CAPITULO III.

De la cuadratura de la esfera y elipse: sus sectores y segmentos, segun Arquímedes.

Las proposiciones de este capítulo son el fundamento de las mas medidas del capítulo antecedente, y de donde resultan las prácticas de medir todo género de bóvedas, como se verá despues; por lo que conviene que el principiante tenga estas proposiciones bien entendidas, para que sepa en qué consiste el acierto de medir los edificios, que se siguen á continuacion.

PROPOSICION XIX.

TEOREMA.

La superficie de la esfera es igual á la de un paralelógramo rectángulo, formado de toda la circunferencia y todo su diámetro.

DEMOSTRACION.

Imagínese que el rectángulo M Z N (Fig. 8) es formado de la circunferencia de un círculo mayor de una esfera, cuya línea, tendida en plano, será M N de 22 pies por ejemplo; y su diámetro M Z de 7 pies, cuyas dos líneas forman el ángulo recto en M. Digo, que tirada la diagonal

Z N, queda formado el rectángulo M Z N, cuya area será igual á la mitad de la superficie exterior de un globo, y que esta será como dos veces la superficie plana del círculo mayor de la esfera, como se prueba en esta forma: Teniendo el círculo 7 de diámetro, tendrá 22 de circunferencia; y multiplicados la mitad de 7 por la mitad de 22, saldrán 38 y medio, que serán los pies superficiales de aquel círculo plano. Mídase asímismo la mitad de M Z, que de 7 es 3 y medio, por los 22 de la M N, ó la mitad de los 22, que es 11, por los 7; y de cualquiera modo vendrán á la multiplicacion 77, cuya mitad es 38 y medio, con lo que queda demostrado, que el triángulo M Z N es mitad de la superficie exterior de la esfera: luego formando un paralelógramo, cuyos lados mayores sean iguales á la mayor circunferencia, y los dos números iguales á su diámetro, será la superficie de este igual á la de toda la esfera, y por consiguiente como cuatro superficies juntas de su mayor círculo plano.

PROPOSICION XX.

TEOREMA.

La superficie del cilindro circunscrito á la esfera, sin contar la de sus basas, es igual á la superficie exterior de toda la esfera (Fig. 15).

Consta de la proposicion antecedente, que si-

se cortare una tela igual al paralelógramo formado de la circunferencia y diámetro del círculo, se ajustaria al rededor de la esfera C *m* O Z, como se representa en la figura metido el globo dentro del cilindro P Q B D, cuya altura es igual á la del diámetro Z *m*, y la tela rodearia toda la circunferencia del cilindro P *n*, Q *m*, menos la de sus basas.

PROPOSICION XXI.

TEOREMA.

La solidez de la esfera es igual á una pirámide cónica, cuya basa sea igual á la superficie exterior de toda la esfera, y su altura igual al tercio del radio (Fig. 15).

Imagínese que el diámetro B Z D es de un círculo, cuya area sea igual á la superficie de la esfera Z C *m* O (por toda su exterioridad), y su altura Z A es tercio del radio de la misma esfera: digo que la solidez de la esfera es igual á la pirámide cónica A B D, como consta de las Electas de Euclides, por cuya doctrina se entrará en la práctica de las proposiciones siguientes.

PROPOSICION XXII.

Medir la superficie de la esfera de sus sectores y segmentos (Fig. 16).

1 Para medir la esfera, hállese la superficie del círculo de su mayor diámetro (por la proposicion 51 del libro antecedente), y cuatrodoblándola (que será multiplicarla por 4): lo que saliere será la superficie exterior de ella, ó multiplicando el diámetro por la circunferencia.

2 La media esfera no se hace mas que doblar la area de su mayor círculo plano, y la suma será la superficie exterior sin la de su basa; y lo mismo saldrá multiplicando la circunferencia del círculo plano H E X F por la sagita ó perpendicular T H, cuya superficie será igual á la mitad de la esfera sin su basa, ó á la superficie del cilindro E D F B, que es igual á la semiesfera por su redondez exterior.

3 Para medir la superficie de un segmento de esfera correspondiente á su convexidad *c* X *o*, mídase la circunferencia de su basa, cuyo diámetro del círculo de ella es *c* Z *o*; y multiplicándola por la sagita ó altura Z X, saldrá al producto la superficie exterior, sin contar la del círculo de su basa.

4 Si el segmento fuere entre dos cuerdas de un círculo, como entre EF y Q P, mídase la circunferencia de su mayor círculo, cuyo diámetro será E F: multiplíquese por la altura de en-

tre las dos cuerdas, que es TZ, y lo que saliere será la superficie que rodea el segmento, segun la curvatura de E*c*, ó de *o*F, y esta superficie será igual á la del cilindro EQPF, levantado sobre su mayor círculo EF, y de la misma altura TZ.

5 Si este segmento fuere cortado con dos cuerdas, cuyos planos no fueren paralelos, se obra la medida de la misma forma, multiplicando la circunferencia del círculo mayor por la altura TZ. Sobre esto solo hay que advertir, que la TZ podia variar en altura, como si el estremo *c* bajare hácia E, ó al contrario, y en este caso sería QE mas corta, y FP mas larga: luego en este caso se puede obrar sin hacer cuenta con la TZ, solo juntar las dos alturas QE menor y FP mayor; y tomando por TZ la mitad de la suma de las dos alturas, se multiplicará esta por la dicha circunferencia del círculo mayor EF, y saldrá la medida que se desea.

6 Para medir la superficie de un sector de esfera como T*c*X*o*, se multiplicará primero la circunferencia de su mayor círculo (cuyo diámetro es *oc*) por la altura de su sagita ZX: y lo que saliere al producto, será la superficie de *c*X*o*Z igual á un cilindro de su altura, como lo es *cmno*, y guardando esta superficie, se medirá la de la pirámide cónica, que es *c*T*o* por la proposicion 9 de este libro; y juntándola con la que se guarda del segmento *c*X*o*Z, la suma de las dos partidas será la superficie de todo el sector.

PROPOSICION XXIII.

Medir la solidez de la esfera, y la de sus sectores y segmentos (Fig. 16).

1 La solidez de la esfera se mide con brevedad en esta forma: Multiplíquese la circunferencia de su mayor círculo por todo su diámetro, y el producto será la superficie exterior de toda la esfera: multiplíquese esta superficie por la sesta parte del diámetro ó tercio del radio, y lo que saliere á la multiplicacion será la solidez de la esfera: si fuere media esfera, se medirá por entero, y se tomará su mitad: demuéstrase esto por la proposicion 21 de este libro.

2 La solidez del sector esférico T*c*X*o* se hallará multiplicando la snperficie exterior del segmento *c*X*o* (ó la del cilindro *cmno* su igual) por el tercio del radio TX, y lo que saliere á la multiplicacion será la solidez que se busca.

3 Si se hubiere de medir la solidez del sector mayor T*c*H*o*, mídase la superficie esférica *c*H*o*, y multiplíquese por el tercio del radio TH, y el producto será la solidez.

4 Para medir la solidez del segmento *c*X*o*Z, mídase el sector T*c*X*o*; y restando la pirámide cónica *c*Z*o*T, quedará la solidez del segmento *c*X*o*Z, de cuya práctica se colige el poder medir cualquier anillo ó zona de un círculo sólido cuyo cuerpo fuere rodeado con el plano vertical *c*X*o*Z, ó solo su mitad, su tercio ó cuarto, &c.

5 Si se hubiere de medir el segmento mayor Q P H, se puede obrar por uno de dos modos.

Primero, mídase el sector T *c o* H, multiplicando la superficie del cilindro D Q B P (que es igual á la superficie esférica Q H P) por el tercio del radio T H (núm. 3 de esta proposicion), y será la solidez del sector: mídase tambien la pirámide cónica *co*T (por las reglas de la fig. 8); y juntando la solidez de esta con la del sector, serán las dos juntas el sólido del segmento Q P B D.

Segundo, mídase la esfera por entero; y restándole el segmento menor *c* X *o* Z, quedará en la resta la solidez del mayor Q P B D.

6 Para medir la solidez de entre dos segmentos de esfera, cuya parte fuere E *c o* F, mídase la solidez de toda la esfera; y restándole la de los dos segmentos *c* Z *o* X y E T F H, quedará en la resta la solidez que se pide; y así se obrará con sus semejantes.

PROPOSICION XXIV.

Medir la superficie de la elipse (Fig. 17).

Habiendo entendido las medidas de la esfera, con facilidad se comprenderán las de la elipse ú óvalo, cuyos cuerpos, siendo regulares, pueden ser en dos formas, que son longos ó latos. Elipse longa es la que se forma al rededor de su diámetro mayor, sirviendo este de eje ó cateto inmóvil, por cuyo rededor se anda ó tornea el semidiámetro menor, y se forma un sólido semejante á la hechura de un huevo, que será de iguales estremos y medio. Elipse lata ó ancha es la que se forma con el semidiámetro mayor al rededor del diámetro menor: y sale la elipse en forma de una esfera algo escachada; y para obrar las medidas de estas dos elipses, se hará por las reglas siguientes.

1 Para medir la superficie exterior de la elipse longa (cuyo nombre, por ser sólido, se le da de esferoide, así como al círculo de esfera), tomados en el compás sus dos diámetros mayor y menor, se delineará en papel su mayor plano, que es el que se corta de alto á bajo por el eje del diámetro menor, cuya figura se supone ya delineada, como A B I R N (Fig. 17): hállense los arcos de que se puede componer la elipse plana; y sirviéndonos de la mitad de ella, dividida por el diámetro menor B N, se halla, que el arco I R es formado del centro X, formando un sector X I R; tírese la recta I R; y por el extremo del diámetro mayor opuesto á A, tírese la V S paralela á la cuerda I R; y levantando las I V, R S perpendiculares á I R, se ha formado un cilindro I V S R, cuya superficie será igual á la del segmento esférico del arco que corta la cuerda I R, como lo fué en la fig. 16 antecedente á esta, el cilindro *cm no*, con la superficie del segmento *c* X *o* Z. Teniendo conocida la superficie esférica del segmento I V S R, se doblará por la que corresponde á otro segmento en el estremo A igual á este, y guárdese la suma de la superficie de estos dos segmentos. Ahora falta que me-

dir la superficie del sólido I D P R N Q, que es figura de una cuba, la cual se obrará ajustando por cualquiera de sus lados una cinta ó correa como de P á D, y á I; y midiendo la circunferencia de un círculo, cuyo diámetro fuere una recta, tirada del medio del arco D I al medio de otro su opuesto N R, se multiplicará la circunferencia de este círculo por lo largo de la correa; y lo que saliere á la multiplicacion, será la superficie exterior de la figura de la cuba, la cual se juntará con la que se guarda de los dos segmentos, y todo junto será la superficie exterior de la elipse longa.

2 Si la elipse fuere lata ó escachada, su mayor diámetro será círculo; y cortadas verticalmente por el eje ó diámetro menor, quedará formada en plano la elipse mayor de la esferoide en la misma forma antecedente, cuya superficie se mide como se ha espresado arriba, á excepcion, de que en lugar del sector X I R se ha de formar el D Q N R; porque la recta Q C R corta un círculo plano, lo que antes cortaba la I R: luego formando los cilindros Q L R M, y O P I K, son las superficies de ellos, sin contar las de sus basas, iguales cada una á la de su segmento esférico: luego juntando estas dos superficies, se guardarán; y midiendo con la correa el arco P A Q, se tirará una recta por medio de P A, ó A Q, al otro arco correspondiente á la parte opuesta; y midiendo el círculo que sobre esta recta se imaginare, se multiplicará su circunferencia por lo largo de la correa, y saldrá la superficie exterior

del sólido del centro, á quien juntándole las superficies de los dos segmentos esféricos, que se han medido, será la suma de toda la superficie que se pide de la esferoide lata ó ancha, sin entrar ninguna de sus basas.

PROPOSICION XXV.

Medir la solidez de la elipse (Fig. 17).

Para medir la solidez de la elipse se medirán los segmentos opuestos, que fueren sus basas círculos (por la proposicion 23 de la fig. 16); y midiendo la superficie vertical de uno de los otros dos lados, que no son círculos, se multiplicará por la circunferencia que rodeare el sólido del centro, que será un cilindro sólido; y midiendo este, se juntarán todas las solideces en una suma: y lo que todas juntas sumaren, será la solidez de la pieza, sea longa ó lata.

Nota, que para multiplicar el sólido, que corresponde en el segmento vertical Q C N R, ni ha de ser por la circunferencia del diámetro B C, ni por la del D N; porque esta será medida larga, y aquella será corta. Lo que se hace para obrar con seguridad estas medidas, es partir el plano vertical en dos superficies iguales, con una línea paralela á la basa Q R, para lo cual se han dado bastantes reglas en el cap. 8, lib. 1, y tomando la medida desde el punto que cortare la línea de la particion entre C y N, hasta el eje de la elipse, con esta distancia se ha de hacer un

círculo, cuya circunferencia se multiplicará por el plano vertical QNCR, y lo que produjere será el sólido, que rodea el segmento todo el cilindro interior RQPI.

1 De otro modo, que segun doctrina de Arquímedes de Esferoide, mide el Padre Tosca en su lib. XI, proposicion 26, Geometría práctica, y es como se sigue: Pídese la solidez de la esferoide longa, cuyo diámetro inmóvil fué el mayor que sale de A, pasando por el centro X, hasta el estremo opuesto, que sirvió de eje para tornear la esferoide longa, cuya longitud sea 20; y el menor D N, que se movió, sea 15, cuya basa es círculo: mídase su area superficial, y será $176\frac{1}{4}$: multiplíquese esta superficie de la basa mayor, que es D N, por los dos tercios del diámetro mayor, que de 20 son 13 y $\frac{1}{3}$, y montarán 2357 y un séptimo (que son en esta cuenta 2 y $\frac{1}{7}$, mas que lo que dicho Tosca saca en las mismas partidas); y esta será la superficie de la esferoide. La razon es, porque segun la regla de Arquímedes, tiene el círculo del mayor diámetro, con el círculo del menor, razon duplicada. Esto supuesto, sea F A E el hemisferio sobre el diámetro mayor, que se supone F E, igual al de A: sea F G H E el cilindro, cuya basa es la misma del hemisferio, y su altura sea dos tercios del semidiámetro mayor de la esferoide, ó radio del hemisferio: sea D O L N otro cilindro de la misma altura; pero su basa sea el círculo del menor diámetro de la esferoide.

Por tener estos dos cilindros una misma altura, son como sus basas. Estas basas son entre sí como la semiesferoide al hemisferio, segun Arquímedes: luego dichos cilindros son como la semiesferoide al hemisferio. Siendo, pues, el cilindro F G H E igual al hemisferio, por tener este dos tercios del cilindro circunscrito á dicho hemisferio, el que tambien es dos tercios del mismo cilindro, por tener con él razon subsesquialtera: luego tambien el cilindro D O L N es igual á la semiesferoide longa, y su duplo igual á toda ella. Multiplicándose, pues, la superficie del círculo de su basa B C por los dos tercios del diámetro, tambien se medirá del mismo modo la esferoide.

2 Pídese ahora se mida la solidez de la esferoide lata, cuyo diámetro, que se movió, fué el mayor, que es 20, y el menor, que estuvo inmovil, es 15: hállese el area del círculo, que es 20, y será 314 y dos séptimos: multiplíquense por 10, que son los dos tercios de 15, y montarán 3142 y $\frac{6}{7}$. El Padre Tosca saca 2 y los 6 séptimos en su cuenta de menos, que pudo ser por equivocacion suya.

A estas medidas se siguen otras de conoide, parábola y hipérbola, que son los cortes de un cono; pero no son esenciales para la práctica que aquí se necesita; y caso de serlo, se obrará cualquiera medida de ellas por la propos. 16 de este libro, segun la última medida de ella.