Règle générale. — *Pour extraire une racine quelconque d'un nombre entier, on partage le nombre en tranches d'autant de chiffres qu'il y a d'unités dans l'indice de la racine; puis, commençant par la gauche, on extrait la racine de la première tranche. On écrit le chiffre à la place indiquée par la racine, et l'on soustrait de la première tranche à gauche la puissance de ce chiffre marquée par l'indice de la racine proposée.*

A la droite du reste, on abaisse la tranche suivante et on sépare sur la droite un chiffre de moins qu'il y a d'unités dans l'indice de la racine; ensuite on divise la partie à gauche par un nombre formé de la puissance de la racine inférieure d'une unité, multiplié par l'indice de la racine.

On écrit à la racine le chiffre obtenu en quotient et l'on fait de toute la racine la puissance marquée par l'indice, que l'on soustrait du nombre, formé par les deux premières tranches employées.

A la droite du reste, on abaisse la tranche suivante, ce qui donne un nouveau nombre, sur lequel on opère comme sur le précédent.

On continue ainsi cette série d'opérations jusqu'à ce qu'on ait abaissé successivement toutes les tranches.

La racine d'un nombre entier qui n'est point une puissance exacte ne peut être exprimée d'une manère finie par aucun nombre, ni fractionnaire ni décimal. En effet, si l'on admettait pour un moment que cette racine fût égale à une expression fractionnaire qu'on peut toujours supposer réduite à sa plus simple expression, il faudrait que la puissance de cette fraction, du même degré que l'indice de la racine, reproduisît le nombre entier proposé. Ce qui est impossible, puisque les puissances de deux nombres premiers entre eux sont aussi des nombres premiers entre eux.

La racine d'un nombre entier qui n'est pas une puissance parfaite est dite *irrationnelle* ou *incommensurable*, c'est-à-dire qui n'a point de commune mesure avec l'unité, ni par conséquent avec aucun nombre entier ou fractionnaire.

Questionnaire.

Qu'est-ce que le cube d'un nombre? (464)
Comment forme-t-on le cube d'un nombre entier? (465)
De quoi se compose le cube d'un nombre composé de dizaines et d'unités? (467)

Comment forme-t-on le cube d'une fraction ordinaire? (468)
Comment forme-t-on le cube d'un nombre décimal? (469)
Qu'appelle-t-on racine cubique d'un nombre? (470)
Quelle est la règle pour extraire la racine cubique d'un nombre entier? (471)
Comment peut-on reconnaître d'avance combien de chiffres aura la racine? (471)
Comment peut-on s'assurer si le chiffre qu'on veut écrire à la racine ne sera ni trop fort ni trop faible? (473, 476)
Qu'entend-on par un nombre cube parfait? (477)
Comment peut-on extraire la racine cubique d'un nombre entier à tel degré d'approximation qu'on voudra? (478)
Comment fait-on pour extraire la racine cubique d'une fraction? (479)
Comment fait-on pour extraire la racine cubique d'un nombre décimal? (480)
Comment extraire une racine quelconque d'un nombre entier? (481)

Exercices (XXXI).

Former le cube des nombres suivants :

1).	12	$\frac{2}{7}$	0,3
3).	29	$\frac{13}{25}$	0,08
3).	75	$1\frac{1}{2}$	1,35
4).	132	$3\frac{5}{9}$	2,006
5).	429	$12\frac{2}{3}$	0,004
6).	548	$25\frac{11}{19}$	0,00573
7).	2547	$128\frac{3}{4}$	0,00009
8).	3769	$3\frac{152}{241}$	0,3428
9).	74302	$29\frac{72}{135}$	0,000007
10).	129458	$8\frac{429}{7340}$	34,005

Extraire la racine cubique des nombres suivants :

11).	512	$\frac{8}{125}$	50,653
12).	1728	$3\frac{3}{8}$	1,191016
13).	59319	$\frac{343}{1000}$	17173,512
14).	140608	$\frac{1728}{59319}$	4258 à 0,1 près.
15).	405224	$\frac{2744}{4913}$	349 à 0,01 près.
16).	2460375	$1\frac{2402}{6859}$	$3\frac{5}{9}$ à 0,001 près.
17).	11089567	$162\frac{378}{1331}$	0,28 à 0,01 près.
18).	325660672	$\frac{1}{4}+\frac{11}{64}$	0,00459 à 0,0001 près.
19).	85766121	$\frac{1}{5}+\frac{2}{25}+\frac{29}{125}$	$81\frac{21}{125}$ à 0,001 près.
20).	4930360408	$\dfrac{\frac{1}{2}+\frac{3}{4}}{\frac{1}{5}-\frac{3}{25}}$	0,00000943 à 0,000001 près.

Problèmes sur le cube et la racine cubique (XXXVI).

1). Quel est le nombre dont la racine cubique diminuée de 3 est égale à 24?

2). On a acheté 25 caisses renfermant chacune autant d'objets qui coûtent chacun autant de centimes qu'il y a de caisses; quel est le prix total de ces objets?

3). Quel est le nombre dont la moitié, le tiers et le quart, multipliés ensemble, donnent pour produit 9?

4). Trouver un nombre dont le tiers multiplié par le carré donne pour produit 1944.

5). On sait qu'un nombre est tel que si l'on divise sa quatrième puissance par sa huitième partie, l'excès de ce quotient sur 2000 est 197; quel est ce nombre?

6). On a acheté pour 164 fr. 64 c. des oranges renfermées dans un certain nombre de caisses dont chacune contient trois fois autant d'oranges qu'il y a de caisses; chaque orange coûte deux fois autant de centimes qu'il y a de caisses. Combien de caisses et d'oranges?

7). Des négociants ont fait une société pour laquelle chacun a mis 1000 fois autant de francs qu'ils sont d'associés; cette affaire leur ayant rapporté 2560 fr., il se trouve qu'ils ont gagné précisément la moitié autant pour cent qu'ils sont d'associés. Combien sont-ils d'associés?

8). A combien s'élève un capital de 30000 fr. placé à intérêts composés, au bout de trois ans, au taux de 5 pour 100?

9). Partager le nombre 130 en deux parties dont la somme des cubes soit 637000?

10). Un capital de 10000 fr. placé à intérêts composés s'est élevé au bout de trois ans à 11576 fr. 25 c.; à quel taux a-t-il été placé?

11). Trouver trois nombres tels que si l'on multiplie 1° le carré du premier par le deuxième, le résultat soit 112; 2° le carré du deuxième par le troisième, 588; 3° le carré du troisième par le premier, 576

4 PROGRESSIONS.

482. *On appelle en général* PROGRESSION *une suite de nombres tels, que le rapport de deux termes consécutifs est constamment le même.*

Il y a deux sortes de progressions, comme il y a deux sortes de rapports, la progression par différence et la progression par quotient.

On les nomme aussi progression arithmétique et progression géométrique : mais ces dénominations sont surannées et peu exactes comme celles de proportion arithmétique et proportion géométrique pour désigner les proportions par différence et par quotient.

Le rapport constant d'un terme à celui qui le suit se nomme la *raison* de la progression.

1° Progressions par différence.

483. *Une progression par différence est une suite de nombres tels, que chacun surpasse celui qui le précède, ou en est surpassé, d'un nombre constant,* qui est la *raison* de la progression.

Les suites des nombres suivants :

÷3 . 5 . 7 . 9 . 11 ...... ÷28 . 24 . 20 . 16 ......

forment deux progressions par différence : la première est dite *croissante*, parce que les termes vont en augmentant et la raison constante est 2; la deuxième est dite *décroissante*, parce que les termes vont en diminuant, et la raison est 4.

La manière d'exprimer la progression est motivée par la définition même de la progression. En effet, trois termes consécutifs quelconques forment une progression par différence continue.

On énonce la progression en disant : 3 *est à* 5 *comme* 5 *est à* 7, *comme* 7 *est à* 9, et ainsi de suite, ou plus simplement, en disant : *soit la progression* 3, 5, 7, etc.

484. Règle. — *Un terme de rang quelconque d'une progression par différence s'obtient en ajoutant au premier terme, ou en retranchant du premier terme autant de fois la raison qu'il y a de termes avant lui, selon que la progression est croissante ou décroissante.*

Démonstration. — Soit proposé de déterminer le 15^e terme de la progression croissante

÷3 . 8 . 13 . 18 ....

Puisque, d'après la définition, chacun des termes surpasse celui qui le précède de la raison qui est ici 5, le 2^e terme sera égal au 1er augmenté de 5, le 3^e sera égal au

2^{e} augmenté de 5, et par conséquent égal au 1^{er} augmenté de 2 fois 5, le 4^{e} sera égal au 3^{e} augmenté de 5, et par conséquent au 1^{er}, augmenté de 3 fois 5, et ainsi de suite, jusqu'au 15^{e} terme qui sera égal au 1^{er} augmenté de 14 fois $5 = 3 + 5 \times 14 = 73$.

Soit proposé de déterminer le 28^{e} terme de la progression décroissante

$$\div 625 . 621 . 617 . 613 \ldots\ldots$$

D'après la définition, on a le 2^{e} terme égal au 1^{er}, diminué de la raison qui est ici 4; le 3^{e} égal au 2^{e} diminué de 4, et par conséquent égal au 1^{er} diminué de 2 fois 4; le 4^{e} égal au 3^{e} diminué de 4, et par conséquent égal au 1^{er} diminué de 3 fois 4, et ainsi de suite, jusqu'au 28^{e} terme qui sera égal au 1^{er} diminué de 27 fois $4 = 625 - 4 \times 27 = 517$.

Cette règle dispense, comme on le voit, d'écrire tous les nombres intermédiaires jusqu'au nombre cherché.

485. Règle. — *Pour déterminer le premier terme d'une progression par différence dont on connaît le dernier terme, le nombre des termes et la raison, on soustrait du dernier terme ou on lui ajoute, selon que la progression est croissante ou décroissante, autant de fois la raison qu'il y a de termes avant le dernier.*

486. Règle. — *Pour déterminer la raison d'une progression par différence dont on connaît le premier terme et le dernier, ainsi que le nombre des termes, on divise la différence des deux termes par le nombre de termes diminué de 1.*

Ce qui donne le moyen de déterminer tous les termes intermédiaires.

487. Propriété fondamentale. — *Dans toute progression par différence la somme de deux termes à égale distance des extrêmes est constante et égale par conséquent à la somme du premier terme et du dernier.*

Démonstration. — En effet, soit une progression quelconque

$$\div 3 . 7 . 11 . 15 . 19 . 23 . 27 . 31 . 35.$$

Le 2^{e} terme est égal au 1^{er}, 3, augmenté de la raison 4; mais l'avant-dernier 31 est égal au dernier 35, diminué de la raison 4; donc le 2^{e} + l'avant-dernier $= 3 + 4 + 35 - 4 = 3 + 35$. Pareillement

$$11 + 27 = 7 + 31 \text{ et par conséquent} = 3 + 35,$$
$$15 + 23 = 11 + 27 \text{ et par conséquent} = 3 + 35,$$

et ainsi de suite.

488. Règle. — *Pour trouver la somme de tous les termes d'une progression par différence dont on connaît le premier terme, le dernier et le nombre de termes, on multiplie la somme du premier et du dernier terme par le nombre de termes, et l'on prend la moitié du produit.*

Démonstration. — Soit la progression.

$$\div 3 . 7 . 11 . 15 . 19 . 23 . 27 . 31 . 35.$$

Je renverse l'ordre des termes, ce qui donne la même progression, mais décroissante, que j'écris terme pour terme sous la première.

$$\div 35 . 31 . 27 . 23 . 19 . 15 . 11 . 7 . 3.$$

Maintenant si je fais la somme de ces deux progressions terme à terme, toutes les sommes partielles $(3 + 35)$, $(7 + 31)$, etc., seront égales entre elles et à $(3 + 35)$, d'après la propriété fondamentale, et il y aura autant de ces sommes partielles qu'il y a de termes dans la progression, c'est-à-dire 9. La somme totale des deux progressions sera donc $(3 + 35)\, 9$; mais ces deux progressions sont composées des mêmes nombres, par conséquent leur somme est égale au double de la somme des termes d'une seule, de la progression proposée; donc la somme des termes de la progression sera égale à

$$\frac{(3 + 35)\, 9}{2} = \frac{38 \times 9}{2} = 19 \times 9 = 171.$$

Cette règle dispense, comme on le voit, d'écrire tous les termes de la progression et d'en faire l'addition, ce qui serait très-long.

489. Si l'on ne connaissait que le premier terme, la raison et le nombre de termes, il faudrait commencer par calculer le dernier terme, et ensuite on trouverait la somme d'après la règle précédente.

Questionnaire.

Qu'est-ce qu'une progression ? (482)
Combien y a-t-il de sortes de progressions ? (482)
Qu'est-ce que la raison d'une progression ? (482)
Qu'est-ce qu'une progression par différence ? (483)
Comment s'écrit une progression par différence ? (483)
Pourquoi l'écrit-on ainsi ? (483)
Comment trouve-t-on un terme de rang quelconque d'une progression par différence ? (484)
Comment trouve-t-on le premier terme d'une progression par différence dont on connaît le nombre de termes, le dernier terme et la raison ? (485)
Quelle est la règle pour trouver la raison d'une progression par différence dont on connaît le premier, le dernier et le nombre de termes ? (486)
Quelle est la propriété fondamentale des progressions par différence ? (487)
Comment trouve-t-on la somme de tous les termes d'une progression par différence dont on connaît le premier, le dernier et le nombre de termes ? (488)
Ou seulement le premier, la raison et le nombre de termes ? (489)

Problèmes sur les progressions par différence (XXXVII).

1). Un domestique, entrant dans une maison, reçoit la 1re année 240 fr. de gages, et son maître promet de lui donner 36 fr. de plus chaque année, s'il est content de lui : le domestique ayant toujours bien servi, on demande combien il recevra à la fin de la 17e année, et combien il a reçu en tout pendant ces 17 ans ?

2). Une personne a dépensé dans un jour 3 fr. 40 c.; le lendemain 20 centimes de plus, et ainsi de suite : combien a-t-elle dépensé le 16e jour, et pendant tout ce temps?

3). On donne à un ouvrier, pour creuser un puits de 20 mètres de profondeur, 2 fr. pour le premier mètre, et 50 centimes de plus pour chaque mètre suivant, à raison de la difficulté du travail : combien lui donnera-t-on pour le dernier mètre, et pour tout l'ouvrage?

4). On a placé une somme de 3500 fr. à 4 pour 100; chaque année pendant 24 ans de suite, on ajoute 300 fr. au capital de l'année précédente : on demande à combien se montent les intérêts?

5). Un voyageur qui veut arriver en 19 jours, s'arrange de manière à faire chaque jour 1 kilomètre de plus que le jour précédent; le dernier jour il a fait 58 kilomètres. Combien a-t-il fait de kilomètres le premier jour et dans tout son voyage?

6). On demandait à un domestique combien il recevait de gages par an? Je reçois maintenant 550 fr., répondit-il; la première année je n'ai reçu que 100 fr.; mais chaque année mes gages sont augmentés de 50 fr. Depuis combien de temps le domestique est-il dans la maison?

7). On sait qu'un corps tombant dans le vide parcourt, dans la première seconde de sa chute, 4m,90, et qu'à chaque seconde suivante il parcourt 9m,80 de plus qu'à la seconde précédente. En supposant qu'un corps soit tombé pendant 20 secondes, combien de mètres aura-t-il parcourus dans la dernière seconde de sa chute, et pendant ces vingt secondes?

8). Une somme de 800 fr. doit être acquittée par portions, au moyen de payements mensuels, savoir : 20 fr. le premier mois, et en augmentant à chaque mois d'une même somme, de sorte que le dernier payement soit de 80 fr. Dans combien de mois la somme sera-t-elle acquittée, et de combien chaque payement mensuel augmente-t-il?

9). Deux courriers sont partis en même temps de deux lieux, distants de 420 kilomètres, en allant à la rencontre l'un de l'autre: le premier parcourt chaque jour 8 kilomètres, et le second 12 kilomètres de plus que le jour précédent; ces courriers se sont rencontrés après 6 jours de marche, et le second a parcouru 36 kilomètres de plus que le premier. On demande de déterminer le nombre de kilomètres parcourus, le premier jour, par chacun des deux courriers.

10). Un ouvrier a économisé 1596 fr. en mettant de côté chaque mois 4 fr. de plus que le mois précédent; le premier mois il n'avait pu économiser que 3 fr. Combien a-t-il mis de mois à économiser cette somme?

2° Progressions par quotient.

490. *Une progression par quotient est une suite de termes tels que chacun est égal à celui qui le précède multiplié par un nombre constant*, qui est la *raison* de la progression.

La progression est *croissante* ou *décroissante*, selon que la raison est plus grande ou plus petite que 1.

Les suites des nombres :

$$\div\div\ 2 : 6 : 18 : 54 \ldots\ldots$$
$$\div\div\ 1296 : 324 : 81, 20\tfrac{1}{4} : 5\tfrac{1}{16} \ldots\ldots$$

forment deux progressions, dont la première est croissante, car la raison $\frac{6}{2} = 3$ est plus grande que 1, et la seconde décroissante, puisque la raison $\frac{324}{1296} = \frac{1}{4}$ est plus petite que 1.

On énonce les progressions par quotient de la même manière que les progressions par différence (n° **483**); et leur notation vient de ce que, d'après la définition même des progressions par quotient, trois termes consécutifs d'une suite semblable forment toujours une proportion continue par quotient (n° **424**).

491. Règle. — *Un terme de rang quelconque d'une progression par quotient s'obtient en multipliant le premier terme par la raison élevée à une puissance marquée par le nombre de termes qui le précèdent.*

Démonstration. — En effet, soit proposé de déterminer le 10ᵉ terme de la progression $\div\!\!\div\ 3 : 6 : 12 : 24 \ldots\ldots$

$$6 = 3 \times 2,$$
$$12 = 6 \times 2 = 3 \times 2 \times 2 = 3 \times 2^2,$$
$$24 = 12 \times 2 = 3 \times 2 \times 2 \times 2 = 3 \times 2^3,$$

et par conséquent le 10ᵉ terme $= 3 \times 2^9 = 3 \times 512 \times 1536$.

On tire de là facilement les règles suivantes :

492. Règle. — *Pour déterminer le premier terme d'une progression par quotient dont on connaît le dernier terme, le nombre de termes et la raison, on divise ce dernier terme par la raison élevée à une puissance marquée par le nombre de termes qui le précèdent.*

493. Règle. — *Pour déterminer la raison d'une progression par quotient dont on connaît le premier et le dernier terme, ainsi que le nombre des termes, on divise le dernier par le premier terme, et l'on extrait du quotient une racine d'un degré marqué par le nombre de termes diminué de* 1.

Ce qui permet d'insérer un nombre donné de moyens proportionnels entre deux nombres.

494. Propriété fondamentale. — *Dans toute progression par quotient, le produit de deux termes à égale distance des extrêmes est constant, et égal par conséquent au produit du premier par le dernier.*

Démonstration. — En effet, soit encore la progression

$$\div\!\!\div\ 3 : 6 : 12 : 24 : 48 : 96 : 192.$$

Le 2ᵉ terme $6 = 3 \times 2$;

l'avant-dernier $96 = 192 \times \frac{1}{2}$;

donc $6 \times 96 = 3 \times 192 \times 2 \times \frac{1}{2} = 3 \times 192$;

de même $12 \times 48 = 6 \times 96$;

et par conséquent $= 3 \times 192$, et ainsi de suite.

495. Règle. — *Pour trouver le produit de tous les termes d'une progression par quotient, on multiplie entre eux les deux extrêmes, on élève ce produit à une puissance marquée par le nombre de termes, et l'on extrait la racine carrée du résultat.*

Démonstration. — En effet, soit la progression

$$\div\!\!\div\ 3 : 6 : 12 : 24 : 48 : 96 : 192.$$

J'écris la même progression, en renversant l'ordre des termes $\div\!\!\div\ 192 : 96 : 48 : 24 : 12 : 6 : 3$.

Maintenant, si je fais le produit de ces deux progressions terme à terme, tous les produits partiels (3×192), (6×96), etc., seront égaux entre eux et à (3×192), d'après la propriété fondamentale, et il y aura autant de ces produits qu'il y a de termes dans la progression, c'est-à-dire 7 ; le produit de tous ces produits partiels sera donc égal à $(3 \times 192)^7$; mais ces deux progressions sont composées des mêmes nombres; par conséquent leur produit est égal au carré du produit de tous les termes de chacune d'elles, de la progression proposée ; donc le produit de tous les termes de la progression sera

$$\sqrt{(3 \times 192)^7}.$$

496. Règle. — *Pour trouver la somme de tous les termes d'une progression croissante par quotient, on multiplie le dernier terme par la raison, on retranche du produit le premier terme, et l'on divise le reste par la raison diminuée de* 1.

Démonstration. — Soit, en effet, la progression par quotient $\div\!\!\div\ 2 : 6 : 18 : 54 : 162 : 486$,

dont la somme sera $2 + 6 + 18 + 54 + 162 + 486$.

Je multiplie tous les termes par la raison qui est 3, et observant que le produit de chaque terme par la raison est égal au terme suivant, j'aurai pour résultat

$$6 + 18 + 54 + 162 + 486 + 486 \times 3,$$

qui représente le triple de la somme de la progression; retranchant ces deux sommes l'une de l'autre, et ayant égard aux termes qui disparaissent, j'aurai

$$(486 \times 3) - 2,$$

qui ne représentera plus que le double de la somme, c'est-à-dire la somme multipliée par $(3 - 1)$.

Connaissant un produit et un des facteurs, j'obtiendrai pour la somme demandée

$$\frac{(486 \times 3) - 2}{3 - 1} = \frac{1456}{2} = 728.$$

497. Si l'on ne connaissait que le premier terme, la raison et le nombre de termes, il faudrait commencer par calculer le dernier terme, et l'on trouverait ensuite la somme d'après la règle précédente.

498. Si la progression était décroissante, on soustrairait du premier terme le produit du dernier multiplié par la raison, et l'on diviserait le reste par la différence entre l'unité et la raison, qui, dans ce cas, est plus petite que 1.

EXEMPLE. — Soit la progression par quotient décroissante

$$\div\!\div\ 16 : 8 : 4 : 2 : 1 : \tfrac{1}{2} : \tfrac{1}{4} : \tfrac{1}{8} \ldots\ldots$$

Si l'on demandait la somme des neuf premiers termes, on trouverait d'abord que le neuvième terme est $\frac{1}{16}$, et par conséquent la somme demandée serait

$$\frac{16 - \frac{1}{32}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{\frac{512 - 1}{32}}{\frac{1}{2}} = \frac{511}{32} \times 2 = \frac{511}{16} = 31\ \tfrac{15}{16}.$$

499. REMARQUE. — Lorsqu'il s'agit de trouver la somme des termes d'une progression par quotient, si la progression est croissante, la somme est de plus en plus grande à

mesure que le nombre des termes augmente; mais cela n'a plus lieu quand il s'agit d'une progression décroissante. En effet, plus on avance dans la série, plus les nombres sont petits, au point que, lorsque le nombre des termes est très-grand, le dernier terme que l'on considère est extrêmement petit, et comme il doit être encore multiplié par la raison qui est plus petite que 1, le produit sera plus petit encore, et pourra être négligé à l'égard du premier terme, dont il fallait le soustraire. La somme, dans ce cas, s'obtient donc en divisant le premier terme par l'excès de l'unité sur la raison, c'est *la limite* que ne peut jamais dépasser la somme de tous les termes d'une progression par quotient, quel que soit le nombre de termes que l'on prenne.

RÈGLE. — *La limite de la somme de tous les termes d'une progression par quotient décroissante à l'infini s'obtient en divisant le premier terme par l'excès de l'unité sur la raison.*

Ainsi, la limite de la somme de tous les termes de chacune des progressions suivantes décroissante à l'infini:

$$\div\!\div\ 1 : \tfrac{1}{2} : \tfrac{1}{4} : \tfrac{1}{8} \ldots\ldots\ldots;$$
$$\div\!\div\ 1 : \tfrac{1}{3} : \tfrac{1}{9} : \tfrac{1}{27} \ldots\ldots\ldots;$$

est pour la première,

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{(\frac{1}{2})} = 2,$$

pour la seconde,

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{(\frac{2}{3})} = \frac{3}{2} = 1\ \tfrac{1}{2}.$$

500. Au surplus, on pourrait déterminer l'erreur que l'on commet, en prenant la limite au lieu de la somme exacte d'un nombre donné de termes d'une progression décroissante.

Soit proposé de trouver la somme des quinze premiers termes de la progression décroissante

$$\div\!\div\ 1 : \tfrac{1}{10} : \tfrac{1}{100} : \tfrac{1}{1000} \ldots\ldots\ldots;$$

et qu'on prenne pour la somme demandée, la limite

$$\frac{1}{1-\frac{1}{10}}=\frac{1}{\left(\frac{9}{10}\right)}=1\,\tfrac{1}{9}.$$

Comme le quinzième terme serait

$$\frac{1}{10^{14}}=\frac{1}{1 \text{ suivi de } 14 \text{ zéros}},$$

l'erreur ne serait que

$$\frac{\frac{1}{10^{14}}\times\frac{1}{10}}{1-\frac{1}{10}}=\frac{1}{9} \text{ de } \frac{1}{10^{14}},$$

nombre extrêmement petit en effet.

501. Les fractions décimales périodiques peuvent être considérées comme la somme des termes d'une progression par quotient décroissante à l'infini.

En effet, la fraction décimale périodique 0,373737.... peut être écrite sous la forme :

$$\tfrac{37}{100}+\tfrac{37}{10000}\ \tfrac{37}{1000000}\ldots \text{ ou bien } \tfrac{37}{100}\left(1+\tfrac{1}{100}+\tfrac{1}{10000}+\ldots\right).$$

Or, la limite de la somme de toutes les fractions renfermées dans la parenthèse, dans lesquelles on reconnaît facilement les termes d'une progression décroissante, est, d'après la règle précédente,

$$\frac{1}{1-\frac{1}{100}}=\frac{1}{\left(\frac{99}{100}\right)}=\frac{100}{99};$$

par conséquent la limite de la fraction décimale proposée

$$0{,}373737\ldots\ldots=\tfrac{37}{100}\times\tfrac{100}{99}=\tfrac{37}{99}.$$

De là cette règle : *Pour réduire en fraction ordinaire une fraction décimale périodique simple, on écrit pour numérateur les chiffres de la période et pour dénominateur autant de 9 qu'il y a de chiffres dans la période.*

Si l'on avait la fraction périodique mixte 0,53737..., cette fraction peut être mise sous la forme $\frac{5}{10}+\frac{1}{10}\times 0{,}3737\ldots$, la fraction périodique équivaut à $\frac{37}{99}$, et par conséquent la proposée

$$=\frac{5}{10}+\frac{37}{990}=\frac{5\times 99+37}{990}=\frac{500-5+37}{990}=\frac{537-5}{990},$$

d'où l'on peut tirer une règle générale.

Questionnaire.

Qu'est ce qu'une progression par quotient? (490)
Quand la progression est décroissante, qu'est-ce que la raison? (490)
Quelle est la règle pour calculer un terme de rang quelconque connaissant le premier terme, la raison et le rang du terme inconnu? (491)
La règle pour calculer le premier terme quand on connaît le dernier, le nombre des termes et la raison? (492)
La règle pour calculer la raison, connaissant le premier, le dernier terme et le nombre de termes? (497)
Comment fait-on pour trouver un nombre donné de moyens proportionnels entre deux nombres? (493)
En quoi consiste la propriété fondamentale des progressions par quotient? (494)
Comment calcule-t-on le produit de tous les termes d'une progression par quotient. connaissant le premier, le dernier terme et le nombre des termes? (495)
Comment calcule-t-on la somme de tous les termes d'une progression par quotient, connaissant le premier, le dernier, le nombre des termes et la raison? (496)
Ou seulement le premier, la raison et le nombre des termes? (497)
Lorsque la progression est décroissante, quelle modification la règle reçoit-elle? (498)
Qu'est-ce que la limite de la somme de tous les termes d'une progression par quotient décroissante à l'infini? (499)
Comment obtient-on cette limite? (499)

Problèmes sur les progressions par quotient (XXXVIII).

1). Un Anglais, à Saint-Pétersbourg, offrait de parier que la Néva serait prise par les glaces le 8 novembre; les conditions du pari étaient que, pour chaque jour de retard ou d'avance, il donnerait ou recevrait 3 fois plus que le jour précédent, en commençant le premier jour par 5 centimes; la Néva ayant été prise le 20 novembre, combien a-t-il dû donner le dernier jour, et combien a-t-il perdu en tout?

2). Quelqu'un offrait de vendre son cheval aux conditions suivantes: il demandait 1 centime pour le premier clou des fers, 2 pour le deuxième, 4 pour le troisième, et ainsi de suite, en doublant pour chaque clou, jusqu'au trente-deuxième et dernier, le prix du clou précédent; quel serait, à ce compte, le prix du cheval?

3). Un ouvrier mineur, chargé d'ouvrir une galerie, a reçu 2 francs pour le premier mètre, un quart en sus pour le deuxième mètre, et ainsi de suite, avec augmentation d'un quart en sus du mètre précédent pour le prix de chaque mètre suivant. L'ouvrier a achevé la galerie, qui a 10 mètres de longueur; combien lui revient-il?

4). 1 franc, placé à intérêts composés à 5 pour 100 par an, à quelle somme s'élève-t-il après 20 ans?

5). Chaque année, pendant 20 ans, on place 1 franc à intérêts composés; quelle somme aura-t-on en capital et intérêts, au bout de ces 20 années?

6). On a semé, la première année, 1 litre de blé; la deuxième an-

16*

née, on sème toute la récolte, et ainsi de suite jusqu'à la dixième année, où l'on a récolté 1 048 576 litres. En supposant que le rapport de blé soit le même chaque année, quel est ce rapport?

7). Une personne charitable, rencontrant 10 pauvres, fait l'aumône à chacun d'eux, en doublant toujours ce qu'elle a donné au précédent ; le dixième a reçu 25 fr. 60 c.; combien a-t-elle donné au premier, et combien a-t-elle dépensé en tout?

8). Une autre personne charitable, dans les mêmes circonstances, a donné en tout 204 fr. 75 c., et il n'y avait qu'un petit nombre de pauvres de plus ; combien ?

9). Une personne acquitte sa dette en un an, en donnant 50 fr. le premier mois, et en triplant toujours à chaque mois suivant; à combien s'élève sa dette ?

10). Un autre débiteur voudrait acquitter une dette de 48400 fr. en divers payements successivement triples les uns des autres, en commençant par 400 fr.; combien de payements?

11). L'inventeur du jeu des échecs, si l'on en croit l'histoire, se contenta de demander 1 grain de blé pour la première case de l'échiquier, 2 pour la deuxième, 4 pour la troisième, et ainsi de suite, jusqu'à la soixante-quatrième et dernière case. En admettant qu'il y ait 25 000 grains de blé dans 1 litre, et que chaque hectolitre de blé vaille 20 fr., quelle somme cela fait-il?

§ II. APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES.

1. DÉFINITIONS PRÉLIMINAIRES.

502. On donne généralement le nom de *corps* à tout ce qu'on peut voir, toucher et peser.

Les corps sont ou *solides*, comme les métaux, les pierres, le bois; ou *liquides*, comme l'eau, le vin, etc.; ou enfin *gazeux*, comme l'air qu'on respire, le gaz qui sert à l'éclairage, etc.

503. On ne peut se figurer un corps qui ne soit étendu, c'est-à-dire qui n'occupe une certaine portion de l'espace.

504. *Le* VOLUME *d'un corps est la portion de l'espace que ce corps occupe.*

505. *La* SURFACE *d'un corps est la partie extérieure de ce corps, ce qui le sépare du reste de l'espace.*

On distingue les surfaces *planes*, comme la façade d'une maison, le dessus d'une table, une glace polie, etc.; et les

surfaces *courbes*, qui ne sont ni planes ni composées de surfaces planes, comme un rouleau, une boule, etc.

506. *La* LIGNE *est ce qui termine la surface.*

On distingue la ligne *droite*, comme le bord d'une règle bien dressée, comme la direction que prend un fil à l'extrémité duquel on suspend un objet pesant; et la ligne *courbe*, qui n'est ni droite ni composée de lignes droites, comme la circonférence d'un cercle, le bord d'un bassin, etc.

507. *Le* POINT *est l'extrémité de la ligne.*

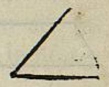
508. Il est bien évident que l'on peut ne considérer que la surface d'un corps sans penser à son volume.

De même qu'on peut ne considérer que la ligne qui borne la surface sans songer à la surface elle-même; que le point qui termine la ligne sans penser à la ligne elle-même.

509. La forme d'un corps est celle de sa surface extérieure; la forme d'une surface plane est celle de son contour.

2. DES FIGURES OU FORMES GÉOMÉTRIQUES.

510. La distance entre deux points se mesure sur la ligne droite qui joint ces deux points ; car c'est la plus courte ligne qu'on puisse mener entre ces deux points.



511. *L'angle* est l'écartement de deux lignes qui se rencontrent; le point de rencontre de ces deux lignes s'appelle le *sommet* de l'angle.

512. Lorsqu'une ligne rencontre une autre ligne, elle fait avec celle-ci deux angles généralement inégaux. Lorsque ces deux angles sont égaux, on dit que la première ligne est *perpendiculaire* sur l'autre, et les angles égaux s'appellent des angles *droits*.

La distance d'un point à une droite se mesure sur la perpendiculaire menée de ce point à la droite; car c'est la plus courte ligne qu'on puisse mener du point à la droite.