.

Ainsi, les quatre nombres 20, 5, 32, 8, tels que le rapport entre 20 et 5 est le même que le rapport entre 32 et 8, forment une proportion, que l'on écrit de la manière suivante :

$$20 : 5 = 32 : 8,$$

en séparant par deux points les deux termes de chaque rapport, et les deux rapports par le signe =.

Autrefois on écrivait

$$20 : 5 :: 32 : 8,$$

en séparant les deux rapports par quatre points. Comme ce mode d'écriture se rencontre souvent dans les anciens auteurs, nous avons cru devoir l'indiquer.

On énonce la proportion en disant : 20 *est à* 5 *comme* 32 *est à* 8.

20 est l'antécédent du premier rapport, 5 le conséquent; 32 l'antécédent du second rapport, 8 le conséquent. 20 et 8, situés aux extrémités de la proportion, sont

dits les *extrêmes*, 5 et 32, placés au milieu, sont les *moyens*.

On peut aussi écrire la proportion précédente sous la forme $\frac{20}{5}=\frac{32}{8}$.

419. Propriété fondamentale. — *Dans toute proportion par quotient, le produit des extrêmes est égal au produit des moyens.*

Démonstration. En effet, soit la proportion

$$20:5=32:8$$

dans laquelle le rapport constant est 4.

Au lieu des antécédents 20 et 32, je puis écrire 5×4 et 8×4 ; car dans tout rapport par quotient l'antécédent est égal au produit du conséquent par la valeur du rapport, puisque l'antécédent est le dividende, le conséquent le diviseur, et la valeur du rapport le quotient ; j'aurai donc

$$5\times4:5=8\times4:8,$$

où l'on voit que les produits des extrêmes et des moyens se composent des mêmes facteurs.

420. On peut encore démontrer cette propriété de la manière suivante :

La proportion proposée peut s'écrire $\frac{20}{5}=\frac{32}{8}$, ce qui donne par la réduction au même dénominateur :

$$\frac{20\times8}{5\times8}=\frac{32\times5}{8\times5},$$

et les dénominateurs étant égaux, puisque $5\times8=8\times5$, on en conclut que

$$20\times8=32\times5,$$

ce qui démontre la propriété énoncée.

421. Cette propriété est tellement importante par ses applications, qu'il est nécessaire de prouver qu'elle n'appartient qu'aux proportions par quotient.

Si quatre nombres écrits sur une même ligne, à la suite les uns des autres, ne sont pas en proportion, le produit des extrêmes ne sera pas égal au produit des moyens.

Démonstration. Soient, par exemple, les nombres 6, 4, 20, 15 ; la valeur du rapport entre 6 et 4 étant $\frac{6}{4}$, et celle du rapport entre 20 et 15 étant $\frac{20}{15}$, je peux remplacer 6 par $4\times\frac{6}{4}$, 20 par $15\times\frac{20}{15}$, et écrire les quatre nombres dans le même ordre :

$$4\times\tfrac{6}{4},\ 4,\ 15\times\tfrac{20}{15},\ 15.$$

Où l'on voit que le produit des extrêmes $4\times\frac{6}{4}\times15$ n'est pas égal au produit des moyens $4\times15\times\frac{20}{15}$; et cela vient de ce que la valeur $\frac{6}{4}$ du premier rapport n'est pas égale à la valeur $\frac{20}{15}$ du second rapport, car les deux autres facteurs des deux produits sont exactement les mêmes.

422. Réciproquement. *Si quatre nombres écrits sur une même ligne sont tels, que le produit des extrêmes soit égal au produit des moyens, ces quatre nombres forment une proportion.*

Démonstration. Car s'ils ne formaient pas une proportion, le produit des extrêmes ne serait pas égal au produ des moyens ; ce qui serait contraire à la supposition.

423. Il résulte de la propriété fondamentale des proportions qu'*on peut, dans toute proportion, changer la place des moyens, renverser les termes de chaque rapport, changer la place des rapports* sans que la proportion cesse d'exister. Ce qui donne huit manières d'écrire la proportion.

Ainsi, dans la proportion :	$20:5=32:8$ (1)
J'obtiens successivement, en changeant la place des moyens	$20:32=5:8$ (2)
En renversant les termes de chaque rapport	$5:20=8:32$ (3)
En changeant les moyens de place	$5:8=20:32$ (4)
En changeant les rapports de place dans la proportion (1),	$32:8=20:5$ (5)
En faisant sur cette dernière proportion des changements analogues aux précédents	$32:20=8:5$ (6)
	$8:32=5:20$ (7)
	$8:5=32:20$ (8)

On voit, en effet, que 5 et 32 sont toujours moyens ou extrêmes ensemble ainsi que 20 et 8.

424. Il résulte encore de la propriété fondamentale qu'*on peut multiplier ou diviser les deux antécédents, multiplier ou diviser les deux conséquents par un même nombre sans altérer la proportion.*

En effet, on multiplie ou l'on divise à la fois l'un des extrêmes et l'un des moyens, ou bien l'un des moyens et l'un des extrêmes par un même nombre, et par conséquent le produit des extrêmes reste toujours égal à celui des moyens.

425. Mais la conséquence la plus importante de la propriété fondamentale, c'est qu'on peut toujours déterminer le quatrième terme d'une proportion dont trois termes sont connus, d'après la règle suivante, à laquelle on a donné le nom de *règle de trois*.

Règle de trois. — *Pour déterminer le quatrième terme d'une proportion dont trois termes sont connus, si le terme inconnu est un extrême, on fait le produit des moyens et on divise ce produit par l'extrême connu; si c'est un moyen, on divise le produit des extrêmes par le moyen connu.*

Démonstration. En effet, soit la proportion

$$15:28=30:x,$$

x désignant le terme inconnu.

Puisque ces quatre nombres sont en proportion, le produit des extrêmes $15\times x$ doit être égal au produit des moyens 28×30. Je connais donc un produit 28×30 et un des facteurs 15 de ce produit, j'obtiendrai l'autre facteur x en divisant le produit 28×30 par le facteur connu 15, et j'aurai par conséquent en indiquant la division

$$x=\frac{28\times30}{15}.$$

Simplifiant cette expression fractionnaire, en supprimant au numérateur et au dénominateur le facteur 15, j'obtiens $x=56$.

Pareillement, soit la proportion

$$13:39=x:12.$$

Comme le produit $39\times x$ doit être égal au produit 13×12, j'aurai par le même raisonnement

$$x=\frac{13\times12}{39}=\frac{1\times12}{3}=3.$$

426. Les proportions ont encore d'autres propriétés qui peuvent servir à simplifier la solution des problèmes. On peut les ramener aux propriétés suivantes :

2ᵉ Propriété. — *Si l'on ajoute chaque conséquent à son antécédent, ou si on l'en retranche, il y aura encore proportion entre les quatre nombres.*

Démonstration. Soit la proportion

$$20:5=32:8.$$

En ajoutant le conséquent à l'antécédent dans chaque rapport, j'aurai la nouvelle proportion

$$25:5=40:8.$$

En effet, chacun des nouveaux antécédents contiendra une fois de plus son conséquent; par conséquent, il y a égalité entre les deux rapports.

Il en serait de même si l'on retranchait le conséquent de l'antécédent; les deux nouveaux rapports seraient seulement diminués d'une unité.

427. 3ᵉ Propriété. — *La somme des antécédents est à la somme des conséquents comme un antécédent est à son conséquent.*

Démonstration. Soit la proportion

$$20:5=32:8;$$

changeant les moyens de place, j'aurai

$$20:32=5:8,$$

et ajoutant le conséquent à l'antécédent dans chaque rapport, j'obtiens

$$20+32:32=5+:8.$$

et changeant encore les moyens de place,

$$20 + 32 : 5 + 8 = 32 : 8.$$

On démontrerait de même pour la différence des antécédents et des conséquents, et l'on aurait

$$32 - 20 : 8 - 5 = 20 : 5.$$

On peut étendre cette propriété à autant de rapports égaux qu'on voudra.

428. *Dans toute suite de rapports égaux, la somme de tous les antécédents est à la somme de tous les conséquents comme un antécédent est à son conséquent.*

DÉMONSTRATION. Soit la suite de rapports égaux

$$3 : 12 = 4 : 16 = 5 : 20 = 7 : 28.$$

Je ne considère que les deux premiers rapports égaux qui forment une proportion, et d'après la propriété ci-dessus, que la somme des antécédents est à la somme des conséquents comme un antécédent est à son conséquent, j'ai

$$3 + 4 : 12 + 16 = 4 : 16.$$

Au lieu du rapport 4 : 16, mettant le rapport égal 5 : 20, j'aurai la proportion

$$3 + 4 : 12 + 16 = 5 : 20.$$

Appliquant à cette nouvelle proportion la même propriété, j'aurai

$$3 + 4 + 5 : 12 + 16 + 20 = 5 : 20;$$

et au lieu du rapport 5 : 20, mettant le rapport 7 : 28,

$$3 + 4 + 5 : 12 + 16 + 20 = 7 : 28,$$

proportion qui donne encore, en vertu de la même propriété,

$$3 + 4 + 5 + 7 : 12 + 16 + 20 + 28 = 7 : 28.$$

A la place du rapport 7 : 28 je pourrais mettre un autre quelconque des trois autres rapports égaux, ce qui donnerait en tout quatre proportions, c'est-à-dire autant qu'il y y a de rapports égaux dans la suite proposée.

429. 4^e^ PROPRIÉTÉ.— *Si, après avoir placé les unes sous les autres deux ou plusieurs proportions, on les multiplie terme à terme, les quatre produits résultants forment aussi une proportion.*

DÉMONSTRATION. Soient, par exemple, les trois proportions

$$2 : 5 = 6 : 15,$$
$$4 : 7 = 8 : 14,$$
$$3 : 11 = 9 : 33.$$

Je peux les écrire sous la forme suivante :

$$\frac{2}{5} = \frac{6}{15},$$
$$\frac{4}{7} = \frac{8}{14},$$
$$\frac{3}{11} = \frac{9}{33},$$

et multipliant ces égalités membre à membre, les deux produits seront évidemment égaux. J'aurai donc, en indiquant seulement les produits,

$$\frac{2 \times 4 \times 3}{5 \times 7 \times 11} = \frac{6 \times 8 \times 9}{15 \times 14 \times 33},$$

que je puis écrire sous la forme ordinaire des proportions

$$2 \times 4 \times 3 : 5 \times 7 \times 11 = 6 \times 8 \times 9 : 15 \times 14 \times 33;$$

ce qu'il fallait démontrer.

430. On appelle *proportion continue* une proportion dans laquelle les deux moyens sont égaux, telle que $12 : 6 = 6 : 3$.

Dans ce cas, le produit du moyen par lui-même est égal au produit des deux extrêmes.

Si l'on avait la proportion continue $3 : x = x : 12$, comme on a $x \times x = 3 \times 12$, il faudrait trouver pour x un nombre qui, multiplié par lui-même, reproduisît $3 \times 12 = 36$. Ce nombre est évidemment 6.

On l'appelle *moyen proportionnel* entre les deux nombres 3 et 12.

On verra plus bas comment on peut trouver un moyen proportionnel entre deux nombres.

Questionnaire.

Qu'est-ce qu'une proportion par quotient ou simplement proportion? (418)
Quelle est la propriété fondamentale des proportions par quotient? (419)
Comment peut-on déterminer le quatrième terme d'une proportion dont les trois autres termes sont connus? (425)
Démontrer que dans toute proportion la somme ou la différence des antécédents est à la somme ou à la différence des conséquents comme un antécédent est à son conséquent? (427)
Quelle est la propriété des rapports égaux? (428)
Démontrer cette propriété. (428)
Démontrer que si l'on multiplie terme à terme deux ou plusieurs proportions, les quatre produits résultants forment aussi une proportion. (429)
Qu'entend-on par une proportion continue? (430)
Comment détermine-t-on le terme moyen d'une proportion continue dont les deux autres termes sont connus? (430)

Exercices (XXIX).

Déterminer le terme inconnu x dans les proportions suivantes :

1). 1° $7:18=21:x$
2° $10:35=x:255$
3° $144:x=740:370$
4° $x:28=2:8$
5° $3\frac{1}{2}:x=4\frac{1}{2}:1$

2). 1° $0,3:x=0,48:0,9$
2° $18,2:54,60=x:1,80$
3° $2\frac{1}{2}:3\frac{3}{5}=2,50:x$
4° $4,20:x=21:0,6$
5° $x:2\frac{1}{2}=2,50:2,50$

3). 1° $\frac{1}{2}:\frac{1}{8}=2\frac{1}{4}:x$
2° $3\frac{1}{4}:x=8\frac{2}{3}:4\frac{1}{5}$
3° $548:12\frac{1}{2}=x:\frac{2}{5}$
4° $1\frac{1}{2}:x=2\frac{1}{3}:3\frac{1}{4}$
5° $1,2:3,6=x:3,9$

Trouver les valeurs des inconnues dans les rapports égaux suivants :

4). $x:2=y:6$
$x+y=24$

5). $x:13=y:18$
$y-x=48$

6). $x:2=y:3=z:4$
$x+y+z=63$

7). $x:\frac{1}{2}=y:\frac{1}{3}=z:\frac{1}{4}$
$x+y+z=78$

8). $x:2=y:3=z:4=u:5$
$x+y+z+u=14000$

2. APPLICATIONS DES PROPORTIONS.

431. Dans les questions que l'on peut résoudre par les proportions, il y a au moins trois nombres connus, et on en demande un quatrième qui doit former avec les trois autres une proportion.

432. Il faut commencer par s'assurer si cette condition est remplie.

Pour cela, on examinera si l'énoncé du problème se compose de deux parties, dont la première renferme deux nombres respectivement de la même espèce que deux autres nombres renfermés dans la seconde partie. Ensuite, après avoir rangé ces nombres par ordre d'espèce, x représentant le nombre inconnu, on s'assurera si x devient 2 fois, 3 fois plus grand ou plus petit que le nombre de même espèce, lorsque le nombre d'espèce différente correspondant à x devient 2 fois, 3 fois plus grand ou plus petit que le nombre de même espèce que lui.

Exemple. Si l'on avait à résoudre le problème : 32 mètres d'étoffe ont coûté 544 fr.; combien coûteront 45 mètres de la même étoffe?

On reconnaîtrait facilement les deux parties dont l'énoncé se compose : 1re partie, 32 *mètres d'étoffe ont coûté 544 fr.*; 2e partie, *combien coûteront 45 mètres de la même étoffe?* On verrait de plus que les deux nombres 32 mètres, 544 fr. renfermés dans la première partie, ont pour correspondants, dans la deuxième partie, les nombres respectivement de même espèce, 45 mètres, x francs.

Ensuite, après avoir disposé les nombres de même espèce ainsi qu'il suit :

$$\begin{array}{ll} 32^{m} & 544^{fr} \\ 45 & x, \end{array}$$

on verrait que d'après la nature de la question, pour un nombre de mètres double ou triple de 32 on devra payer une somme double ou triple de 544 fr.

Ces quatre nombres pourront former une proportion.

Autre exemple. 3 mètres ont coûté 28 fr.; combien coûteront 25 litres?

On voit sur-le-champ que les nombres 3 mètres, 25 litres ne sont pas de même espèce; on ne pourra donc pas former une proportion avec ces quatre nombres.

AUTRE EXEMPLE. Une pierre en tombant a parcouru 85 mètres en 3 secondes; combien en parcourra-t-elle en 10 secondes?

Les distances parcourues n'étant pas doubles ou triples quand le temps devient double ou triple, on ne pourra donc pas non plus former une proportion avec ces quatre nombres.

433. Lorsqu'on s'est assuré que le problème peut être résolu par une proportion, il n'y a plus qu'à assigner aux quatre nombres la place qu'ils doivent occuper dans la proportion. C'est ce qu'on appelle mettre le problème en proportion.

RÈGLE. — *Pour mettre un problème en proportion, on commence par écrire le second rapport en prenant pour conséquent le nombre inconnu qu'on désigne par* x, *puis on écrit le premier rapport en ayant soin de prendre pour conséquent le plus grand ou le plus petit des deux nombres, selon que* x *doit être d'après l'énoncé plus grand ou plus petit que son antécédent.*

Ainsi, dans le problème précédent, j'écris pour deuxième rapport :

$$544 : x.$$

Ensuite observant que x fr., prix correspondant à 45 mètres, doit être nécessairement plus grand que 544 fr., prix correspondant à 32 mètres, le conséquent du premier rapport sera le plus grand des deux nombres 32 mètres et 45 mètres, j'aurai la proportion :

$$32^{m} : 45^{m} = 544^{fr} : x^{fr},$$

et considérant les deux termes du premier rapport comme des nombres abstraits, ce qui est toujours permis :

$$32 : 45 = 544^{fr} : x^{fr};$$

d'où $$x^{fr} = \frac{544^{fr} \times 45}{32} = 765^{fr}.$$

Les 45 mètres coûteront donc 765 fr.

J'aurais pu simplifier la proportion en divisant les deux antécédents par 32, ce qui eût donné la proportion :

$$1 : 45 = 17 : x, \quad \text{d'où} \quad x = 17 \times 45 = 765.$$

PROBLÈME. 48 ouvriers ont mis 20 jours à faire un certain ouvrage; combien faudrait-il employer d'ouvriers pour faire le même ouvrage en 15 jours?

SOLUTION. Soit x le nombre d'ouvriers demandé. Il y aura proportion entre les trois nombres donnés et ce nombre inconnu; en effet, un nombre d'ouvriers 2, 3 fois plus grand mettra 2, 3 fois *moins* de jours pour faire le même ouvrage.

J'écris pour deuxième rapport $48^{o} : x^{o}$.

Maintenant, puisque, d'après l'énoncé, x^{o}, conséquent du deuxième rapport correspondant à 15 jours, doit être plus grand que 48 correspondant à 20, je prendrai pour conséquent du premier rapport le plus grand des autres nombres, et j'aurai la proportion :

$$15^{j} : 20^{j} = 48^{o} : x^{o},$$

et simplifiant le premier rapport en divisant les deux termes par 5,

$$3 : 4 = 48^{o} : x^{o},$$

d'où $$x^{o} = \frac{48^{o} \times 4}{3} = 64^{o}.$$

Il faudra donc 64 ouvriers pour faire le même ouvrage en 15 jours.

434. Lorsque le nombre inconnu de la deuxième espèce et son correspondant de la première doivent former les deux conséquents de la proportion, et que par conséquent les deux termes du premier rapport sont *écrits dans le même ordre* que leurs correspondants qui forment le second rapport, on dit que les deux nombres de la seconde espèce sont en *rapport direct* avec les deux nombres de la première, ou bien qu'ils sont *directement proportionnels* avec eux.