455. Lorsque, au contraire, le nombre inconnu de la seconde espèce étant toujours le conséquent du deuxième rapport, son correspondant de la première espèce est l'antécédent du premier rapport, de manière que les termes du premier rapport sont *écrits dans un ordre inverse* relativement à leurs correspondants qui forment le second rapport, on dit que les deux nombres de première espèce sont en *rapport inverse* avec les deux nombres de seconde espèce, ou bien qu'ils sont *inversement* ou *réciproquement* proportionnels avec eux.

Ainsi, dans le premier problème les deux nombres de mètres sont directement proportionnels aux nombres qui expriment les prix, et dans le deuxième problème les nombres d'ouvriers sont réciproquement proportionnels aux nombres de jours.

Au lieu de dire que deux quantités d'une première espèce sont en rapport direct ou inverse avec deux autres d'une seconde espèce, on dit aussi que chaque quantité de la première espèce est en *raison* directe ou *inverse* de sa correspondante de la seconde espèce.

Ainsi, dans les achats et ventes, les prix sont en raison directe du nombre des objets achetés ou vendus; ainsi le nombre d'ouvriers nécessaires pour faire un même ouvrage est en raison inverse du nombre des jours de travail.

456. Le raisonnement fait connaître dans chaque problème si les quantités sur lesquelles on opère sont en raison directe ou inverse; il sera donc toujours facile de mettre le problème en proportion.

3e Problème. Un vaisseau qui n'avait de vivres que pour 12 jours est rejeté par les vents contraires loin de sa route, ce qui augmentera probablement le voyage de 18 jours; à combien devra-t-on réduire la ration de chaque homme par jour?

Je désigne par 1 la ration de chaque homme avant que le vaisseau fût écarté de sa route et par x la ration de chaque homme quand le voyage doit durer $12 + 18 = 30$ jours. La ration de chaque homme sera évidemment en raison inverse

du nombre de jours que durera le voyage; j'écrirai donc la proportion :

$$30 : 12 = 1 : x, \quad \text{d'où} \quad x = \tfrac{12}{30} = \tfrac{2}{5}.$$

La ration de chaque homme sera réduite aux $\frac{2}{5}$ de ce qu'elle était auparavant.

457. Lorsque l'énoncé du problème renferme plus de trois nombres connus, on détermine le nombre ou les nombres inconnus à l'aide de deux ou plusieurs proportions.

Problème. 40 *ouvriers ont employé* 24 *jours à faire* 600 *mètres d'un certain ouvrage; en combien de jours* 25 *ouvriers pourraient-ils faire* 500 *mètres du même ouvrage?*

Solution. Je suppose pour un moment que l'ouvrage à faire par les deux troupes d'ouvriers soit le même et égal au premier, c'est-à-dire à 600 mètres ; la question ainsi simplifiée reviendrait à celle-ci :

40 *ouvriers ont mis* 24 *jours à faire* 600 *mètres d'un certain ouvrage; combien* 25 *ouvriers emploieront-ils de temps pour faire le même ouvrage?*

Désignant par x le nombre de jours correspondant à cet énoncé et observant que les nombres de jours sont en raison inverse des nombres d'ouvriers, j'aurai la proportion :

$$25 : 40 = 24 : x, \qquad [1]$$

de laquelle je pourrai tirer la valeur de x; mais je puis me dispenser de faire ce calcul, il me suffira de raisonner sur x comme s'il était connu.

En effet, x désignant le nombre de jours nécessaire pour faire les 600 mètres, j'ai maintenant à résoudre cette seconde question :

25 *ouvriers ont mis* x *jours pour faire* 600 *mètres; combien de jours les mêmes ouvriers emploieront-ils à faire* 500 *mètres?*

Je désigne par X, qu'on énonce grand x, le nombre de jours correspondant à ce nouvel ouvrage, lequel est véritablement le nombre de jours demandé, et observant que les nombres de jours de travail sont en *raison directe* des nombres de mètres à faire, on aura la proportion :

$$600 : 500 = x : \mathrm{X}. \qquad [2]$$

Multipliant terme à terme les deux proportions [1] et [2], j'aurai :

$$600 \times 25 : 500 \times 40 = 24 \times x : x \times \mathrm{X}.$$

Supprimant le facteur x commun aux deux termes du second rapport, j'obtiens :

$$600 \times 25 : 500 \times 40 = 24 : \mathrm{X}, \qquad [3]$$

d'où $\mathrm{X} = \dfrac{500 \times 40 \times 24}{600 \times 25}$.

Afin de simplifier les calculs indiqués, je supprime les facteurs communs au numérateur et au dénominateur et j'obtiens successivement :

$$\mathrm{X} = \frac{5 \times 40 \times 24}{6 \times 25} = \frac{5 \times 40 \times 4}{25} = \frac{40 \times 4}{5} = 8 \times 4 = 32,$$

en supprimant d'abord le facteur 100, puis le facteur 6, puis le facteur 5, et enfin une seconde fois le facteur 5.

Remarque. — Le premier rapport de la proportion [3] qui a servi à déterminer X, $600 \times 25 : 500 \times 40$ ou $\dfrac{600 \times 25}{500 \times 40}$, qui se réduit à $\dfrac{3}{4}$, n'est autre chose que le produit des rapports $\dfrac{600}{500}$ et $\dfrac{25}{40}$, autrement dit, ce rapport est composé des deux autres.

La proportion [3] elle-même est composée des proportions [1] et [2] : de là vient le nom de *règle de trois composée* que l'on donne quelquefois à cette méthode.

438. Problème. 25 *hommes, travaillant* 9 *heures par jour, ont mis* 12 *jours à creuser un fossé de* 50 *mètres de long sur* 4 *mètres de large et* 6 *mètres de profondeur; combien faudra-t-il employer d'hommes, travaillant* 10 *heures par jour pendant* 18 *jours, pour creuser un fossé de* 100 *mètres de long sur* 3 *de large et* 4 *de profondeur, dans un terrain deux fois plus difficile à travailler.*

Voici le tableau du calcul qu'il sera facile d'expliquer par le raisonnement.

$$\begin{array}{rcrcccl}
18 & : & 12 & = & 25 & : & x \\
10 & : & 9 & = & x & : & x' \quad (x \text{ prime}). \\
50 & : & 100 & = & x' & : & x'' \quad (x \text{ seconde}) \\
4 & : & 3 & = & x'' & : & x''' \quad (x \text{ tierce}). \\
6 & : & 4 & = & x''' & : & x^{\text{iv}} \quad (x \text{ quarte}). \\
1 & : & 2 & = & x^{\text{iv}} & : & \mathrm{X} \quad (\text{grand } x).
\end{array}$$

$$18 \times 10 \times 50 \times 4 \times 6 \times 1 : 12 \times 9 \times 100 \times 3 \times 4 \times 2 = 25 : \mathrm{X}.$$

Les quantités $x, x', x'', x''', x^{\text{iv}}$ disparaissent comme facteurs communs des deux termes du deuxième rapport :

$$\mathrm{X} = \frac{12 \times 9 \times 100 \times 3 \times 4 \times 2 \times 25}{18 \times 10 \times 50 \times 4 \times 6 \times 1},$$

et supprimant les facteurs communs au numérateur et au dénominateur, on obtient facilement

$$\mathrm{X} = 30.$$

Il faudrait par conséquent 30 hommes.

439. On peut se dispenser d'avoir recours à la règle de trois composée et résoudre par une seule règle de trois simple tous les problèmes qui pourraient donner lieu à ces combinaisons de proportions.

Pour le problème précédent, je raisonnerais ainsi : 25 hommes, travaillant pendant 12 jours, et 9 heures par jour, font autant que $25 \times 12 \times 9$ hommes, travaillant pendant une heure.

Un fossé de 50 mètres de long sur 4 de large et 6 de profondeur est la même chose qu'un fossé de $50 \times 4 \times 6$ mètres (cubes).

Pareillement, x hommes travaillant 18 jours, et 10 heures par jour, font autant que $x \times 18 \times 10$ hommes travaillant pendant une heure.

Un fossé de 100 mètres de long sur 3 de large et 4 de profondeur est la même chose qu'un fossé de $100 \times 3 \times 4$

mètres (cubes); et puisque le terrain est deux fois plus difficile à travailler, c'est comme s'il s'agissait d'un fossé double du précédent, c'est-à-dire $100 \times 3 \times 4 \times 2$ mètres (cubes).

Maintenant, puisque les nombres d'hommes sont en raison directe des nombres de mètres, j'aurai la proportion $50 \times 4 \times 6 : 100 \times 3 \times 4 \times 2 = 25 \times 12 \times 9 : x \times 18 \times 10$,

d'où $$x \times 18 \times 10 = \frac{100 \times 3 \times 4 \times 2 \times 25 \times 12 \times 9}{50 \times 4 \times 6},$$

Connaissant un produit et un des facteurs (18×10), j'obtiendrai l'autre facteur par la division, ce qui donne

$$x = \frac{100 \times 3 \times 4 \times 2 \times 25 \times 12 \times 9}{50 \times 4 \times 6 \times 18 \times 10} = 30,$$

même résultat que précédemment.

440. Les questions traitées dans la deuxième partie se résolvent très-promptement à l'aide des proportions.

PROBLÈME D'INTÉRÊT. — Quel est, à 5 pour 100, l'intérêt de 735 fr. 80 c.?

SOLUTION. Puisque, pour un capital de 100 fr., on a 5 fr. d'intérêt, pour un capital 2, 3, 4 fois plus grand ou plus petit, on aura un intérêt 2, 3, 4 fois plus grand ou plus petit, c'est-à-dire qu'il y a relation directe entre les capitaux et les intérêts; on aura donc la proportion

$$100 : 735,80 = 5 : x; \quad x = \frac{735,80 \times 5}{100} = 36^{fr},79.$$

2e PROBLÈME. — Quel est l'intérêt de 238 fr. 40 c., à 5 pour 100, au bout de 3 ans $\frac{1}{2}$?

SOLUTION. Cette question donne lieu aux deux proportions suivantes :

$$100 : 238,40 = 5 : x$$
$$1 : \ 3\tfrac{1}{2} = x : X.$$

Multipliant, terme à terme, et réduisant, on obtient

$$100 \times 1 : 238,40 \times 3\tfrac{1}{2} = 5 : X,$$

d'où $$X = \frac{238,40 \times 3\frac{1}{2} \times 5}{100} = 41^{fr},72.$$

On aurait pu dire, puisque l'intérêt pour un an est 5 fr., l'intérêt pour 3 ans $\frac{1}{2}$ sera $5 \times 3\frac{1}{2}$, et écrire la seule proportion suivante :

$$100 : 238,40 = 5 \times 3\tfrac{1}{2} : x,$$

d'où l'on tirerait la même valeur de $x = 41,72$.

441. PROBLÈME D'ESCOMPTE. — Quel est l'escompte en dedans d'un billet de 4050 fr. payable dans 2 mois $\frac{1}{2}$, l'escompte étant à 6 pour 100?

SOLUTION. Le taux de l'escompte étant 6 pour un an, pour 2 mois $\frac{1}{2} = \frac{5}{2}$ mois $= \frac{5}{24}$ de l'année, il sera $6 \times \frac{5}{24} = 1^{fr},25$. Je dis donc : si $101^{fr},25$ sont réduits par l'escompte à 100, à quoi sera réduite une somme de 4050? D'où la proportion :

$$101,25 : 100 = 4050 : x = \frac{4050 \times 100}{101,25} = 4000 \text{ fr.}$$

L'escompte sera donc de 50 fr.

442. PROBLÈME DE SOCIÉTÉ. — Trois associés ont mis en commun : le premier 20000 fr., le deuxième 25000 fr., et le troisième 35000 fr.; quelle est la part de chacun sur un bénéfice de 36000 fr.?

SOLUTION. Les questions de cette nature ne sont que des applications de la propriété des rapports égaux. En effet, désignant par x, y, z les trois parts inconnues, comme les parts sont en raison directe des mises, j'écris les trois rapports égaux :

$$20000 : x = 25000 : y = 35000 : z;$$

faisant la somme des antécédents et celle des conséquents, j'aurai d'après cette propriété :

$$\begin{aligned} 80000 : 36000 &= 20000 : x = 20000 \times \tfrac{36}{80} = && 9000 \\ &= 25000 : y = && 11250 \\ &= 35000 : z = && \underline{15750} \\ & && \text{Total égal} \quad 36000 \end{aligned}$$

443. PROBLÈME DE MÉLANGE. 2e ESPÈCE. — Avec du vin à 2 fr. 40 c. et à 80 c. le litre, faire un mélange qui revienne à 1 fr. 50 c. le litre.

SOLUTION. Soit x ce qu'on doit prendre de vin de la première espèce, y de la seconde.

La différence entre le prix le plus élevé et le prix moyen est

$$2^{fr},40 - 1,50 = 0^{fr},90.$$

Entre le prix moyen et le prix le plus bas,

$$1^{fr},50 - 0,80 = 0,70.$$

Ainsi, en vendant un litre de la première espèce à 1 fr. 50 c. on perdait 90 c., et l'on gagnerait 70 c. en vendant à 1 fr. 50 c. un litre de la seconde. Par conséquent la perte totale sur x litres sera $90 \times x$, et le gain total sur y litres, $70 \times y$. Pour que le gain compense la perte, il faut que ces deux quantités soient égales, et comme de deux produits égaux de deux facteurs on peut tirer une proportion, j'écris sur-le-champ :

$$x : y = 70 : 90$$

et simplifiant le second rapport

$$x : y = 7 : 9.$$

Questionnaire.

Quels sont les problèmes que l'on peut résoudre par les proportions ? (431)
Comment peut-on s'assurer que les quatre nombres renfermés dans l'énoncé, y compris le nombre inconnu, forment une proportion ? (432)
Quelle est la règle pour mettre un problème en proportion ? (433)
Dans quel cas deux quantités sont-elles en rapport direct de deux autres ? (434)
Que signifie cette expression ? (434)
Dans quel cas deux quantités sont-elles en rapport inverse de deux autres ? (435)
Que signifie cette expression ? (435)
Dans quel cas peut-on résoudre le problème au moyen de plusieurs proportion ? (437)
Ne peut-on pas résoudre ces sortes de problèmes par une seule proportion ? (439)
Trouver par les proportions les règles d'intérêt. (440)
Trouver par les proportions les règles d'escompte. (441).
Trouver par les proportions les règles de société. (442)
Trouver par les proportions les règles de mélange ou d'alliage de deuxième espèce ? (443)

LIVRE II.

THÉORIE DES PUISSANCES ET RACINES DES NOMBRES ; APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES.

§ I. THÉORIE DES PUISSANCES ET RACINES DES NOMBRES.

1. DÉFINITIONS PRÉLIMINAIRES.

444. On appelle *puissance d'un nombre, le produit de ce nombre pris plusieurs fois comme facteur.*

La première puissance d'un nombre est ce nombre lui-même.

La seconde puissance d'un nombre, que l'on nomme aussi *carré* de ce nombre, est le produit de ce nombre deux fois facteur.

La troisième puissance, autrement dite aussi le *cube* d'un nombre, est le produit de ce nombre trois fois facteur.

La quatrième puissance est le produit d'un nombre quatre fois facteur, et ainsi de suite.

Les puissances s'indiquent par un petit chiffre placé à la droite et un peu au-dessus du nombre, et qui prend le nom d'*exposant;* ainsi, pour indiquer la 2^e^ puissance de 9, on écrit 9^2, qu'on énonce *neuf puissance deux,* ou le carré de 9. De même, 12^5 exprime la 5^e^ puissance de 12 et équivaut à $12 \times 12 \times 12 \times 12 \times 12$, cinq fois facteur.

Le nombre sans exposant est à la 1^re^ puissance.

445. *On appelle racine* 2^e^, 3^e^, 4^e^, *etc., d'un nombre, le nombre qui, élevé à la puissance* 2^e^, 3^e^, 4^e^, *etc., reproduit le nombre proposé.*

Les racines s'indiquent par le signe $\sqrt{}$ qu'on énonce *racine;* dans le coin à gauche on met le chiffre indicateur,