SOLUTION. Soit x ce qu'on doit prendre de vin de la première espèce, y de la seconde.

La différence entre le prix le plus élevé et le prix moyen est

$$2^{fr},40-1,50=0^{fr},90.$$

Entre le prix moyen et le prix le plus bas,

$$1^{fr},50-0,80=0,70.$$

Ainsi, en vendant un litre de la première espèce à 1 fr. 50 c. on perdait 90 c., et l'on gagnerait 70 c. en vendant à 1 fr. 50 c. un litre de la seconde. Par conséquent la perte totale sur x litres sera $90 \times x$, et le gain total sur y litres, $70 \times y$. Pour que le gain compense la perte, il faut que ces deux quantités soient égales, et comme de deux produits égaux de deux facteurs on peut tirer une proportion, j'écris sur-le-champ :

$$x : y = 70 : 90$$

et simplifiant le second rapport

$$x : y = 7 : 9.$$

Questionnaire.

Quels sont les problèmes que l'on peut résoudre par les proportions ? (431)
Comment peut-on s'assurer que les quatre nombres renfermés dans l'énoncé, y compris le nombre inconnu, forment une proportion ? (432)
Quelle est la règle pour mettre un problème en proportion ? (433)
Dans quel cas deux quantités sont-elles en rapport direct de deux autres ? (434)
Que signifie cette expression ? (434)
Dans quel cas deux quantités sont-elles en rapport inverse de deux autres ? (435)
Que signifie cette expression ? (435)
Dans quel cas peut-on résoudre le problème au moyen de plusieurs proportion ? (437)
Ne peut-on pas résoudre ces sortes de problèmes par une seule proportion ? (439)
Trouver par les proportions les règles d'intérêt. (440)
Trouver par les proportions les règles d'escompte. (441).
Trouver par les proportions les règles de société. (442)
Trouver par les proportions les règles de mélange ou d'alliage de deuxième espèce? (443)

LIVRE II.

THÉORIE DES PUISSANCES ET RACINES DES NOMBRES ; APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES.

---

§ I. THÉORIE DES PUISSANCES ET RACINES DES NOMBRES.

1. DÉFINITIONS PRÉLIMINAIRES.

444. On appelle *puissance d'un nombre, le produit de ce nombre pris plusieurs fois comme facteur.*

La première puissance d'un nombre est ce nombre lui-même.

La seconde puissance d'un nombre, que l'on nomme aussi *carré* de ce nombre, est le produit de ce nombre deux fois facteur.

La troisième puissance, autrement dite aussi le *cube* d'un nombre, est le produit de ce nombre trois fois facteur.

La quatrième puissance est le produit d'un nombre quatre fois facteur, et ainsi de suite.

Les puissances s'indiquent par un petit chiffre placé à la droite et un peu au-dessus du nombre, et qui prend le nom d'*exposant;* ainsi, pour indiquer la 2^e puissance de 9, on écrit 9^2, qu'on énonce *neuf puissance deux,* ou le carré de 9. De même, 12^5 exprime la 5^e puissance de 12 et équivaut à $12 \times 12 \times 12 \times 12 \times 12$, cinq fois facteur.

Le nombre sans exposant est à la 1^{re} puissance.

445. *On appelle racine 2^e, 3^e, 4^e, etc., d'un nombre, le nombre qui, élevé à la puissance 2^e, 3^e, 4^e, etc., reproduit le nombre proposé.*

Les racines s'indiquent par le signe $\sqrt{}$ qu'on énonce *racine;* dans le coin à gauche on met le chiffre indicateur,

15

et le nombre au-dessous du trait horizontal. Ainsi, $\sqrt[3]{27}$ s'énonce racine *troisième*, ou mieux *racine cubique* de 27.

Le signe $\sqrt{}$ sans *indice* exprime la racine carrée.

2. DU CARRÉ ET DE LA RACINE CARRÉE.

446. *On appelle* CARRÉ *d'un nombre le produit de ce nombre par lui-même.*

447. Les carrés des neufs premiers nombres

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,

sont

1, 4, 9, 16, 25, 35, 49, 64, 81.

Le carré de $10 = 100$; le carré de $100 = 10000$, etc.

448. THÉORÈME. — *Le carré d'un nombre composé de deux parties contient le carré de chaque partie plus le double de leur produit.*

DÉMONSTRATION. — En effet, soit $13 = 6 + 7$ dont il s'agit de former le carré. Au lieu de multiplier 13 par 13, je multiplie $6 + 7$ par $6 + 7$, ce qui se fera en multipliant chaque partie du multiplicande, d'abord par 6, ensuite par 7, et additionnant les produits; effectuant cette multiplication, j'obtiens

13	$6+7$	Carré de $6 = 36$
13	$6+7$	2 fois $6 \times 7 = 84$
39	$6\times6+\quad 6\times7$	Carré de $7 = 49$
13	$+\quad 6\times7+7\times7$	169
169	Le carré de $6 + 2^{\text{fois}} 6\times7 +$ le carré de 7.	

449. PRINCIPE. — *Le carré d'un nombre quelconque composé de dizaines et d'unités contient : 1° le carré des dizaines; 2° deux fois le produit des dizaines par les unités; 3° le carré des unités.*

On pourrait donc former le carré d'un nombre, d'après ce principe en se souvenant que le carré des dizaines donne

des centaines, et le double produit des dizaines par les unités un nombre de dizaines.

EXEMPLE. — Former le carré de 37.

Carré de 3 dizaines	= 900	Preuve	37
Double produit des dizaines			37
par les unités.	= 420		259
Carré des unités	= 49		111
Carré demandé	1369		1369

Pour les nombres de plus de deux chiffres, il est plus simple de faire la multiplication.

450. Le carré d'une fraction ordinaire s'obtient en faisant le carré du numérateur et le carré du dénominateur.

451. Le carré d'un nombre décimal s'obtient comme celui des nombres entiers. Il contient toujours un nombre de chiffres décimaux double de celui que renferme le nombre proposé.

452. *On appelle* RACINE CARRÉE *d'un nombre, le nombre qui, multiplié par lui-même, reproduit le nombre proposé.* Ainsi la racine carrée de 36 est 6, puisque $6 \times 6 = 36$.

453. RÈGLE GÉNÉRALE. — *Pour extraire la racine carrée d'un nombre entier, on partage ce nombre en tranches de deux chiffres, en allant de droite à gauche. Le nombre de ces tranches est exactement le même que celui des chiffres de la racine.*

Puis, commençant par la gauche, on extrait la racine du plus grand carré contenu dans la première tranche, et l'on écrit le chiffre de la racine à la droite du nombre proposé dont on le sépare par un trait vertical. On fait le carré de la racine et on le retranche de la première tranche à gauche.

A la droite du reste on abaisse la tranche suivante, et l'on sépare le dernier chiffre par un point. On fait le double de la racine et on l'écrit en regard du nombre précédent dont on divise la partie séparée à gauche par le double de la racine. On écrit le chiffre du quotient à la droite du *chiffre déjà obtenu à la racine; on fait le carré de toute la racine et on le soustrait des deux premières tranches sur lesquelles on a opéré.*

A la droite du reste, on abaisse la tranche suivante, ce qui donne un second nombre sur lequel on opère comme sur le précédent.

On continue ainsi cette suite d'opérations jusqu'à ce qu'on ait abaissé successivement toutes les tranches.

454. Exemple. — Soit proposé d'extraire la racine carrée de 2916.

J'écris le nombre proposé 2916, et je tire un trait vertical pour le séparer de la racine que j'écrirai à droite.

29.16	54	54
25		54
41.6	10	216
0		270
		2916

Ensuite je partage le nombre en tranches de deux chiffres, puis commençant par la 1re tranche à gauche, je dis : le plus grand carré contenu dans 29 est 25 dont la racine est 5.

J'écris 5 à la racine. Je fais le carré de 5 qui est 25, et je le soustrais de 29, ce qui donne pour reste 4. A la droite de ce reste, j'abaisse la tranche suivante, ce qui donne 416, dont je sépare le dernier chiffre à droite par un point.

Je double la racine, ce qui donne 10, que j'écris en regard de 416, et je divise 41 par 10; j'écris le chiffre 4 qui vient en quotient à la droite du chiffre 5 déjà obtenu à la racine, et je fais le carré de 54. J'obtiens ainsi 2916, qui, soustrait du nombre proposé, donne pour reste 0.

La racine demandée est 54.

2916	54
416	104
0	

Afin de simplifier les calculs, je vérifie le chiffre 4 avant

de le porter à la racine. Pour cela, je l'écris à la droite de 10, et je multiplie le nombre résultant 104 par ce même chiffre 4, et je soustrais en même temps le produit de 416, ce qui donne pour reste 0.

455. Démonstration.—En effet, 2916 étant plus grand que 100, carré de 10, la racine aura au moins deux chiffres. Elle contiendra donc des dizaines et des unités, et le nombre proposé, qui en est considéré comme le carré, devra renfermer les trois parties ci-dessus, savoir : le carré des dizaines, le double produit des dizaines par les unités et le carré des unités.

Mais le carré des dizaines étant un nombre de centaines ne peut se trouver que dans les centaines du nombre proposé. J'ai donc séparé par un point les deux derniers chiffres à droite, et j'ai cherché le plus grand carré contenu dans la partie à gauche 29, lequel est 25 dont la racine 5 est véritablement le chiffre des dizaines; car le nombre proposé 2916 étant compris entre 2500 et 3600, sa racine sera comprise entre 50 et 60.

Ayant trouvé le chiffre des dizaines, il reste à trouver le chiffre des unités; pour cela, après avoir abaissé la tranche suivante, j'ai remarqué que le nombre 416 qui reste après que j'ai eu retranché le carré des dizaines ne contient plus que les deux autres parties; savoir, le double produit des dizaines par les unités et le carré des unités. Or, le double produit des dizaines par les unités est un nombre de dizaines qui, par conséquent, ne se trouve que dans les dizaines de 416; voilà pourquoi j'ai séparé le dernier chiffre à droite par un point.

Maintenant, connaissant les dizaines de la racine 5, je les double, 10; et, divisant 41, qui renferme le produit de deux facteurs dont l'un est le double des dizaines et l'autre les unités, par le double des dizaines, j'obtiendrai, soit le chiffre des unités, soit un chiffre qui n'en différera pas beaucoup, et que, du reste, je pourrai vérifier. Ce que je fais, en effet, lorsque, écrivant le quotient 4 à la droite de 10 double des dizaines, je multiplie 104 par 4. Car, e multipliant 4 par 4, je fais le carré des unités, et en multipliant 10 par 4, je multiplie le double des dizaines par les unités.

456. On raisonnerait et on opérerait de la même manière, si le nombre proposé devait avoir plus de deux chiffres à sa racine.

Exemple et démonstration. — Soit proposé d'extraire la racine carrée de 23609881.

2 3.6 0.9 8.8 1	4859
7 6.0	88
5 6 9.8	965
8 7 3 8.1	9709
0	

Le nombre proposé étant plus grand que 100, la racine contiendra au moins des dizaines et des unités.

Le carré du nombre des dizaines ne peut se trouver que dans la partie 236098 que j'obtiens après avoir séparé les deux derniers chiffres à droite par un point. Je suis donc conduit d'abord à extraire la racine du plus grand carré contenu dans 236098.

Mais ce nombre 236098 étant lui-même plus grand que 100, sa racine contiendra aussi des dizaines et des unités, et le carré de ces nouvelles dizaines ne pourra se trouver que dans la partie 2360, après avoir encore séparé deux chiffres.

Ce nombre étant encore plus grand que 100, sa racine aura donc aussi deux chiffres, et le carré de ces nouvelles dizaines ne se trouvera que dans la partie 23 en séparant encore les deux derniers chiffres; je suis donc amené à partager le nombre proposé en tranches de 2 chiffres, en allant de droite à gauche.

Puis extrayant la racine du plus grand carré contenu dans la dernière tranche à gauche, j'obtiens 4 pour premier chiffre de la racine. Je fais le carré de 4 qui est 16, je le retranche de 23, ce qui donne 7 pour reste, à côté duquel j'abaisse la tranche suivante, ce qui donne 760, dont

je sépare le dernier chiffre à droite par un point. Je double la racine, ce qui donne 8 que j'écris en regard de 76.0 : je divise 76 par 8, ce qui donne 8 que j'écris à la droite du premier 8 qui a servi de diviseur.

Pour vérifier ce nouveau chiffre de la racine, je multiplie 88 par 8 et je soustrais en même temps le produit de 760, ce qui donne pour reste 56. J'écris 8 à la racine, j'abaisse la tranche suivante, ce qui donne 5698, dont je sépare le dernier chiffre à droite.

Je double la racine 48 et j'ai pour diviseur de 569, 96; le quotient est 5 que j'écris à la droite de 96, et je multiplie 965 par 5, en soustrayant en même temps le produit de 5698, et j'ai pour reste 873. J'écris 5 à la racine, j'abaisse la tranche suivante et dernière, et j'ai 87381, dont je sépare le dernier chiffre.

Le double de la racine 485 est 970, et je divise 8738 par 970; il vient pour quotient 9 que j'écris à la droite de 970, et je multiplie 9709 par 9; le produit, soustrait de 87381, donne 0 pour reste. Je porte 9 à la racine.

La racine demandée est donc 4859.

457. Les chiffres trouvés successivement par la division seront convenables : 1° si la soustraction a pu se faire, ce qui montre que le chiffre n'est pas trop fort; 2° si le reste obtenu est plus petit que le double de la racine déjà trouvée augmentée de 1, ce qui montre que le chiffre n'est pas trop faible. En effet, la différence entre les carrés de deux nombres consécutifs est égale au double du plus petit augmenté de 1, ce qu'on peut vérifier sur les carrés des premiers nombres.

458. Si, à la fin de toutes les opérations, on n'obtient aucun reste, le nombre proposé est dit *carré parfait*, et la racine, *exacte*.

459. S'il y a un reste, le nombre n'est pas carré parfait; mais la racine obtenue est celle du plus grand carré contenu dans le nombre, et elle est exacte à moins d'une unité près.

Le carré de la racine ajouté avec le reste doit reproduire le nombre proposé, ce qui peut servir de preuve de l'opération.

Dans ce cas, il n'y a point de nombre qui, élevé au carré, donne le nombre proposé ; mais on peut approcher de la racine autant qu'on voudra, à l'aide de la règle suivante :

460. RÈGLE.— *Pour extraire, par approximation, la racine carrée d'un nombre entier qui n'est pas un carré parfait, on abaisse successivement, à la droite des restes, autant de couples de zéros que l'on veut avoir de chiffres décimaux à la racine, et l'on continue par ce moyen l'opération d'après la règle.*

DÉMONSTRATION.—En effet, si l'on veut avoir deux chiffres décimaux à la racine, par exemple, il faut abaisser successivement deux couples de zéros ou quatre zéros, ce qui revient à multiplier le nombre proposé par 10000 ; mais la racine serait 100 fois trop grande, et on la réduit à sa juste valeur en la divisant par 100, c'est-à-dire en séparant deux chiffres décimaux sur la droite de la racine.

461. RÈGLE.—*Pour extraire la racine carrée d'une fraction ordinaire, si le dénominateur est un carré parfait, on extrait la racine du numérateur, laquelle pourra n'être pas exacte, mais alors avec l'approximation qu'on voudra, ensuite on extrait la racine du dénominateur. Si le dénominateur n'est pas un carré parfait, on multiplie les deux termes par le dénominateur; et le nouveau dénominateur étant un carré parfait, on opère comme il vient d'être dit.*

462. RÈGLE. — *Pour extraire la racine carrée d'un nombre décimal, on fait en sorte que le nombre proposé ait le double du nombre de chiffres décimaux que l'on veut avoir à la racine. S'il y en a moins, on y supplée par des zéros, s'il y en a davantage, on néglige le surplus, puis on opère comme sur un nombre entier, en ayant soin de séparer à la droite de la racine le nombre de chiffres décimaux qu'on veut avoir.*

463. Pour trouver un moyen proportionnel entre deux

nombres, on multiplie ces deux nombres entre eux, et on extrait la racine carrée du produit.

EXEMPLE. Si l'on avait $3 : x :: x : 27$, on en tirerait $x^2 = 3 \times 27$, et, par conséquent, $x = \sqrt{3 \times 27} = \sqrt{81} = 9$, moyen proportionnel demandé.

Questionnaire.

Qu'appelle-t-on puissance d'un nombre? (444)
Quel nom donne-t-on à la seconde puissance, à la troisième puissance d'un nombre? (444)
Comment indique-t-on une puissance donnée d'un nombre? (444)
Qu'appelle-t-on racine cinquième d'un nombre? (445)
Comment indique-t-on la racine cinquième d'un nombre? (445)
Qu'est-ce que le carré d'un nombre? (446)
Comment fait-on le carré d'un nombre? (447)
De quoi se compose le carré d'un nombre composé de dizaines et d'unités? (449)
Comment fait-on le carré d'une fraction ordinaire? (450)
Comment fait-on le carré d'un nombre décimal? (451)
Qu'appelle-t-on racine carrée d'un nombre? (452)
Comment extrait-on la racine carrée d'un nombre entier?
Comment reconnait-on le nombre de chiffres que doit avoir la racine? (453)
Comment peut-on savoir si le chiffre écrit à la racine n'est pas trop fort ou trop faible? (457)
Qu'entend-on par un nombre carré parfait? (458)
Comment trouve-t-on la racine carrée par approximation? (460)
Comment extrait-on la racine carrée d'une fraction? (461)
Comment extrait-on la racine carrée d'un nombre décimal? (462)
Comment trouve-t-on un moyen proportionnel entre deux nombres donnés? (463)

Exercices (XXX).

Former le carré des nombres suivants :

1).	23	$\frac{2}{3}$	0,3
2).	45	$\frac{4}{7}$	2,5
3).	79	$\frac{13}{29}$	13,61
4).	134	$\frac{28}{81}$	0,08
5).	267	$\frac{49}{112}$	0,075
6).	549	$\frac{154}{345}$	3,216
7).	6231	$\frac{210}{739}$	0,00891
8).	9475	$\frac{485}{913}$	0,000053
9).	31743	$3\frac{12}{17}$	0,0000092
10).	467825	$18\frac{3}{4}$	9,0016

Extraire la racine carrée des nombres suivants :

11).	81	$\frac{9}{64}$	0,49
12).	1444	$\frac{49}{400}$	0,0169
13).	2401	$\frac{25}{169}$	29,16

14).	4225	$1\frac{156}{1444}$	0,011664
15).	6084	$2\frac{782}{961}$	547 à 0,1 près.
16).	11664	$\frac{2209}{6241}$	3481 à 0,01 près.
17).	32041	$\frac{102400}{3240000}$	$\frac{5}{7}$ à 0,001 près.
18).	12432676	$\frac{2500}{351712516}$	$2\frac{128}{307}$ à 0,0001 près.
19).	2939483089	$\frac{3721}{289782529}$	3,415 à 0,00001 près.
20).	192880829124	$\frac{97630626681}{64553089329}$	0,00479 à 0,000001 près.

Problèmes sur le carré et la racine carrée (XXXV).

1). Un marchand a vendu 35 kilogrammes d'une marchandise au prix d'autant de centimes par kilogramme, combien a-t-il retiré de sa vente?

2). Quel est le nombre dont la racine carrée, augmentée de 13, donne pour somme 29?

3). Quel est le nombre dont le triple de la racine carrée est égal à $5\frac{1}{2}$?

4). Trouver un nombre dont le carré augmenté de 7 est égal à 32.

5). Trouver un nombre dont le tiers multiplié par le quart donne pour produit 48.

6). Partager 25 en deux parties dont le produit soit 150.

7). Quelle est la fraction telle que si on la divise par cette fraction même renversée, le quotient soit $\frac{25}{64}$?

8). Trouver deux nombres dont la différence soit 30 et le produit 2800.

9). Sachant que la somme des carrés de deux nombres est 130 et la différence des carrés de ces mêmes nombres 32, déterminer ces deux nombres.

10). La différence de deux nombres est 7, et la différence de leurs carrés est 350; quels sont ces nombres?

3. DU CUBE ET DE LA RACINE CUBIQUE.

464. *On appelle* CUBE *d'un nombre le produit de ce nombre trois fois facteur.*

465. RÈGLE. — *Pour former le cube d'un nombre, on le multiplie d'abord par lui-même, ce qui donne le carré, et ensuite on multiplie encore le carré par le même nombre.*

Les cubes des neuf premiers nombres

	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,
sont :	1,	8,	27,	64,	125,	216,	343,	512,	729.

Le cube de 10 = 1000, le cube de 100 = 1000000, etc.

466. THÉORÈME.— *Le cube d'un nombre composé de deux parties contient le cube de la première partie, plus trois fois le carré de la première multiplié par la deuxième, plus trois fois la première multipliée par le carré de la deuxième, plus le cube de la deuxième.*

DÉMONSTRATION. — Soit en effet le même nombre 13 = 6 + 7 dont il s'agit de former le cube. Au lieu de multiplier 13 par 13, ce qui donnerait le carré de 13, et de multiplier ensuite le carré par 13, je multiplie 6 + 7 par 6 + 7 ce qui donne, n° **448** :

$$6\times6+2^{\text{fois}}6\times7+7\times7.$$

Je multiplie donc encore

$$\begin{array}{lrl} & & 6\times6+2^{\text{fois}}6\times7+7\times7 \\ \text{Par} & & 6+7 \\ \hline & 6\times6\times6+ & 2^{\text{fois}}6\times6\times7+\quad 6\times7\times7 \\ & + & 6\times6\times7+2^{\text{fois}}6\times7\times7+7\times7\times7 \\ \hline \end{array}$$

Et j'obtiens pour le cube de (6 + 7)

$$(6+7)^3=6\times6\times6+3^{\text{fois}}6\times6\times7+3^{\text{fois}}6\times7\times7+7\times7\times7$$

Ce qu'il fallait démontrer.

De là le principe suivant.

467. PRINCIPE. — *Le cube d'un nombre quelconque composé de dizaines et d'unités contient: 1° le cube des dizaines; 2° trois fois le carré des dizaines multiplié par les unités; 3° trois fois les dizaines multipliées par le carré des unités; 4° le cube des unités.*

On pourra s'exercer à former, d'après ce principe, le cube d'un nombre en se souvenant que le cube des dizaines donne des mille, que le carré des dizaines donne des centaines, et que le produit des dizaines par le carré des unités donne des dizaines.

Exemple. Former le cube de 27.

D'après le principe.		Par la multiplication.
27		27
8000	cube des dizaines.	27
8400	3^{fois} le carré des dizaines par les unités.	189
2940	3^{fois} les dizaines par le carré des unités.	54
343	cubes des unités.	729
19683	cube de 27.	27
		5103
		1458
		19683

Pour les nombres de plus de deux chiffres, il est plus simple de faire la multiplication.

468. Le cube d'une fraction ordinaire s'obtient en faisant le cube du numérateur et le cube du dénominateur.

469. Le cube d'un nombre décimal s'obtient comme celui des nombres entiers. Il contient toujours un nombre de chiffres décimaux triple de celui que renferme le nombre proposé.

470. *On appelle* racine cubique *d'un nombre, le nombre dont le carré multiplié par le nombre lui-même reproduit le nombre proposé.*

Ainsi, la racine cubique de 512 est 8, puisque $8 \times 8 \times 8 = 512$.

471. Règle générale. — *Pour extraire la racine cubique d'un nombre entier, on partage le nombre en tranches de trois chiffres en allant de droite à gauche. Le nombre de ces tranches est exactement le même que celui des chiffres de la racine. Puis on tire un trait vertical pour séparer le nombre proposé de la racine que l'on écrit à droite et sur la même ligne.*

Cela fait, commençant par la gauche, on cherche la racine du plus grand cube contenu dans la première tranche, laquelle pourra n'avoir qu'un ou deux chiffres. On écrit le chiffre trouvé à la place désignée pour la racine.

On fait le cube du chiffre trouvé à la racine, et on le soustrait de la première tranche à gauche.

A la droite du reste, on abaisse la seconde tranche, ce qui donne un nombre dont on sépare par un point les deux derniers chiffres à droite. Puis on divise la partie à gauche par le triple carré de la racine déjà trouvée, lequel doit être écrit en regard du dividende. On écrit le chiffre obtenu en quotient à la droite du chiffre déjà obtenu à la racine. On fait le cube de toute la racine et on le soustrait des deux premières tranches.

A la droite du reste on abaisse la tranche suivante sur laquelle on opère comme sur le nombre précédent.

On continue ainsi cette série d'opérations jusqu'à ce qu'on ait abaissé toutes les tranches.

472. Exemple et démonstration. — Soit à extraire la racine cubique de 185 193.

1 8 5.1 9 3	57	57
1 2 5		57
6 0 1.9 3	75	399
0		285
		3249
		57
		22743
		16245
		185193

J'écris le nombre proposé, puis je tire une ligne verticale pour le séparer de la racine que j'écrirai à la droite et sur la même ligne ainsi qu'on le voit dans ce tableau.

Le nombre proposé étant plus grand que 1000 et moindre que 1 000 000 qui sont les cubes de 10 et 100, ne pourra avoir que deux chiffres à sa racine cubique, et le nombre 185 193, qui est considéré comme le cube de ce nombre composé de dizaines et d'unités, devra contenir les quatre parties énoncées ci-dessus ; mais le cube des dizaines donne des mille, par conséquent le cube des dizaines de la racine n'est compris que dans les mille du nombre proposé.

Je sépare donc par un point les trois derniers chiffres à droite.

Le plus grand cube contenu dans 185 est 125 dont la racine est 5. J'écris ce chiffre 5 à la racine et j'en soustrais le cube 125 de la première tranche à gauche 185, ce qui donne 60 pour reste. Le chiffre 5 est véritablement le chiffre des dizaines, car le nombre proposé étant compris entre 125 000 et 216 000 sa racine cubique sera comprise entre 40 et 60.

A la droite de ce reste, j'abaisse la tranche suivante, ce qui donne le nombre 60 193, lequel ne contient plus que les trois parties suivantes, savoir :

3 fois le carré des dizaines par les unités,
3 fois les dizaines par le carré des unités,
Le cube des unités.

Or, le carré des dizaines donnant des centaines, la première de ces trois parties ne peut être renfermée que dans les centaines de 60 193. Je sépare donc les deux derniers chiffres à droite, et je divise la partie à gauche 601 par trois fois le carré des dizaines déjà trouvées à la racine. Ce triple carré est 75 que j'écris en regard de 601.93 comme pour la division.

Le quotient de 601 par 75 est 7.

J'écris ce chiffre 7 à la droite du chiffre déjà obtenu à la racine, et je fais le cube de 57 qui est précisément 185 193, qui, retranché du nombre proposé, donne pour reste 0.

La racine cubique du nombre proposé est donc 57.

1 8 5.1 9 3	57
6 0 1.9 3	7)75
0	105
	49
	8599

473. Avant d'écrire le chiffre 7 à la racine, il est important de vérifier s'il n'est pas trop fort. Pour cela je l'écris un peu à gauche du diviseur 75, en le séparant par un petit crochet, et je forme, en supposant que 57 soit la racine, les trois parties qui doivent être contenues dans 60 193; ou, ce qui revient au même, je forme trois fois le carré des dizaines, trois fois le produit des dizaines par les unités, le carré des unités; je fais la somme de ces parties et je la multiplie par les unités. Or, 75 est déjà trois fois le carré des dizaines; en triplant les dizaines 5, ce qui donne 15, et multipliant ce produit par 7, j'obtiens 105 dizaines que j'écris sous 75, en avançant d'un rang le premier chiffre à droite; car 75 représente des centaines et 105 seulement des dizaines. Le carré des unités 7 est 49 que j'écris sous 105 en avançant de même, et par une raison semblable, le premier chiffre d'un rang vers la droite. Je fais la somme de ces trois parties et je multiplie cette somme 8599 par 7, en soustrayant en même temps le produit de 60193, ce qui donne 0 pour reste.

Ce procédé de vérification doit être employé pour chacun des chiffres qu'on écrit à la racine après le premier. Si la soustraction peut se faire, le chiffre n'est pas trop fort.

474. Pour former le triple carré de la racine qui doit servir de diviseur, on se sert des nombres formés précédemment, ainsi qu'il suit : *on ajoute le double du troisième nombre avec le nombre qui est au-dessus et la somme qui est au-dessous*, en ayant égard au rang des chiffres.

75	9747 = triple carré de 57.
105	
49	
8599	

Ainsi, dans l'exemple précédent, je double 49 et j'ajoute le résultat avec 105 et avec 8599, en disant : 2 fois $9 = 18 + 9 = 27$, je pose 7 et retiens 2; 2 fois $4 = 8 + 2$ de retenue $= 10 + 5 = 15 + 9 = 24$, je pose 4 et retiens 2; 2 de retenue $+ 5 = 7$, je pose 7; $1 + 8 = 9$, je pose 9; et j'ai 9747 pour le triple carré de la racine 57.

En effet, la somme 8599 renfermant $75 = 3$ fois le carré des dizaines, $105 = 3$ fois le produit des dizaines par les unités, et $49 =$ le carré des unités, si l'on ajoute à cette somme le nombre 105 et le double de 49, elle renfermera trois fois le carré des dizaines, six fois le produit des dizaines par les unités, et trois fois le carré des unités; donc elle sera égale à trois fois le carré de 57.

475. On raisonnerait et on opérerait de même si le nombre proposé devait avoir plus de deux chiffres à la racine.

Le raisonnement est analogue à celui qu'on a vu pour l'extraction de la racine carrée.

Exemple. Soit proposé d'extraire la racine cubique de 41314084993.

41.314.084.993	3457		
14 314	4)27	5)3468	7)357075
2 010 084	36	510	7245
250 459 993	16	25	49
0	3076	351925	35779999

La racine cubique demandée est 3457.

476. On reconnaît qu'un chiffre écrit à la racine est trop faible si le reste est au moins égal au triple carré de la racine plus le triple de cette même racine plus un; car la différence entre les cubes de deux nombres consécutifs est toujours égale à trois fois le carré du plus petit nombre, plus trois fois ce même nombre plus un.

477. Si, à la fin de toutes les opérations, on ne trouve pas de reste, le nombre proposé est dit *cube parfait* et la racine *exacte*.

S'il y a un reste, le nombre n'est pas un cube parfait, et la racine trouvée n'est que la racine du plus grand cube contenu dans le nombre; elle est exacte à moins d'une unité près.

Le cube de la racine trouvée ajouté avec le reste doit reproduire le nombre proposé; ce qui peut servir de preuve de l'opération.

Dans ce cas il n'y a point de nombre qui, multiplié deux fois par lui-même, reproduise le nombre proposé; mais

on peut obtenir la racine avec tout le degré d'approximation qu'on voudra.

478. Règle. — *Pour extraire par approximation la racine cubique d'un nombre entier qui n'est pas un cube parfait, on abaisse successivement à la droite des restes trois zéros autant de fois que l'on veut avoir de chiffres décimaux à la racine, et l'on continue par ce moyen l'opération d'après la règle.*

Démonstration.—En effet, supposons qu'on veuille avoir la racine à moins d'un centième près, par exemple; on abaissera d'après la règle deux fois 3 zéros, ce qui revient à opérer comme si le nombre proposé avait été multiplié par 1000000, mais alors la racine trouvée serait 100 fois trop grande; pour la rendre à sa juste valeur, il faudrait la diviser par 100, c'est-à-dire séparer deux chiffres décimaux sur la droite de la racine.

479. Règle. — *Pour extraire la racine cubique d'une fraction ordinaire, si le dénominateur est un cube parfait, on extrait la racine du numérateur, laquelle pourra n'être pas exacte, mais alors avec l'approximation qu'on voudra; ensuite on extrait la racine du dénominateur.*

Si le dénominateur n'est pas un cube parfait, on multiplie les deux termes par le carré du dénominateur, ce qui donne une fraction équivalente dont le dénominateur est un cube parfait, et sur laquelle on opère comme il vient d'être dit.

480. Règle. — *Pour extraire la racine cubique d'un nombre décimal, on fait en sorte que le nombre proposé ait le triple du nombre de chiffres décimaux qu'on veut avoir à la racine, soit en y suppléant par des zéros, s'il y en a moins, soit en négligeant le surplus s'il y en a davantage; puis on opère comme sur un nombre entier, en ayant soin de séparer sur la droite de la racine le nombre de chiffres décimaux qu'on veut avoir.*

481. En étendant les raisonnements précédents à la formation des puissances des degrés supérieurs et à l'extraction des racines des indices supérieurs au troisième, on comprendra facilement la règle suivante :